

УДК 532.59

ПРИБЛИЖЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СКВОЗЬ ТРЕЩИНОВАТЫЕ ПОРИСТЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Р. ВОЛЫНСКИЙ

Университет Бен-Гуриона в Негеле, Израиль

Получено 20.05.2000

Метод интегрального теплового баланса, развитый Гудменом, обобщается на случай задач неустановившегося течения двойной пористости, для которых имеются точные решения. Вводится интегральный метод, который дает возможность решать задачу приближенно, но довольно эффективным способом. Полученные результаты близки к найденным Стрельцовой-Адамсом после усовершенствования модели. Приведены и анализируются результаты тестовых расчетов.

Метод інтегрального теплового балансу, розвинутий Гудменом, узагальнюється на випадок задач неусталеної течії подвійної поруватості, для яких існують точні розв'язки. Вводиться інтегральний метод, який дає можливість розв'язувати задачу наближено, але досить ефективним чином. Отримані результати близькі до знайдених Стрельцовою-Адамсом після вдосконалення моделі. Наведено і аналізуються результати тестових розрахунків.

In this work the heat balance integral technique developed by Goodman (1964) [1] has been extended to the case of the transient dual-porosity flow problems in which the exact solutions are available. An integral method is introduced which enables a problem to be solved in approximate but efficient manner. The results obtained are essentially the same as that found by Streltsova-Adams (1978) [2] after elaborated calculations.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование неустановившихся подземных течений в трещиноватых пористых водоносных слоях нуждается в усовершенствованных методах нахождения члена поперечного течения между трещиноватостями и блоками матрицы. В работе [3] этот член задается в виде интеграла свертки, который выражается в дискретной форме при заданном времени t_m . Такое описание включает в себя суммирование по всему промежутку моделирования. Ошибка усечения вводится посредством сохранения только малого числа членов при суммировании. Вопрос, требующий рассмотрения, - это какое количество членов суммирования является адекватным для моделирования. В [3] установлено, что для большинства приложений [4] достаточно от пяти до десяти членов. Аналогичные модели, использующие интегралы свертки, были развиты в [5]. Для решения исходных уравнений необходимо развить эффективные численные схемы аппроксимации как дифференциальных членов, так и интеграла свертки, а также бесконечных экспоненциальных рядов в случаях моделей нестационарных течений.

Другое решение было получено в [2] из комплексных аналитических форм в области преобразования Лапласа после усовершенствованных вы-

числений на основе обратной теоремы для преобразования Лапласа.

Было показано также, что приближенный интегральный метод теплового баланса [1] может быть полезен для решения ряда задач диффузионного типа.

Цель данной работы - обобщить метод Гудмена [1] на моделирование неустановившегося течения двойной пористости. Основной результат такого обобщения состоит в предсказании члена разлом/матрица поперечного течения, который выражается просто с помощью $\delta(t)$. Величина $\delta(t)$ - это так называемая глубина проникновения пограничного слоя. Этот подход позволяет избежать применения интеграла свертки или сложных аналитических выражений в области преобразования Лапласа для описания межпористого поперечного течения. В результате была развита простая и эффективная явная численная конечно-разностная схема для решения исходных уравнений двойной пористости.

Здесь метод иллюстрируется на решении ряда тестовых задач и сравнении результатов с соответствующими решениями, полученными в [2]. Отсюда, по-видимому, следует, что приближенный метод [1] может быть полезным для решения некоторых задач неустановившегося течения двойной пористости.

1. ИСХОДНАЯ МОДЕЛЬ

Рассматриваемая физическая модель показана на рис. 1. Модель состоит из нагнетательной скважины, полностью проникающей в ограниченный резервуар с рядом идентичных равнорасположенных горизонтальных разломов, закрепленных в стратифицированном отложении.

