УДК 519.68; 620.179.15; 681.3

М. В. Синьков, Я. А. Калиновский
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Исследование алгоритмов решения некоторых типов дифференциальных уравнений от гиперкомплексного переменного

Рассмотрены алгоритмы решения некоторых типов неоднородных линейных дифференциальных уравнений в коммутативных гиперкомплексных числовых системах для различных типов правых частей уравнений, а также особенности, возникающие при решении уравнений в связи с существованием делителей нуля.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, линейные дифференциальные уравнения, делители нуля.*

Постановка проблемы

Вопросы эффективного представления информации были и остаются важнейшими для моделирования и решения задач в различных отраслях науки и техники. Опыт показывает, что форма представления информации обуславливает возможные характеристики по производительности обработки данных, а также возможности по созданию эффективной процедуры моделирования. Особое место среди нетрадиционных форм представления информации занимают гиперкомплексные числовые системы [1, 2]. Эта форма представления информации глубоко связана с фундаментальными основами математики.

Для использования гиперкомплексных числовых систем при моделировании необходимы методы решения дифференциальных уравнений от гиперкомплексного переменного. Авторы обращались ранее к данной теме в работах [3–5], где рассматривались в основном методы решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений в ассоциативных гиперкомплексных системах. В данной работе исследуются алгоритмы решения неоднородных уравнений. При этом рассматриваются различные типы правых частей уравнений, а также особые случаи, связанные с тем, что в рассматриваемых коммутативных гиперкомплексных числовых системах имеются, как правило, делители нуля.

Анализ последних достижений и публикаций

Впервые дифференциальные уравнения с гиперкомплексными переменными рассматривал основатель теории гиперкомплексных чисел В.Р.Гамильтон. В работах [6, 7] исследуются дифференциальные уравнения в системе кватернионов, которые описывают движение Луны. Вообще кватернионные дифференциальные уравнения оказались очень удобным инструментом для решения задач ориентации, численным методам решения которых посвящено много исследований и, прежде всего, [8, 9]. Аналитические методы решения кватернионных линейных и нелинейных уравнений рассматриваются в работах [15, 16, 19]. Нелинейные дифференциальные уравнения определенных типов представлены в [10, 12–14, 17, 18]. В работе [20] исследуются методы решения дифференциальных уравнений первого порядка для некоммутативных ассоциативных алгебр. То большое внимание, которое уделяется исследованиям по дифференциальным уравнениям в гиперкомплексных переменных, говорит о несомненной актуальности этого вопроса.

Цель работы

Целью работы является повышение эффективности моделирования различных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями от гиперкомплексных переменных, путем создания алгоритмов их решения аналитическими методами на основе представлений нелинейных функций от гиперкомплексного переменного.

Результаты исследований

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка от гиперкомплексного переменного с постоянным коэффициентом будем называть уравнение вида

$$\dot{X} + AX = F(t), \tag{1}$$

где A — гиперкомплексное число, $F(t)$ — гиперкомплексная функция.

Покажем, что общее решение уравнения (1) есть сумма решения однородного уравнения

$$\dot{X} + AX = 0, \tag{2}$$

и какого-либо частного решения уравнения (1). Пусть $U(t)$ частное решение уравнения (1), а $V(t)$ — решение уравнения (2). Тогда

$$\dot{U} + \dot{V} + AU + AV = F(t).$$

Но $\dot{V} + AV = 0$. И так как $U(t)$ — частное решение, то последнее равенство обращается в тождество.

Учитывая, что решение уравнений вида (2) исследовалось раннее в работах [3–5], то в данном разделе будет рассмотрен только вопрос о поиске частных решений уравнения (1).

