УДК 519.68; 620.179.15; 681.3

М. В. Синьков, Я. А. Калиновский,
Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Развитие исследований алгоритмов решения линейных дифференциальных уравнений от гиперкомплексного переменного порядка выше первого

Рассмотрены алгоритмы решения линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков в гиперкомплексных числовых системах; изучены особенности, возникающие при наличии кратных корней характеристического уравнения и корней, не принадлежащих к заданной гиперкомплексной числовой системе.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, линейные дифференциальные уравнения, кратные корни.*

Постановка проблемы

Результаты, изложенные в данной статье, являются продолжением исследований, которым посвящены работы [1–5]. Здесь рассматриваются вопросы построения алгоритмов решения линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков, которые находят весьма важные применения в различных областях науки и техники.

Цель работы

Целью работы является повышение эффективности моделирования различных процессов, описываемых такими дифференциальными уравнениями от гиперкомплексных переменных, порядок которых выше первого, путем создания алгоритмов их решения аналитическими методами на основе представлений нелинейных функций от гиперкомплексного переменного.

Результаты исследований

Однородные линейные уравнения от гиперкомплексного переменного порядка выше первого имеют вид

$$\frac{d^m X}{dt^m} + A_1 \frac{d^{m-1} X}{dt^{m-1}} + \ldots + A_{m-1} \frac{dX}{dt} + A_m X = 0\,, \tag{1}$$

где X и A_i — гиперкомплексные числа в заданной гиперкомплексной числовой системе n-го порядка Γ; m — порядок дифференциального уравнения.

Решением линейного однородного дифференциального уравнения высокого порядка является гиперкомплексная функция $X(t)$, имеющая число производных не менее, чем порядок той гиперкомплексной числовой системы, в которой задано само уравнение.

Как видно из самой структуры дифференциального уравнения, линейная комбинация решений есть также его решение, т.е., если X_1 и X_2 — решения, то $C_1X_1 + C_2X_2$ — также решение. Здесь C_1, C_2 — гиперкомплексные числа.

Будем искать решение $X(t)$ уравнения (1) в виде:

$$X = Ce^{\Lambda t}, \tag{2}$$

где C, Λ — гиперкомплексные числа.

Действительно, так как гиперкомплексная экспонента определяется как сумма ряда Маклорена

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}, \tag{3}$$

то

$$\frac{dX}{dt} = C\Lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} = C\Lambda e^{\Lambda t}, \tag{4}$$

а m-я производная

$$\frac{d^m X}{dt^m} = C\Lambda^m e^{\Lambda t}. \tag{5}$$

Подставляя выражения для производных от X в (1) и (3) и сокращая на $Ce^{\Lambda t} \neq 0$, получим

$$\Lambda^m + A_1\Lambda^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\Lambda + A_m = 0. \tag{6}$$

Это есть характеристическое уравнение дифференциального уравнения (1). Если определить его корни и подставить в (3), то получим m решений X_k уравнения (1), а, составив их линейную комбинацию с гиперкомплексными коэффициентами C_k, получим общее решение

$$X = \sum_{k=1}^{m} C_k e^{\Lambda_k t}. \tag{7}$$

Далее, используя представление экспоненты в исходной гиперкомплексной числовой системе, получим решение уравнения (1), куда входят только функции вещественного переменного.

Рассмотрим числовой пример.

Пусть в системе дуальных чисел $X = x_1e_1 + x_2e_2$, где $e_1e_1 = e_1$; $e_2e_2 = 0$; $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$, задано дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3X}{dt^3} - 2(2e_1 + e_2)\frac{d^2X}{dt^2} + (5e_1 + 7e_2)\frac{dX}{dt} - (2e_1 + 5e_2) = 0. \qquad (8)$$

Его характеристическое уравнение

$$\Lambda^3 - 2(2e_1 + e_2)\Lambda^2 + (5e_1 + 7e_2)\Lambda - (2e_1 + 5e_2) = 0,$$

где $\Lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ имеет три корня:

$$\Lambda_1 = e_1 + e_2;$$
$$\Lambda_2 = e_1 + 2e_2;$$
$$\Lambda_3 = 2e_1 - e_2.$$

Решение дифференциального уравнения в общем виде запишем как

$$X = C_1e^{(e_1+e_2)t} + C_2e^{(e_1+2e_2)t} + C_3e^{(2e_1-e_2)t},$$

где C_i — произвольные дуальные постоянные ($C_i = C_{i1}e_1 + C_{i2}e_2$).