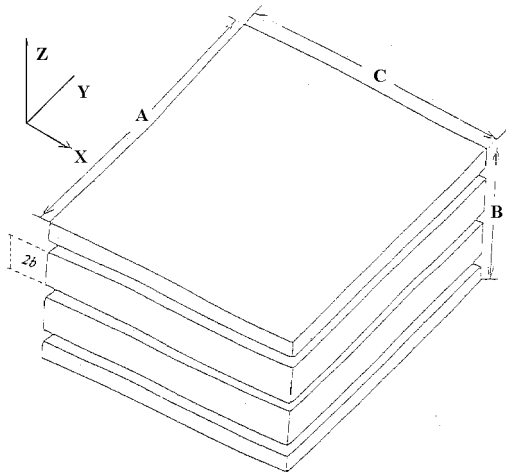


Рис. 1. Трехмерный вид схематического представления пластинообразной аппроксимации матрицы пористости: A, B, C – длина, толщина и глубина водоноса соответственно; $2b$ – толщина единичного блока

Дифференциальные уравнения, описывающие двумерное подземное течение однородной и слабо сжимаемой жидкости в ограниченном разломном пористом водоносном слое, могут быть записаны в виде

$$S_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} = T_1 + \nabla^2 H_1 + W - q, \quad (1)$$

$$S_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} = q, \quad (2)$$

Здесь приняты обозначения: H – гидравлический напор (м); T – проницаемость (м²/день); S – коэффициент накопления (безразмерный); W – объемный расход потока жидкости через единичную площадь скважины (м/день); q – член "поперечного течения" (м/день), который представляет взаимодействие жидкости в матричных блоках с жидкостью в разломе, этот член является функцией как времени, так и пространственных координат; ∇^2 – оператор Лапласа; символ "1" соответствует системе разломов, а символ "2" – системе матричных блоков.

Так как начальные условия предполагаются нулевыми, то гидравлические напоры распределены в некоторый начальный момент времени $t = 0$ во всех точках области течения. Предполагается также, что нормаль потока к граничной кривой во всех точках равна нулю.

2. РАЗВИТИЕ МОДЕЛИ

Предположим для единичного блока, что нулевое начальное условие задается для понижения уровня вод блока $h_2(z, t)$, т.е.

$$h_2(z, 0) = 0. \quad (3)$$

Лицевая сторона блока подвержена нестационарному граничному условию первого рода

$$h_2(0, t) = H_1(t). \quad (4)$$

Следуя идее Гудмена, полагаем, что в окрестности лицевой стороны блока появляется пограничный слой, толщина которого возрастает со временем. До тех пор, пока толщина пограничного слоя меньше половины толщины блока, он ведет себя как бесконечная среда, потому что граничное условие на другом фасаде блока не влияет. В переходной период времени, когда толщина пограничного слоя почти равна половине толщины блока, начинает играть роль граничное условие на другом конце. Решение задачи диффузии таким образом разбивается на две части: одна справедлива в промежутке $0 < t < t_c$ (где t_c – критическое время), а другая – для больших значений t при $t > t_c$. Метод Гудмена оперирует с феноменологической величиной $\delta(t)$, называемой расстоянием проникновения возмущений. При $z > \delta(t)$ система не подчиняется граничному условию (4). Как только

$$\delta(t) = b \quad \text{при} \quad t = t_c, \quad (5)$$

расстояние проникновения не имеет физического смысла, и на этой стадии требуется анализ, отличный от анализа Гудмена.

Мы выбираем профиль третьего порядка, чтобы применить понижение уровня вод матрицы внутри пограничного слоя в следующем виде:

$$h_2(z, t) = H_1(t) [1 - z/\delta(t)]^3, \quad \text{если} \quad z \leq \delta(t), \quad (6)$$

$$h_2(z, t) = 0, \quad \text{если} \quad z > \delta(t). \quad (7)$$

Далее в настоящей модели необходимо в формуле (6) подобрать $\delta(t)$ для случая зависящей от времени функции $H_1(t)$.

Это может быть сделано на основе интеграла баланса энергии [1], записанного в следующем виде:

$$S_2 = \frac{\partial h_2(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = K_2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta(t)} h_2(z, t) dz. \quad (8)$$

Подставляя $h_2(z, t)$, заданное уравнением (6), в правую часть уравнения (8), получаем:

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta(t)} h_2(z, t) dz = H - 1(t)\delta(t)/4. \quad (9)$$

Следовательно,

$$K_2 \frac{3H_1(t)}{\delta} = S_2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[H_1(t) \frac{\delta}{4} \right]. \quad (10)$$

Умножая уравнение (10) на $H_1(t)$, получаем

$$12 [H_1(t)]^2 = \delta H_1(t) \frac{\partial}{\partial D_2 t} [\delta H_1(t)], \quad (11)$$

где $D_2 = K_2/S_2$ - коэффициент диффузии матричного блока.

