ISSN 1561- 9087 Прикладна гідромеханіка. 2000. Том 2 (74), N 4. С. 67 – 72

УДК 532.528

АВТОРЕЗОНАНСНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

Е. Н. ПЕЛИНОВСКИЙ

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Нижегородский технический университет, Россия

Получено 25.07.2000

Рассмотрена динамика уединенной волны (солитона) при взаимодействии с внешними полями в рамках вынужденной версии уравнения Кортевега - де Вриза. Получены асимптотические уравнения первого порядка для амплитуды и фазы солитона, взаимодействующего с изолированным возмущением. Построена фазовая плоскость асимптотической системы и приведены условия захвата солитона внешним полем. Обсуждается динамика солитона в поле нестационарно движущегося возмущения.

Розглядається динаміка поодинокої хвилі (солітона) при взаємодії з зовнішніми полями в рамках збуреної версії рівняння Кортевега-де Вріза. Отримано асимптотичні рівняння першого порядку для амплітуди та фази солітона, який взаємодіє з ізольованим збуренням. Побудована фазова площина асимптотичної системи та приведені умови захоплення солітона зовнішнім полем. Обговорюється динаміка солітона в полі збурення, яке нестаціонарно рухається.

Dynamics of the solitary wave (soliton) is considered in the case of it interaction with external fields in the framework of the version of the forced Korteveg-de Vries equation. The first order asymptotic equations for the amplitude and phase of soliton interacting with an isolated disturbance are obtained. The phase plane of asymptotic system is constructed and the conditions of soliton capture by the external field are presented. The dynamics of soliton in the field of unsteady moving disturbance is discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Описание генерации, распространения и трансформации нелинейных волн на поверхности жидкости является традиционной задачей гидромеханики и мне приятно отметить здесь ведущую роль научной школы профессора И.Т.Селезова в Институте гидромеханики НАН Украины. В данном обзоре мне бы хотелось рассказать о применении методов нелинейной теории волн к одной важной в практическом отношении проблеме резонансного возбуждения уединенных волн (солитонов) резонансными внешними полями. Каноническими моделями здесь являются так называемые вынужденные версии известных нелинейных эволюционных уравнений Кортевега - де Вриза, нелинейного уравнения Шредингера, уравнения Бенджамина - Оно. В частности, вынужденное уравнение Кортевега - де Вриза было получено для разнообразных гидромеханических ситуаций: поверхностных волн под действием атмосферных возмушений или в потоке над препятствием [7, 9, 22, 27], внутренних волн в стратифицированной потоке жидкости над препятствием [14, 15, 24], волн во вращающемся океане [13], поверхностных и внутренних захваченных волн в прибрежной зоне [12, 25], атмосферных волн над локальными препятсвиями в зональных потоках [26, 28]. Отметим, наконец, известные задачи о движении корабля на мелкой воде, когда его скорость близка к скорости длинных поверхностных волн [29]. Резонанс между нелинейными волнами и внешними возмущениями ведет к сложной картине волноизлучения, зависящей от соотношения параметров нелинейности и дисперсии, а также от энергии возмущения. Даже в одномерном случае большинство результатов здесь удается получить только численно, именно они и обсуждаются в указанных выше статьях. В случае малой энергии воздействия на волновое поле аналитические (в частности, асимптотические) методы должны быть эффективными, поскольку само уравнение Кортевега - де Вриза является полностью интегрируемым, а внешнее воздействие приводит к появлению малого слагаемого в вынужденной версии Кортевега - де Вриза. При этом волновое поле можно описывать почти как свободное поле (например, солитон или кноидальная волна – стационарные решения уравнения Кортевега - де Вриза), а их параметры находить из условия взаимодействия с внешним полем. Такая задача представляется более предпочтительной, чем прямое нахождение волнового поля, генерируемого внешним возмущением, поскольку весьма трудоемкая задача существования нелинейного волнового следа за движущимся возмущением сводится к существованию и устойчивости состояний равновесия относительно простых динамических систем. Этот подход позволил описать разнообразные режимы взаимодействия уединенной волны с внешним движущимся полем, в частности, захват солитона внешним возмущением [16–18, 23, 28]. Эти решения имеют важное экологическое значение, позволяя объяснять динамику застойных зон (смога) в атмосферном потоке над городом или динамику вихрей в океане над подводными горами.