Возьмем из [6] дуальную экспоненту

$$e^{m_1e_1+m_2e_2} = e^{m_1}(e_1 + m_2e_2).$$

Тогда решение дифференциального уравнения (8) примет вид:

$$X = e^t(c_1 + c_2)e_1 + t(c_1 + 2c_2)e_2) + e^{2t}c_3(e_1 - 2te_2) =$$
$$= ((c_1 + c_2)e^t + c_3e^{2t})e_1 + ((c_1 + 2t_2)e^t - c_3e^{2t})te_2.$$

Если характеристическое уравнение (6) будет иметь кратные корни, то число частных решений вида $C_ie^{\lambda_i t}$ станет меньше порядка уравнения. Недостающие корни будут иметь вид: $t^k e^{\lambda_i t}$ (здесь λ_i — кратный корень, а $k = 1,...,r-1$, где r — кратность корня λ_i).

Это можно доказать методом, изложенным в [7], который полностью подходит и для гиперкомплексных переменных. Таким образом, корню характеристического уравнения (6) кратности r соответствует решение:

$$X_n = e^{\lambda_n t} \sum_{j=0}^{r-1} C_{kj} t^j , \tag{9}$$

где C_{kj} — гиперкомплексная произвольная постоянная.

Итак, общее решение уравнения (1), у которого характеристическое уравнение имеет r кратных корней λ_1 и $m-r$ различных корней, принимает вид

$$X_n = e^{\lambda_1 t} \sum_{j=0}^{r-1} C_{1j} t^j + \sum_{j=r}^{m} C_j e^{\lambda_j t} . \tag{10}$$

В выражении (10) все экспоненты — гиперкомплексные.

Рассмотрим числовой пример. Пусть в системе некоммутативной гиперкомплексной числовой системы кватернионов

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$$

с законом композиции

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	–1	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	–1	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	–1

задано дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2X}{dt^2} - (2e_1 - 4e_2 + 6e_3 + 8e_4)\frac{dX}{dt} + (-28 + 4e_2 + 6e_3 + 8e_4)X = 0 . \tag{11}$$

Его характеристическое уравнение

$$\Lambda^2 - (2e_1 + 4e_2 + 6e_3 + 8e_4)\Lambda + (-28 + 4e_2 + 6e_3 + 8e_4) = 0 .$$

имеет два одинаковых корня

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 .$$

В соответствии с (10) решение уравнения (11)

$$X = (C_1 + C_2 t)e^{\Lambda t}.$$

Здесь экспонента — кватернионная, которая имеет следующее представление [6]:

$$e^{m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4} =$$

$$= e^{m_1}(e_1 \cos \overline{m} + (e_2 m_2 + e_3 m_3 + e_4 m_4) + \frac{\sin \overline{m}}{\overline{m}})),$$

где $\overline{m} = \sqrt{m_2^{\ 2} + m_3^{\ 2} + m_4^{\ 2}}$.

В соответствии с этим представлением общее решение (11) запишем как

$$X = e^t(C_1 + C_2 t)(\cos\sqrt{28}t + \frac{\sin\sqrt{28}t}{\sqrt{28}}(2e_1 + 3e_2 + 4e_2)).$$

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение (6) не имеет корней в заданной гиперкомплексной числовой системе.

Корни характеристического уравнения (6)

$$\Lambda_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ki} e_k$$

должны быть гиперкомплексными числами из той же гиперкомплексной числовой системы $\boldsymbol{\Gamma}$, в которой задано дифференциальное уравнение. Однако, характеристическое уравнение (6) не всегда имеет корни в системе $\boldsymbol{\Gamma}$. Это происходит по следующей причине: гиперкомплексное уравнение (6) равносильно системе из m алгебраических уравнений m-й степени, которая в общем виде имеет $2m^2$ комплексно-сопряженных решений. Однако, в исходной гиперкомплексной числовой системе $\boldsymbol{\Gamma}$ в общем не содержится система комплексных чисел. Поэтому целесообразно рассматривать исходную систему $\boldsymbol{\Gamma}$ не над полем вещественных чисел, а над полем комплексных чисел, что позволяет воспользоваться всеми формулами представления нелинейностей, полученными ранее.

