УДК 004.942

Я. А. Калиновский, Т. В. Синькова, М. О. Муратова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Изоморфизм коммутативных гиперкомплексных числовых систем и представления экспоненциальных функций в них

Рассмотрена возможность применения представлений экспоненциальных функций для исследования изоморфизма гиперкомплексных числовых систем.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, экспонента, базис.*

Введение

Исследование изоморфизма коммутативных гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) имеет большое значение как в теоретическом плане для изучения множественности ГЧС, так и в прикладном — для построения математических моделей различных процессов в науке и технике.

Как показали исследования [1], при построении математических моделей необходимо использовать ГЧС с сильнозаполненными таблицами умножения, а само функционирование модели целесообразно организовать в изоморфных им ГЧС со слабозаполненными таблицами.

С другой стороны, при изучении множественности ГЧС часто возникает вопрос: «Изоморфны ли две заданные ГЧС?». Формально эта задача имеет следующий вид.

Пусть заданы две канонические ГЧС размерности n с базисами $e=(e_1,...,e_n)$ и $f=(f_1,...,f_n)$ соответственно $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$.

Их таблицы умножения:

$$e_i \cdot e_j = e_k, \quad i,j=1,...,n\,, \quad k \in \overline{1,...,n} \cup e_k = 0\,;$$
$$f_i \cdot f_j = f_k, \quad i,j=1,...,n\,, \quad k \in \overline{1,...,n} \cup f_k = 0\,.$$

Оператор изоморфизма — матрица $L=\left(l_{ij}\right)_{i,j=1,...,n}$: $e_i=\sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j$.

Тогда условие изоморфизма заданных систем $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ сводится к существованию нетривиального вещественного решения системы квадратичных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j \cdot \sum_{j=1}^{n} l_{sj} f_j = \sum_{j=1}^{n} l_{kj} f_j \bigcup 0, \quad i,s = 1,...,n, \quad k \in \overline{1,...,n} \tag{1}$$

при условии

$$\det(L) = \det\left(l_{ij}\right)_{i,\,j=1,...,n} \neq 0. \tag{2}$$

Эта квадратичная система относительно n^2 переменных состоит из $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$ уравнений. Решение таких систем вызывает значительные затруднения даже при использовании таких мощных систем аналитических вычислений как Maple, Mathematica и др. При использовании системы Maple успешно решаются системы уравнений для $n = 3$. Уже для $n = 4$ время решения увеличивается до многих часов, что совершенно недопустимо при решении задачи перечисления ГЧС, где необходимо решать большое количество квадратичных систем.

Ввиду вышесказанного большую актуальность имеют исследования в направлении разработки таких методов установления изоморфизма между ГЧС, которые не требуют решения квадратичных систем. Или хотя бы значительно уменьшают количество таких систем.

Как показали наши исследования значительного прогресса в этом направлении можно добиться путем применения представлений экспоненциальных функций в ГЧС.

Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим, прежде всего, метод, позволяющий в общем случае построить представление экспоненты от гиперкомплексного переменного. Этот метод разработан авторами и назван методом построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений [1].

Будем в дальнейшем обозначать гиперкомплексные числа большими латинскими буквами:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i, \tag{3}$$

а вектор-столбцы, составленные из компонентов гиперкомплексных чисел, — большими латинскими буквами с чертой:

$$\overline{X} = (x_1,...,x_n)^T, \ \overline{M} = (m_1,...,m_n)^T. \quad (4)$$

Тогда основные положения вышеназванного метода состоят в следующем.

Представление экспоненты в системе $\Gamma(e,n)$ от числа $M \in \Gamma(e,n)$, которое будем обозначать $Exp(M)$, имеет своими компонентами компоненты частного решения гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{X} = MX \quad (5)$$

при начальном условии

$$Exp(0) = \varepsilon, \quad (6)$$

где ε — единичный элемент системы $\Gamma(e,n)$.

Для построения решения гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения (5) его необходимо представить в векторно-матричной форме. При этом

$$\dot{\overline{X}} = (\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)^T, \quad (7)$$

а вектор-столбец $\overline{MX}$, полученный из гиперкомплексного числа MX, можно представить в виде матричного произведения некоторой матрицы M размерами $n \times n$, элементы которой есть линейные комбинации компонентов гиперкомплексного числа M, на вектор-столбец $\overline{X}$:

$$\overline{MX} = \mathrm{M}\overline{X}. \quad (8)$$

Тогда гиперкомплексное уравнение (5) превратится в систему из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется ассоциированной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\overline{X}} = \mathrm{M}\overline{X}. \quad (9)$$

Далее необходимо найти характеристические числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ матрицы M, т.е. решить характеристическое уравнение

$$\det(\mathrm{M} - \lambda E) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, характеристические числа (корни этого уравнения $\lambda_1,...,\lambda_n$) будут функциями от компонентов числа $\overline{M}$.

После этого нужно построить общее решение, зависящее от n^2 произвольных постоянных, из которых $n^2 - n$ линейно зависимы от n свободных переменных. Для получения этих линейных зависимостей необходимо решить систему линейных уравнений от этих произвольных постоянных [1], после чего можно получить общие решения (9), зависящие от n произвольных постоянных и компонентов числа $\overline{M}$ — $\overline{X}(C_1,...,C_n,m_1,...,m_n)$. Значения произвольных постоянных устанавливаются с помощью начального условия (6). Компоненты вектор-столбца решения $\overline{X}$ и будут компонентами экспоненты от гиперкомплексного числа M :

$$Exp(M) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i e_i \,. \tag{10}$$

Нормальная форма представления экспоненты

В общем случае множество корней $\lambda_1,...,\lambda_n$ характеристического уравнения имеет n корней и может состоять из следующих подмножеств.