Уравнение Кортевега - де Вриза является первым приближением в нелинейной теории длинных волн. Известно, что в стратифицированных потоках квадратичная нелинейность может отсутствовать или быть очень слабой (в частности, если пикноклин в двухслойном океане расположен посередине между дном и свободной поверхностью), в последнее время выяснилось, что такая ситуация является типичной для внутренних волн в прибрежной зоне [6, 20, 21]. В этом случае необходим учет кубической нелинейности и основным эволюционным уравнением становится расширенное уравнение Кортевега - де Вриза (содержащее обе квадратичную и кубическую нелинейности) или, как его часто называют, уравнение Гарднера.

С математической точки зрения это уравнение также полностью интегрируемо, однако его нелинейная динамика является более сложной и здесь принципиальную роль играет знак кубической нелинейности (определяемый видом стратификации плотности и течения). Если он отрицательный, то амплитуда солитона ограничена и солитон предельной амплитуды расширяется до бесконечности (взаимодействие таких солитонов описано Слюняевым и Пелиновским [5]). Если кубическая нелинейность положительна, то возможны солитоны обеих полярностей, также бризеры (осциллирующие стационарно перемещающиеся волновые пакеты). В частном случае, когда квадратичная нелинейность полностью отсутствует, уравнение Гарднера сводится к модифицированному уравнению Кортевега - де Вриза, которое также интегрируется (оно будет приведено далее). Хотя модифицированное уравнение Кортевега - де Вриза известно уже более 30 лет, однако его динамика недостаточно изучена, и только в последнее время стал ясен процесс генерации солитонов и бризеров из произвольных начальных возмущений [6, 8, 18].

Целью настоящей работы является изучение взаимодействия солитонов со слабыми внешними полями в рамках вынужденной версии модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза с положительной кубической нелинейностью. Результаты анализа будут сопоставлены соответствующими выводами для вынужденного уравнения Кортевега - де Вриза.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим каноническую форму модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза с учетом внешнего бегущего возмущения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} + 6\,u^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (1)$$

где $u(x,t)$ описывает волновое поле, например, смещение пикноклина в стратифицированном океане и $f(x - \int v(t)dt)$ представляет собой внешнее поле, движущееся, вообще говоря, с переменной скоростью $V(t)$. Вводя новые координаты

$$x' = x - \int v(t)dt, \;\; t' = t, \qquad (2)$$

уравнение (1) сводится к уравнению вида (тильды опущены)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\,c - v\,)\,\frac{\partial u}{\partial x} + 6\,u^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial f}{\partial x}. \qquad (3)$$

Когда внешнее поле отсутствует, основную роль в динамике модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза играют солитоны и бризеры. Здесь будут рассмотрены только солитонные решения, имеющие весьма простой аналитический вид:

$$\begin{array}{ll} u = a\,\mathrm{sech}[\,a\,\Phi], & \Phi = x - qt - x_0, \\ q = c - v + a^2, & \end{array} \qquad (4)$$

где амплитуда солитона a и начальное положение (фаза) x_0 являются свободными параметрами.

В данной системе координат свободный солитон распространяется направо ("быстрый" солитон), если $v < c$, и налево, если $(v > c)$. С физической точки зрения наиболее интересным является резонансный случай, когда скорости солитона и внешнего поля почти одинаковы. Как известно в линейной теории, даже слабые возмущения при резонансе способны приводить к значительным эффектам, поэтому ограничимся рассмотрением слабого внешнего поля, пропорционального малому параметру ϵ. Такая ситуация типична для применения асимптотических методов и будем рассматривать волновое поле, близкое к солитону, однако его параметры будут медленно изменяться со временем. Аналитически солитон будет описываться выражением

$$u \,=\, a\,(T)\,\mathrm{sech}[\,a\,(T)\,\Phi\,], \qquad \Phi \,=\, x \,-\, \Psi\,(T),$$
$$\Psi\,(T) \,=\, x_0 \,+\, \tfrac{1}{\epsilon} \int q(T)dT, \tag{5}$$

в котором функции a и q должны быть найдены из взаимодействия с внешним полем. Здесь мы формально ввели малый параметр ϵ и медленное время $T = \epsilon\, t$ (после вычислений положим опять $\epsilon = 1$). Решение уравнения (3) будем искать в виде ряда

$$u\,(\Phi, T) \,=\, u_0 \,+\, \epsilon\, u_1 \,+\, \epsilon^2\, u_2 \,+\, \ldots,$$
$$q\,(t) \,=\, q_0 \,+ \epsilon\, q_1 \,+\, \epsilon^2\, q_2 \,+\, \ldots, \tag{6}$$

а также заменим f в уравнении (3) на ϵf. В первом порядке теории возмущений получим, что u_0 и q_0 описываются выражением (5) с

$$_0 \,=\, c - v \,+\, a, \tag{7}$$

но зависимости параметров солитона от медленного времени остаются неизвестными в этом приближении.