Теперь имеем:

$$12 [H_1(t)]^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial D_2 t} [\delta H_1(t)]^2 \quad (12)$$

Интегрируя уравнение (12) по временной переменной t и принимая во внимание, что при $t = 0$, $\delta(t) = 0$, получаем:

$$\delta^2 H_1^2(t) = 24 \int_0^t H_1^2(\tau) D_2 d\tau, \quad (13)$$

Последнее выражение может быть преобразовано к виду

$$\delta(t) = \left[\frac{24D_2}{H_1^2(t)} \int_0^t H_1^2(\tau) d\tau \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Следовательно, для случая нестационарного граничного условия первого рода расстояние проникновения возмущений задается уравнением (14), которое содержит интеграл, зависящий от всех наборов нестационарного граничного входа для периода времени $(0, t)$. Проводя необходимые вычисления, можем записать выражение, которое задает среднее значение понижения уровня вод матрицы в виде:

$$H_2(t) = f \frac{H_1(t)}{b} \left[\frac{4D_2}{H_1^2(t)} \int_0^t H_1^2(\tau) d\tau \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Отметим, что уравнение (15) содержит несвертывающийся интеграл, зависящий от всех значений $H_1(\tau)$ при $0 < \tau < t$.

Параметр $f = 0.612$ в уравнении (15) является множителем формы, связанным с принятым пограничным профилем слоя третьего порядка. Для малых времен (т.е. до момента, когда пограничный слой проходит к центру блока) член поперечного течения $q(t)$ может быть записан в виде:

$$q = S_2 \frac{dH_2}{dt} \quad \text{при } t < t_e. \quad (16)$$

Здесь $H_2(t)$ задается уравнением (15) с известным зависящим от времени понижением уровня разлома $H_1(t)$ и заданным выше множителем формы $f = 0.612$.

Для больших времен (т.е. после момента, когда граничный слой уже прошел центр блока) мы предполагаем применимость квази-стационарной формулы поперечного течения, записанной в виде (Циммерман и др., 1993):

$$q = \frac{\pi^2 D_2 (H_1 - H_2)}{4b^2} \quad \text{при } t > t_e. \quad (17)$$

Таким образом завершается формулировка новой модели.

3. ОЦЕНКА МОДЕЛИ

Рассмотрим модель неустановившегося течения двойной пористости и одной проницаемости, описанную выше разрешающими уравнениями (1), (2) и начальными и граничными условиями (3) - (4). Мы прим

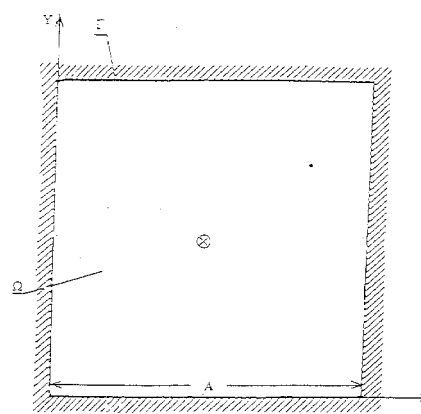


Рис. 2. Схематическое описание задачи течения (плоский вид): Γ - непротекательная граница водоноса; Ω - поверхность, ограниченная границей Γ ; \otimes - впадинная скважина; \cdot - наблюдаемая скважина

течения q , определенный для малых времен уравнениями (15) и (16) и для больших времен - уравнением (17). Была развита численная конечно-разностная схема для решения указанных выше уравнений при наложенных начальных и граничных условиях. Метод использует явную формулу,

Табл. 1. Параметры процесса, используемые при компьютерном моделировании

ПАРАМЕТР	ЗНАЧЕНИЕ
Размеры водоносного слоя, A	5100 м
Расход потока скважины, Q	2000 м ³ /день
Проницаемость разлома, T_1	300 м ² /день
Наполнение разлома, S_t	0.002
Проницаемость матричных блоков, T_2	0.06 м ² /день
Наполнение матричных блоков, S_2	0.02
Приращение времени, Δt	0.001 день
Полуширина матричных блоков, b	1 м
Строчки и столбцы пространственной сетки, Δx и Δy	100 м

в которой переменные временного уровня $(n + 1)$ вычисляются в терминах переменных временного уровня n . Схема задачи течения представлена на рис.2. Область резервуара есть квадрат размером $A \times A$. Скважина расположена в центре квадрата и вода подается с расходом Q , м³/день. Значения различных параметров, используемых при численном анализе, приведены ниже в табл. 1.