Правая часть неоднородного линейного уравнения (1) — гиперкомплексная функция, т.е. функция, которая либо имеет вид

$$F(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i\,, \tag{3}$$

либо может быть сведена к такому виду. Рассмотрим, например, эту процедуру в системе квазидвойных чисел [2]:

$$e^{at} = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_1;$$

$$f_1(t)=e^{(a_1+\frac{q}{2}a_2)t}(chka_2t-\frac{q}{2k}shka_2t);$$

$$f_2(t)=e^{(a_1+\frac{q}{2}a_2)t}\frac{1}{k}shka_2t;$$

$$a=a_1e_1+a_2e_2;$$

$$i^2=\gamma+qi;$$

$$k=\sqrt{\gamma+\frac{q^2}{4}}.$$

В том случае, когда компоненты гиперкомплексной функции представляют собой полиномы от независимой переменной, то уравнение (1) превращается в систему из n неоднородных уравнений от вещественных переменных, которая решается известными методами теории дифференциальных уравнений. Поэтому в данной работе будем рассматривать случай, когда правая часть представляет собой гиперкомплексную функцию в свернутом виде.

Рассмотрим случай, когда правая часть уравнения (1) имеет форму экспоненты

$$\dot{X}+AX=Be^{mt}, \tag{4}$$

где A, B и M — гиперкомплексные числа.

Будем искать частное решение в виде

$$X_r=Ne^{mt}.$$

Определяя производную $\dot{X}_r=NMe^{mt}$ и подставляя ее в (4), получим

$$NM+AN=B.$$

Если число $A + M$ не является делителем нуля, то

$$N = \frac{B}{A + M},$$

и частное решение имеет вид

$$X_r = \frac{B}{A + M} e^{mt}.$$

Тогда общее решение уравнения (1)

$$X = Ke^{-At} + \frac{B}{A + M} e^{mt},$$

где K — гиперкомплексная произвольная постоянная, а $A + M \neq 0$ и $A + M$ не является делитель нуля.

Рассмотрим теперь уравнения с гиперболическими функциями в правой части:

$$\begin{aligned} \dot{X} + AX &= BshCt; \\ \dot{X} + AX &= BchCt. \end{aligned} \tag{5}$$

Будем искать частное решение в виде линейной комбинации гиперсинуса и гиперкосинуса:

$$\begin{aligned} X &= R_1 shCt + R_2 chCt; \\ \dot{X} &= C(R_1 chCt + R_2 shCh). \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (6) в исходные уравнения (5), получим:

$$\begin{aligned} X_r &= \frac{AB}{A^2 - C^2} shCt - \frac{BC}{A^2 - C^2} chCt; \\ X_r &= -\frac{BC}{A^2 - C^2} shCt + \frac{AB}{A^2 - C^2} chCt \end{aligned} \tag{7}$$

соответственно для первого и второго уравнений.

Единственным условием существования решения является неравенство нулю $A^2 - C^2$, которое также не должно быть делителем нуля в той гиперкомплексной числовой системе (ГЧС), в которой задано уравнение.

Рассмотрим, наконец, случай, когда правая часть — экспоненциальный полином. Экспоненциальным полиномом называется выражение вида $F(t)e^{kt}$, где $F(t)$ — гиперкомплексный полином, т.е.

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i \ . \qquad (8)$$

Здесь, как и ранее, n — порядок ГЧС, $f_i(t)$ — полином от вещественной переменной *t*, а e_i — элементы базиса ГЧС.

Пусть (1) — неоднородное уравнение с экспоненциальным полиномом в правой части

$$\dot{X} + AX = F(t) e^{Bt} \, . \qquad (9)$$

Ввиду его линейности, учитывая (8), частное решение есть сумма частных решений уравнений вида

$$\dot{X} + AX = fi(t) e_i e^{Bt} , \ \ i = 1,2,..., n. \qquad (10)$$

Поэтому достаточно рассмотреть поиск решения уравнения именно такого вида. Так как элемент базиса ГЧС является постоянной величиной, он будет входить в решение как постоянный множитель.

В соответствии с общей теорией линейных дифференциальных уравнений имеем частное решение в виде

$$X_r = g(t) e_i e^{Bt} \, , \qquad (11)$$

где $g(t)$ — полином той же степени, что и $f(t)$.