Рассмотрим числовой пример. Пусть в системе двойных чисел

$$X = x_1e_1 + x_2e_2,$$

где $e_1e_1 = e_1$, $e_2e_2 = 0$, $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$, задано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2X}{dt^2}-2(e_1+e_2)\frac{dX}{dt}+(3e_1+2e_2)=0\,.$$

Характеристическое уравнение его

$$\Lambda^2-2(e_1+e_2)\Lambda+(3e_1+2e_2)=0\,.$$

Если подставить сюда

$$\Lambda=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2\,,$$

то характеристическое уравнение равносильно системе из двух уравнений второй степени:

$$\begin{cases}\lambda_1^2=+\lambda_2^2-2(\lambda_1+\lambda_2)+3=0;\\ 2\lambda_1\lambda_2-2(\lambda_1+\lambda_2)+2=0.\end{cases}$$

Эта система имеет четыре решения:

$$1)\ \begin{matrix}\lambda_1=1+i;\\ \lambda_2=1;\end{matrix}$$

$$2)\ \begin{matrix}\lambda_1=1-i;\\ \lambda_2=1;\end{matrix}$$

$$3)\ \begin{matrix}\lambda_1=1;\\ \lambda_2=1+i;\end{matrix}$$

$$4)\ \begin{matrix}\lambda_1=1;\\ \lambda_2=1-i,\end{matrix}$$

где $i^2=-1$.

Как видно решения 1, 2 и 3, 4 — попарно сопряжены.

Но в исходной двойной системе нет чисел, которые получились при решении характеристического уравнения. Поэтому будем рассматривать заданное уравнение не в двойной системе, а в системе комплексно-двойных чисел, т.е. двойной системе, удвоенной комплексными числами.

Общее решение исходного уравнения состоит из четырех компонент, каждая из которых соответствует одному из решений:

$$X(t)=X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)+X_4(t)\,.$$

Определим первую компоненту:

$$X_1(t) = C_1 e^{\Lambda_1 t} = C_1 e^{(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)t} = C_1 e^{\frac{1+i}{e_1+e_2}t} .$$

Здесь C_1 — константа, принадлежащая системе двойных чисел, а экспонента — также в системе двойных чисел. Представление экспоненты в этой системе следующее [6]:

$$e^{ae_1 + be_2} = e^a (chb \cdot e_1 + shb \cdot e_2) .$$

Поэтому

$$X_1(t) = C_1 e^{(1+i)t} (e_1 cht + e_2 sht) .$$

Здесь экспонента представлена уже в системе комплексных чисел

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b) ,$$

из чего следует, что

$$X_1(t) = C_1 e^t (\cos t + i \sin t)(e_1 cht + e_2 sht) = C_1 e^t (e_1 \cos t \cdot cht + \\ + e_2 \cos t \cdot sht + ie_1 \sin t \cdot cht + ie_2 \sin t \cdot sht).$$

Это гиперкомплексное число в системе комплексно-двойных чисел. Остальные компоненты решения определяются аналогично.

Выводы

Проведенные исследования позволили получить алгоритмы решения дифференциальных уравнений высших порядков от гиперкомплексного переменного в различных гиперкомплексных системах в аналитическом виде.

1. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова М.В., Чапор А.А.* Использование ГЧС для представления общих решений систем линейных однородных дифференциальных уравнений // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 1999. — Т. 1, № 6. — С. 31–35.

2. *Калиновский Я.А.* Разработка алгоритмов решения линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка от гиперкомплексного переменного // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 2. — С. 22–29.

3. *Калиновский Я.А.* Алгоритм решения систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка от гиперкомплексного переменного, основанный на удвоении исходной гиперкомплексной числовой системы // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 3. — С. 43–48.

4. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова М.В.* Применение гиперкомплексных чисел для эффективного представления систем дифференциальных уравнений // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 4. —С. 53–61.

5. *Синьков М.В., Калиновский Я.А.* Исследование алгоритмов решения некоторых типов дифференциальных уравнений от гиперкомплексного переменного // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2004. — Т. 6, № 1. — С. 53–61.

6. Исследование арифметических, алгебраических и аналитических свойств гиперкомплексных числовых систем, ориентированных на повышение эффективности моделирования систем уравнений для широкого класса задач: Отчет о НИР «Число» (закл.) / ИПРИ НАН Украины. — № ГР 0298U001097. — К., 1997. — 231 с.

7. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 311 с.

Поступила в редакцию 15.06.2004