Результаты численного моделирования представлены на рис. 3 – 15. Каждый пример представляет полулогарифмическое изображение безразмерного понижения уровня вод разлома H_{1d} в зависимости от безразмерного времени t_d и характеризуется двумя безразмерными параметрами:

$$\eta = S_2/S_1 \quad \text{и} \quad r_d = r/L, \quad (18)$$

где r – расстояние между наблюдаемой и нагнетательной скважинами; L – модельная характеристическая длина, задаваемая формулой

$$L = b\sqrt{T_2/T_1}. \quad (19)$$

Были проведены две серии вычислений: первая для $\eta = 10$ и $r/L = 0.05; 0.1; 0.3; 0.5; 1.0; 2.0; 3.0; 5.0$, и вторая для $\eta = 100$ и $r/L = 0.05; 0.1; 0.3; 0.5; 1.0; 2.0; 3.0; 5.0$. На этих графиках показаны также решения для ранних и поздних времен для соответствующей однородной среды и решения, проведенные в [2] (таблица 6, с.293).

При рассмотрении этих графиков становится ясно, что для рассматриваемых случаев результаты, полученные с помощью приближенного интегрального метода, близки к результатам, полученным с помощью усовершенствованной точной

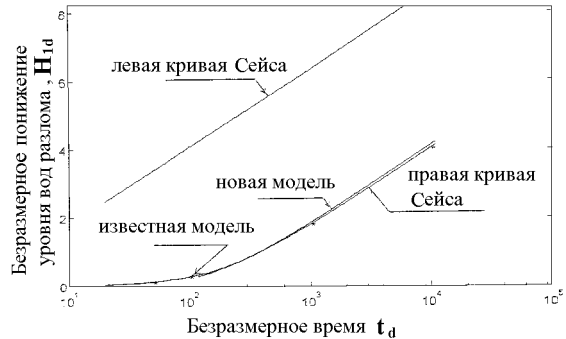


Рис. 3. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 100$ и $r_d = 3.0$

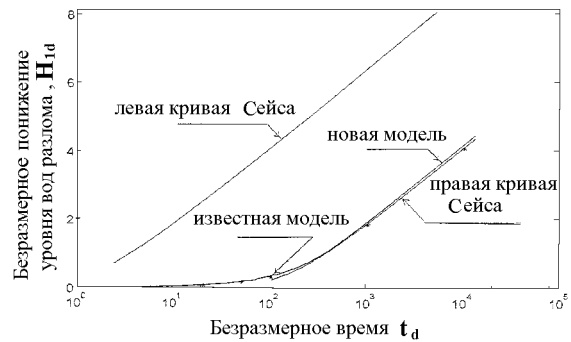


Рис. 4. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 100$ и $r_d = 2.0$

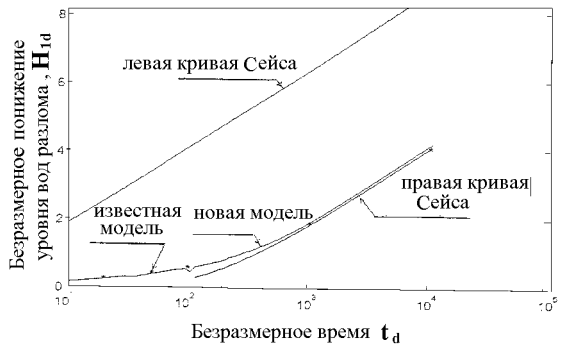