Пусть степень $f(t)$ и $g(t)$ равна *r*:

$$fi(t) = \alpha_i t^i , \ \ i = 0,1,..., r; \ \ g(t) = \beta_i t^i ,$$

где верхний индекс у *t* является показателем степени.

$$X_r = e_i \beta_i t^i e^{Bt} \ .$$

Берем производную:

$$\frac{dX_r}{dt} = e_i e^{Bt} (i\beta_i t^{i-1} + B\beta_i t^i) \, . \qquad (12)$$

Для упрощения формы записи здесь принято, что при $i = 0$ $t^{i-1} = 0$.

Тогда подставляя (11), (12) в (10) и приравнивая коэффициенты при равных степенях *t*, получим систему:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_0(K+1) = \alpha_0; \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad .. \\ j\beta_j + \beta_{j-1}(K+1) = \alpha_j; \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad .. \\ \beta_r(K+1) = \alpha_r. \end{cases}$$

Решение этой системы определяется рекуррентными формулами.

$$\beta_r = \frac{\alpha_r}{K+1};$$
$$\beta_j = \frac{\alpha_j - (K+1)\beta_{j-1}}{j}.$$

Пусть теперь правая часть является полиномом с гиперкомплексными коэффициентами:

$$\dot{X} + AX = F(t), \tag{13}$$

где $F(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i t^i$, а B_i — гиперкомплексное число.

Ввиду линейности (13) достаточно рассмотреть случай, когда

$$F(t) = Bt^n.$$

Будем искать решение в том же виде, что и правая часть

$$X = G(t) = \sum_{i=0}^{n} G_i t^i,$$

где G_i — гиперкомплексное число.

Таким образом,

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^{n} iG_i t^{i-1}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в уравнение (13), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} iG_i t^{i-1} + A\sum_{i=0}^{n} G_i t^i = Bt^n.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях *t*, получим систему:

$$\begin{cases} G_1 + AG_0 = 0; \\ 2G_2 + AG_1 = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ jG_j + AG_{j-1} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ AG_n = B. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$G_j = -\frac{Bj!}{n!\,A^{n-j+1}},\ j = 0, 1, \dots, n.$$

Как видим, условием существования решения является неравенство нулю или одному из делителей нуля коэффициентов исходного уравнения.

Рассмотрим некоторые особые случаи. Как отмечалось ранее, при поиске частных решений дифференциальных уравнений в знаменателях коэффициентов решений могут получаться либо нули, либо делители нуля. В обоих случаях деление становится невозможным, и решения в таком виде не существуют.

Определим вид частного решения в таких случаях.

Частным решением уравнения (4) является

$$X_r = \frac{B}{A+M} e^{Mt}.$$

Пусть $M = -A$. Тогда знаменатель обращается в нуль.

Будем искать частное решение в виде:

$$\begin{aligned} X_r &= Nte^{-At}; \\ \dot{X}_r &= Ne^{-At} - NAte^{-At}. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляем (15) в (4) и делим на e^{-At}:

$$N - NAt + NAt = B;$$
$$N = B.$$

Тогда частное решение примет вид

$$X_r = Bte - At.$$

Этот вид частного решения пригоден для всех коммутативных ГЧС независимо от размерности.

Рассмотрим особый случай, когда $A+M \neq 0,$ но $A+B$ — делитель нуля, т.е. существует такое гиперкомплексное число B в той же системе, что при $B \neq 0, (A+M)B = 0.$

Представим решение в виде суммы степенного ряда

$$X_r = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n , \tag{16}$$

где α_n — гиперкомплексные коэффициенты.

Таким образом

$$\frac{dX_r}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^{n-1} . \tag{17}$$

Подставляя (17) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной *t*, получим:

$$\alpha_1 = 1 - A\alpha_0;$$

$$\alpha_2 = \frac{B}{2!} - \frac{M}{2!}(1-\alpha_0 M);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_n = \frac{B^{n-1}}{n!} - \frac{MB^{n-2}}{n!} + \frac{M^2 B^{n-3}}{n!} + \ldots + (-1)^n \frac{A^{n-1}}{n!}(1-\alpha_0 M);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Свернуть ряд (16) в общем виде не представляется возможным. Однако, если выбрана конкретная гиперкомплексная система, вид делителей нуля в которой известен, то частное решение можно построить численно.