В следующих порядках теории возмущений мы получаем неоднородные линейные уравнения для поправок к солитонному решению, и в правые части этих уравнений будут входить производные от солитона по медленному времени. Из условий существования ограниченных решений неоднородных уравнений такие производные и будут определены. Техника получения соответствующих эволюционных уравнений в настоящее время хорошо известна, в частности для вынужденного уравнения Кортевега - де Вриза она описана в работах [16–18]. Поэтому мы сразу приведем основные уравнения, тем более, что они имеют весьма наглядный смысл уравнения энергетического баланса и кинематического условия:

$$\frac{da}{dT} \,=\, a \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}(a\,\Phi)\, \frac{\partial f}{\partial \Phi}(\Phi \,+\, \Psi)\, d\Phi, \tag{8a}$$

$$\frac{d\Psi}{dT} \,=\, c - V(T) \,+\, a^2. \tag{8b}$$

В частном случае широкого (относительно ширины солитона) внешнего возмущения солитон может рассматриваться в качестве дельта- функции, и система (8) становится дифференциальной:

$$\frac{da}{dt} \,=\, \pi\, \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{9a}$$

$$\frac{dx}{dt} \,=\, c - V\,(t) \,+\, a^2, \tag{9b}$$

где мы перешли к более естественным обозначениям времени и положения солитона относительно возмущения. В результате получаем нелинейную динамическую систему второго порядка, описывающую изменение амплитуды и положение солитона.

2. ДИНАМИКА СОЛИТОНА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИМСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассмотрим здесь простой случай постоянной скорости внешнего возмущения. В этом случае система (9) является автономной, допускающей полное интегрирование на фазовой плоскости. Пусть, внешнее воздействие представляет собой одиночный горб ($f > 0$) или яму ($f < 0$). Тогда система (9) имеет только одно состояние равновесия в центре внешнего возмущения и амплитуда резонансного солитона находится в явном виде:

$$a_0 = \sqrt{V - c}. \tag{10}$$

Такой солитон существует, если внешнее возмущение является “сверхзвуковым “, когда $V > c$. Оно устойчиво, если возмущение представляет собой горб, и неустойчиво, если возмущение представляет собой яму. Во втором случае солитон стремится убежать от внешнего поля на периферию, и их взаимодействие прекращается через какое-то время. В первом случае солитон захватывается движущимся возмущением и он будет распространяться вместе с ним, колеблясь около его центра. Все интегральные кривые на фазовой плоскости находятся в явном виде:

$$f(x) = (c - V)a + \frac{a^2}{3} + \mathrm{const}. \qquad (11).$$

Фазовая плоскость системы (9) для возмущения в форме

$$f(x) = b \exp\left(-\frac{x^2}{L^2}\right), \tag{12}$$

представлена на рис. 1 и 2 для $b > 0$. Координата x обезразмерена на L, амплитуда a на $(\pi b)^{1/3}$, тогда различные фазовые портреты характеризуются одним параметром

$$\Delta = \frac{c - V}{(\pi b)^{2/3}}. \tag{13}$$

Если возмущение дозвуковое, то, как уже указывалось, состояние равновесия отсутствует и все траектории являются пролетными (рис. 1 для $\Delta = 4$).

Выделяется гомоклиническая траектория (показана жирной линией)

$$\exp(-x^2) = a^3 + \Delta a, \qquad (14)$$

разделяющая большие солитоны, обгоняюшие возмущение и слабо взаимодействующие с ним, и мало-амплитудные солитоны, которые рождаются в тылу возмущения, обгоняют внешнее поле, а

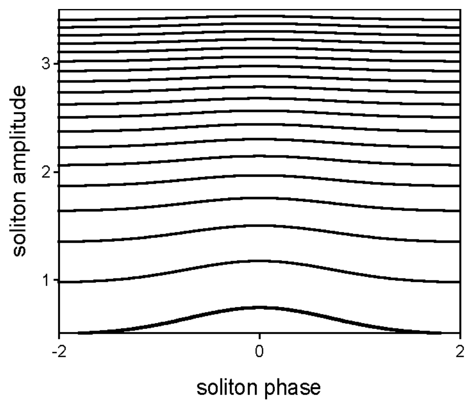

Рис. 1. Фазовый портрет взаимодействия солитона с движущимся дозвуковым возмущением ($b > 0$)