Рис. 5. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 100$ и $r_d = 1.0$

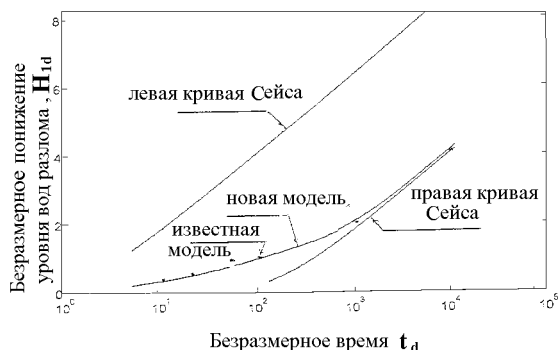


Рис. 6. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 100$ и $r_d = 0.5$

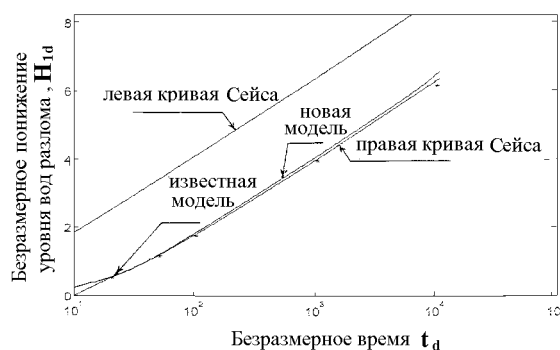


Рис. 9. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 10$ и $r_d = 5.0$

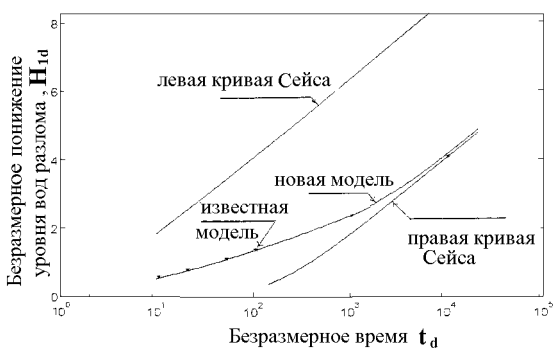


Рис. 7. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 100$ и $r_d = 0.3$

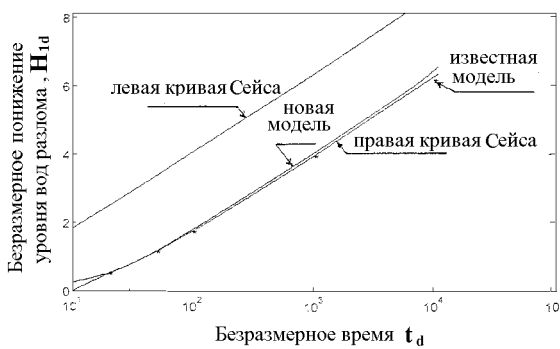


Рис. 10. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 10$ и $r_d = 3.0$

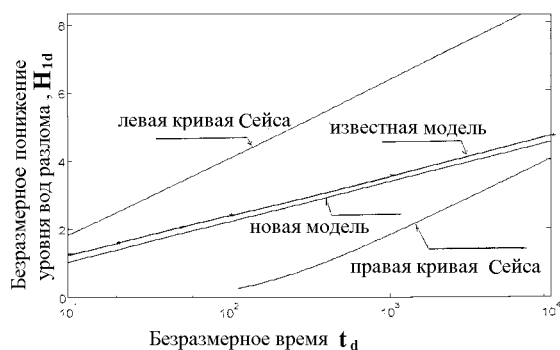


Рис. 8. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 100$ и $r_d = 0.1$

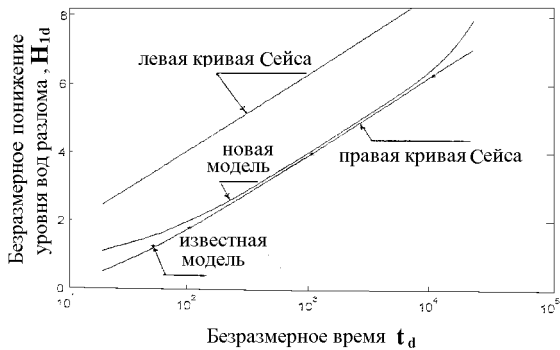


Рис. 11. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 10$ и $r_d = 1.0$

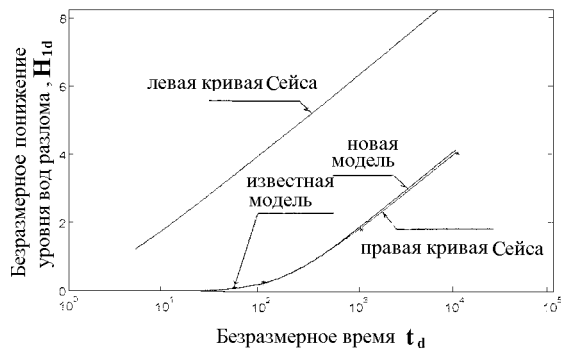


Рис. 12. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 100$ и $r_d = 5.0$

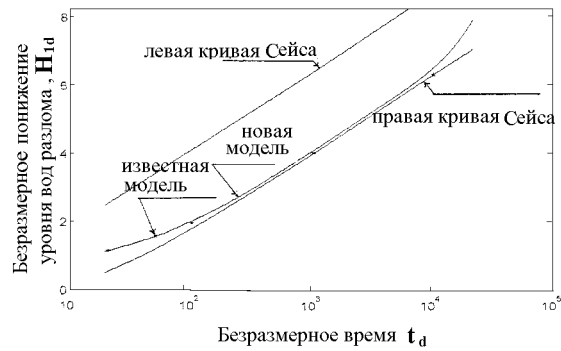


Рис. 13. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 10$ и $r_d = 0.5$

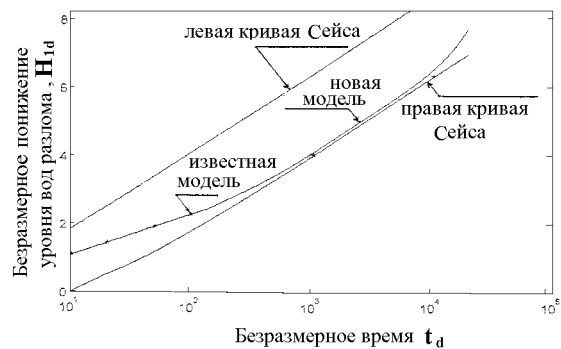


Рис. 14. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 10$ и $r_d = 0.3$

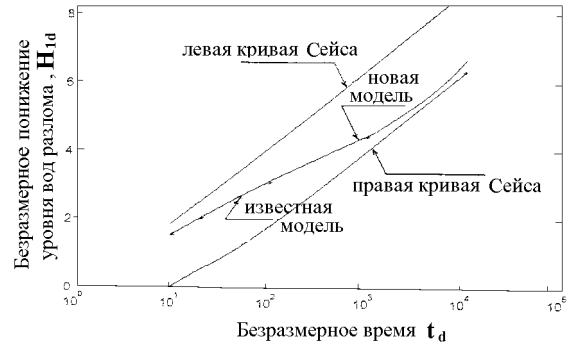


Рис. 15. Сравнение результатов представленной модели с численно-аналитическим решением Стрельцовой-Адамс при $\eta = 10$ и $r_d = 0.1$