Выводы

Проведенные исследования позволили получить алгоритмы решения неоднородных дифференциальных уравнений от гиперкомплексного переменного в различных коммутативных гиперкомплексных системах в аналитическом виде, что ведет к повышению эффективности моделирования процессов в различных областях науки и техники.

1. *Синьков М.В., Губарени Н.М.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах. — К.: Наук. думка, 1979. — 138 с.

2. *Синьков М.В., Калиновский Я.А, Роенко Н.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

3. *Калиновский Я.А.* Разработка алгоритмов решения однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка от гиперкомплексного переменного // Реєстрація, зберігання і

оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 1. — С. 22–29.

4. *Калиновский Я.А.* Алгоритм решения систем однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка от гиперкомплексного переменного, основанный на удвоении исходной гиперкомплексной числовой системы // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 3. — С. 43–48.

5. *Калиновский Я.А., Синьков М.В., Синькова Т.В.* Применение гиперкомплексных чисел для эффективного представления систем дифференциальных уравнений // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 4. — С. 32–36.

6. *Hamilton W.R.* On the application of the Calculus of Quaternions to the Theory of the Moon // Proceedings of the Royal Irish Academy. — 1847. — **3**. — P. 507.

7. *Hamilton W.R.* Additional applications of the Theory of Algebraic Quaternions // Proceedings of the Royal Irish Academy. — 1847. — **3**. — Appendix. — P. li–lx.

8. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973. — 319 с.

9. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. — М.: Наука, 1992. — 278 с.

10. *Стельмашук Н.Т.* Об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений с *H*-производными // Дифференциальные уравнения. — 1987. — № 2. — С. 357–358.

11. *Patrick Reany.* Complex Clifford Algebra and Nth-Order Linear Differential equations // Advances in Applied Clifford Algebras. — 1993. — **3**, N 2. — P. 121–127. On line: www.ajnpx.com/pdf/ math/Clifford/ CAA&LIN_DIFF.pdf.

12. *Kähler U.* On the Solution of Spatial Generalizations of Beltrami Equations // Internationales Kolloquium über Anwendungen der Informatik und Mathematik in Architektur und Bauwesen - IKM, Bauhaus — Universität Weimar. — 1997, 26.02–01.03. On line: www.uni-weimar.de/~ikm/ PROC97/ DOCS/147/INDEX.HTM .

13. *Kähler U.* Die Anwendung der Hyperkomplexen Funktionentheorie auf die Losung Partieller Differential Gleichungen, 1998. On line: www.tu-chemnitz.de/mathematik/prom_habil/promint.pdf.

14. *Kähler U.* Clifford Analysis and the Navier-Stokes Equations over Unbounded Domains // Applied Clifford Algebras. — 2001. — **11**. — S2 (Special issue «Clifford analysis»). — P. 305–318. On line: www.mat.ua.pt/uwek/publications.html.

15. *Gibbon J.D.* A Quaternionic Structure in the Three-Dimensional Euler and Ideal MHD Equations. On line: www.ma.ic.ac.uk/~jdg/quat2.pdf. 2001.

16. *Campos J., Mawhin J.* Periodic Solutions of Quaternionic-Valued Ordinary Differential Equations. — 2002. On line: www.ugr.es/~ecuadif/files/camposm3.pdf.

17. *Clyde M. Davenport.* An Analytical Solution for the Boussinesq Equation. — 2003. On line: home.usit.net/~cmdaven/boussnsq.htm

18. *Clyde M. Davenport.* The General Analytical Solution for the Burgers Equation. — 2003. On line: home.usit.net/~cmdaven/burgers.htm.

19. *Leo S.De, Ducati C.C.* Solving Simple Quaternionic Differential Equations // J. Math. Physic. — 2003. — 44. — P. 2224–2233.

20. *Erlebacher G., Sobczyk E.* First Order Linear ordinary differential Equations in associative Algebras // Electronic J. Differential Equations. — 2004. — Vol. 2004, N 1. — P. 1–18. On line: http://ejde.math.txstate.edu

Поступила в редакцию 15.03.2004