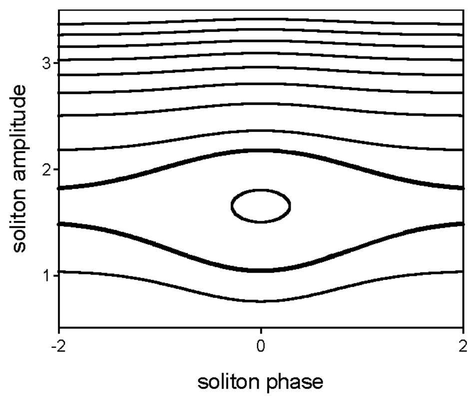

Рис. 2. Фазовый портрет взаимодействия солитона с движущимся сверхзвуковым возмущением ($b > 0$)

затем исчезают. Надо учитывать, однако, что в окрестности нулевой амплитуды асимптотический метод не работает, поскольку ширина солитона неограниченно возрастает и он не успевает медленно изменяться. В случае сверхзвуковых внешних полей появляется область захвата солитонов (рис. 2 для $\Delta = -4$), где траектории становятся замкнутыми (состояние равновесия - центр). Малоамплитудные солитоны в силу большой разности скоростей отстают от внешнег поля, являясь пролетными. Аналогично солитоны большой амплитуды обгоняют внешнее поле, являясь также пролетными. Сепаратрисы, разделяющие пролетные солитоны от захваченных, представлены на рис. 2 жирными линиями. При малых $|\Delta|$ область захвата смещается к оси $a = 0$ и нижняя сепаратриса разрывается, каждая ее половина начинается на этой оси. В результате возможна генерация и исчезновение солитонов в окрестности максимума

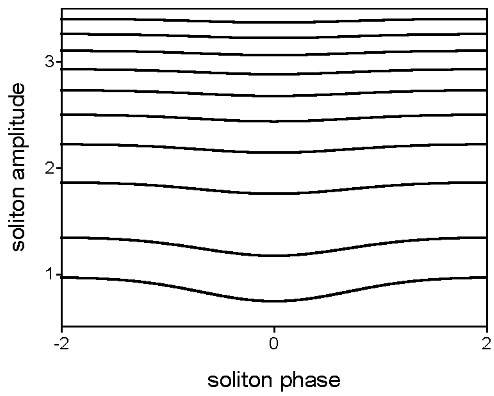

Рис. 3. Фазовый портрет взаимодействия солитона с движущимся дозвуковым возмущением ($b < 0$)

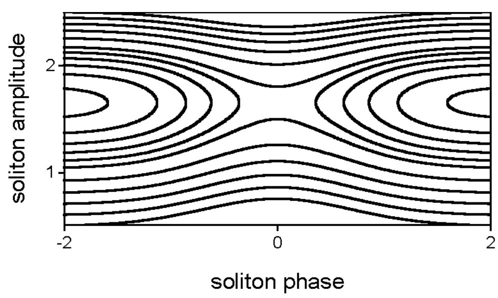

Рис. 4. Фазовый портрет взаимодействия солитона с движущимся сверхзвуковым возмущением ($b < 0$)

ма внешнего поля. Мы не приводим здесь соответствующего рисунка, поскольку в окрестности малых амплитуд асимптотическая теория перестает работать.

Если внешнее возмущение представляет собой яму $b < 0$, то оно не может удержать солитоны в своей окрестности, и они пролетают мимо возмущения либо отражаются от него (рис. 3 и 4 соответственно для $\Delta = 4$ и $\Delta = -4$).

Качественно, процесс взаимодействия солитонов с внешним полем в рамках модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза таков же, как в рамках обычного уравнения Кортевега - де Вриза, однако количественные характеристики являются различными. Особенно важно отметить, что в модифицированном уравнении Кортевега - де Вриза солитоны могут иметь любую полярность (результат взаимодействия определяется только скоростью солитона, которая не зависит от полярности). В результате, солитоны могут проскакивать ось $a = 0$ и положительные солитоны трансформироваться в отрицательные, этот процесс, однако, не может быть корректно описан в рамках асимптотической процедуры.

3. ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ, ДВИЖУЩИХСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

В случае переменной скорости распространения внешних возмущений, система (9) уже не является автономной и, по-существу, переменная скорость движения играет роль внешней силы, воздействующей на динамическую систему второго порядка. К сожалению, в отличие от “обычного“ уравнения Кортевега - де Вриза [17], здесь не удается найти точных аналитических решений системы (9). Однако ряд приближенных решений можно построить и для этого случая. В частности, если возмущение представляет собой сверхзвуковой горб, то он способен захватить солитоны в свою окрестность (см. предыдущий раздел). Однако если скорость горба содержит также переменную синусоидальную компоненту, то мы приходим к задаче воздействия периодической силы на нелинейный осциллятор. Ответ очевиден для этой задачи: в случае резонанса (по переменной компоненте скорости) возможна раскачка колебаний и солитон будет выброшен из зоны захвата. Таким образом, осцилляторная компонента скорости движения внешнего поля играет деструктивную роль, разрушая “физический“ резонанс между внешним полем и солитоном. Количественно скорость внешнего воздействия должна меняться по следующему закону:

$$V(t) = V_0 + V_1 \sin \omega t, \tag{15}$$

где

$$\omega = \frac{\sqrt{4\pi b a_0}}{L}. \tag{16}$$

Важно отметить также, что при некоторых условиях на параметры внешнего поля можно ожидать стохастического поведения решений системы (9). В этом случае регулярное внешнее воздействие может вызвать стохастическую динамику солитона. Соответствующий анализ, однако, требует применения численных методов.

Другой пример возникает для солитонов в ускоряющихся внешних полях. Так, непосредственной подстановкой можно убедиться, что

$$a(t) = pt, \quad V(t) = c + p^2 t^2, \tag{17}$$

где

$$p = \pi \partial f \partial x, \tag{18}$$

представляет собой точное решение системы (9). Оно имеет простой физический смысл: в ускоряющемся (замедляющемся) внешнем поле солитон, чтобы быть захваченным, должен также быть ускоряющимся (замедляющимся). Исследование устойчивости такого солитона пока еще не сделано.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хотя мы описали в введении только гидродинамические аспекты, связанные с возбуждением нелинейных волн движущимися источниками, необходимо сказать, что модифицированное уравнение Кортевега - де Вриза имеет гораздо более широкую область применения. В частности, это уравнение получено также для волн на поверхности проводящей жидкости в электрическом поле [4], волн в размерно - квантовых пленках [3], упругих волн в твердом теле [2]. Разнообразные физические приложения делают актуальным исследование процессов генерации нелинейных волн внешними источниками. Здесь мы описали только простейшие ситуации, связанные с динамикой солитонов во внешних полях. Особенно интересная динамика может ожидаться в случае нестационарных полей (см. предыдуший раздел). В последнее время разрабатываются общие методы изучения авторезонансных явлений при возбуждении нелинейных волн [10, 11], их применение к вынужденной версии модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза еще предстоит сделать.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов ИНТАС (99-1068) и РФФИ (99-05-65576).