процедуры. Во многих случаях две кривые совершенно неразличимы в большом временном интервале. Наиболее важный результат этой модели состоит в предсказании члена поперечного течения q , который является важным с физической точки зрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье развито простое, но близкое к реальным условиям явления сложного течения с двойной пористостью. Точность предсказания поведения течения с двойной пористостью и простота вычислений свидетельствуют о применимости представленной модели для поддержки более усложненного компьютерного обеспечения проблемы подземных вод.

1. Goodman T.R. Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer, in *Advances in Heat Transfer*//1964.– V.1. – P. 51-122.
2. Streltsova-Adams T.D. Well hydraulics in heterogeneous aquifer formations // *Adv.Hydrosci.*– 1978.– 11.– P. 357-423.
3. Bibby R. Mass Transport of Solutes in Dual-Porosity Media // *Water Res.Res.*– 1981.– V.17, N.4.– P. 1075-1081.
4. Glover Kent C. A Dual-Porosity Model for Simulating Solute Transport in Oil Shale//US Geological Survey. *Water Resources Investigations Report.* – 1987. – P. 86-4047.
5. Huyakorn P.S., Lester B.H., Faust C.R. Finite Element Techniques for Modeling Groundwater Flow in Fractured Aquifers // *Water Res. Res.*– 1983.– V.19, N 4.– P. 1019-1035.