1. *Гримшоу Р., Пелиновский Е.Н.* Взаимодействие уединенных поверхностных и внутренних волн с движущимся возмущением // Доклады РАН.– 1995.– т. 344, N. 3.– С. 394 - 396.
2. *Павлов Л.С.* Квазиплоские волны в двумерных упругих системах // Физические технологии в индустрии.– Нижний Новгород.– 1998.– С. 18 - 21.
3. *Пелиновский Е.Н., Соколов В.В.* К нелинейной теории распространения электромагнитных волн в размерно - квантовых пленках // Изв. ВУЗов Радиофизика.– 1976.– т. 19, N 4.– С. 536 -542.
4. *Перельман Т.Л., Фридман А.Х., Эльяшевич М.М.* Модифицированное уравнение Кортевега - де Вриза в электродинамике // ЖЭТФ.– 1974.– т. 66.– С. 316 - 321.
5. *Слюняев А.В., Пелиновский Е.Н.* Динамика солитонов большой амплитуды // ЖЭТФ.– 1999.– т. 116, N 1.– С. 318 - 335.
6. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Ламб К., Гримшоу Р., Холловэй П.* Эффекты кубической нелинейности при распространении интенсивных внутренних волн // Доклады РАН.– 1999.– т. 364, N 6.– С. 824 - 827.
7. *Akylas T.R.* On excitation of long nonlinear water waves by moving pressure distribution // J.Fluid Mech..– 1984.– v. 141.– P. 455 – 466.
8. Clarke S., Grimshaw R., Miller P., Pelinovsky E., Talipova T. // On the generation of solitons and breathers in the modified Korteweg - de Vries equation.– Chaos.– 2000.– P. v. 10, N 2.383 - 392
9. *Cole S.L.* Transient waves produced by flow past a bump // Wave Motion.– 1985.– v. 7.– P. 579 – 587.
10. *Friedland L.* Autoresonant solutions of the nonlinear Schrodinger equation // Phys. Rev.E.– 1998.– v. 58, N 3.– P. 3865 – 3875.
11. *Friedland L.* Control of Kirchhoff vortices by a resonant strain // Phys. Review E.– 1999.– v. 59, N 4.– P. 4106 – 4111.
12. *Grimshaw R.* Resonant forcing of barotropic coastally trapped waves // J.Phys. Oceanogr..– 1987.– v. 17.– P. 53 – 65.
13. *Grimshaw R.* Resonant flow of a rotating fluid past an obstacle: the general case // Stud. Appl.Maths.– 1990.– v. 83.– P. 249 – 269.
14. *Grimshaw R. & Smyth N.* Resonant flow of a stratified fluid over topography // J.Fluid Mech..– 1986.– v. 169.– P. 429 – 464.
15. *Grimshaw R., Zengxin Y.* Resonant generation of finite – amplitude waves by the flow of a uniformly stratified fluid over topography // J.Fluid Mech..– 1991.– v. 229.– P. 603 – 628.
16. Grimshaw R., Pelinovsky E., Tian X. // Interaction of solitary wave with an external force.– Physica D.– 1994.– P. v. 77, N 4.405 – 433
17. Grimshaw R., Pelinovsky E., Sakov P. // Interaction of a solitary wave with an external force moving with variable speed.– Stud. Applied Mathematics.– 1996.– P. v. 97.235 – 276
18. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Bezen A.* Hysteresis phenomena in the interaction of a damped solitary wave with an external force. // Wave Motion.– 1997.– v. 26, N 3.– P. 253 – 274.
19. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* The modified Korteweg - de Vries equation in the theory of large-amplitude internal waves // Nonlinear Processes in Geophysics.– 1997.– v. 4, N 4.– P. 237 – 350.
20. Holloway R., Pelinovsky E., Talipova T. // Barnes B. A Nonlinear Model of the Internal tide transformation on the Australian North West Shelf.– J. Phys. Oceanography.– 1997.– P. v. 27, N 6.871 – 896
21. Holloway P, Pelinovsky E., Talipova T. // A Generalised Korteweg - de Vries Model of Internal Tide Transformation in the Coastal Zone.– J. Geophys. Research.– 1999.– P. v. 104, N C8.18,333 – 18,350
22. *Lee S.J., Yates G.T., Wu T.Y.* Experiments and analyses of upstream – advancing solitary waves generated by moving disturbances // J.Fluid Mech..– 1989.– v. 199.– P. 569 – 593.
23. *Malomed B.A.* Interaction of a moving dipole with a soliton in the KdV equation // Physica D.– 1988.– v. 32.– P. 393 – 408.
24. Melville W.K. & Helfrich K.R. // Transcritical two – layer flow over topography.– J.Fluid Mech..– 1987.– P. v. 178.31 – 52
25. Mitsudera H. & Grimshaw R. // Resonant forcing of coastally trapped waves in a continuously stratified ocean.– Pageoph 1990.– v. 133.– P. 635 – 644.
26. Patoine A.& Warn T. // The interaction of long, quasi – stationary baroclinic waves with topography.– J. Atm. Sci..– 1982.– P. v. 39.1018 – 1025
27. Pelinovsky E., Choi H.S. // A Mathematical Model for Nonlinear Waves due to Moving Disturbances in a Basin of Variable Depth.– J. Korean Soc. Coastal and Ocean Engn..– 1993.– P. v. 5, N 3.191 – 197
28. Warn T. & Brasnett B. // The amplification and capture of atmospheric solitons by topography: a theory of the onset of regional blocking.– J.Atmos. Sci..– 1983.– P. v. 40.28 – 38
29. Wu T.Y. // Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances.– J.Fluid Mech..– 1987.– P. v. 184.75 – 99