1. Подмножество однократных вещественных корней $\lambda_i \in R$.

В представлении экспоненты ему соответствует слагаемое вида

$$x_i = \overline{x}_i \cdot e_i = C_i e^{\lambda_i} e_i \,.$$

2. Подмножество сопряженных пар комплексных корней $\lambda_{i,}\lambda_{i+1} = \overline{\lambda}_i \in C$.

Обычно при решении систем линейных дифференциальных уравнений для пары комплексно сопряженных корней частное решение берется в виде:

$$x = e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}(C_1 \cos(\mathrm{Im}(\lambda)t) + C_2 \sin(\mathrm{Im}(\lambda)t)) \,.$$

В данной работе для записи решения не будет применяться формула Эйлера, так же как и представление вещественной экспоненты через гиперболические функции

$$e^{\varphi} = ch\varphi + sh\varphi \,,$$

так как это значительно усложняет структуру формулы представления и затрудняет ее анализ. Вместо этого для пары комплексно-сопряженных корней компоненты представления записываются в виде двух слагаемых:

$$x_i = \overline{x}_i \cdot e_i = C_i e^{\lambda_i} e_i \,, \;\; x_{i+1} = \overline{x}_{i+1} \cdot e_{i+1} = \overline{C}_i e^{\overline{\lambda}_i} e_{i+1} \,,$$

но произвольные константы здесь уже не вещественные, а комплексные: $C_i \in C$.

3. Подмножество вещественных кратных корней.

Пусть кратность одного из наборов вещественных кратных корней равна s :

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = ...\lambda_{i+s} \,.$$

Тогда, как следует из теории линейных дифференциальных уравнений, этой совокупности корней будут соответствовать s компонентов общего решения вида:

$$x_{i+j} = \overline{x}_{i+j} e_{i+j} = (P_0^j + P_1^j + \ldots + P_s^j) e^{\lambda_{i+j}} e_{i+j}, \; j = 1,\ldots,s,$$

где P_k^j — полином k-й степени от переменных $m_1,\ldots,m_n$. Вид этих полиномов определяется из определяющего уравнения ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений.

4. Подмножество кратных пар комплексно-сопряженных корней.

Пусть кратность одного из наборов кратных пар комплексно-сопряженных корней равна s. Тогда всего в этом наборе будет $2s$ корней:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+3} = \ldots = \lambda_{i+2s-1}, \; \lambda_{i+2} = \ldots = \lambda_{i+2s} = \overline{\lambda}_{i+1},$$

и этой совокупности корней будут соответствовать $2s$ компонентов общего решения вида:

$$x_{i+j} = \overline{x}_{i+j} e_{i+j} = (P_0^j + P_1^j + \ldots + P_s^j) e^{\lambda_{i+j}} e_{i+j},$$
$$x_{i+j+1} = \overline{x}_{i+j+1} e_{i+j+1} = (\overline{P}_0^j + \overline{P}_1^j + \ldots + \overline{P}_s^j) e^{\overline{\lambda}_{i+j}} e_{i+j+1}, \; j = 1,3,\ldots,2s-1.$$

Здесь уже будут полиномы с комплексными коэффициентами.

Таким образом, представление экспоненты будет представлять собой сумму n слагаемых, каждое из которых — одночлен, у которого в первых двух случаях три сомножителя: вещественная или комплексная произвольная постоянная, экспонента от вещественного или комплексного характеристического корня и базисный элемент. В третьем и четвертом случаях — четыре сомножителя. К трем предыдущим сомножителям добавляется полином $(s-1)$-й степени с вещественными или комплексными перемненными. Такую форму представления экспоненты будем называть ***нормальной формой представления***.

Построение представлений экспонент в прямых суммах

Пусть задана гиперкомплексная числовая система $\Gamma(e,n)$, которая является прямой суммой k числовых систем Γ_i:

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{k} \Gamma_i, \tag{12}$$

причем, если размерность гиперкомплексной числовой системы Γ_i обозначить d_i, то выполняется соотношение:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = n.$$

Тогда гиперкомплексное число $M \in \Gamma$, можно представить в виде суммы k слагаемых

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i = \sum_{m=1}^{k} m^{(i)}$$

в соответствии со схемой:

$$\begin{aligned} m = {} & \underbrace{m_1 e_1 + \ldots + m_{d_1} e_{d_1}}_{m^{(1)} \in \Gamma_1} + \underbrace{m_{d_1+1} e_{d_1+1} + \ldots + m_{d_1+d_2} e_{d_1+d_2}}_{m^{(2)} \in \Gamma_2} + \ldots + \\ & + \underbrace{m_{\sum_{i=1}^{s-1} d_i + 1} e_{\sum_{i=1}^{s-1} d_i + 1} + \ldots + m_{\sum_{i=1}^{s} d_i} e_{\sum_{i=1}^{s} d_i}}_{m^{(s)} \in \Gamma_s} + \ldots + \underbrace{m_{\sum_{i=1}^{k-1} d_i + 1} e_{\sum_{i=1}^{k-1} d_i + 1} + \ldots + m_n e_n}_{m^{(k)} \in \Gamma_k} . \end{aligned} \qquad (13)$$

Так как произведение двух базисных элементов, которые входят в разные слагаемые $m^{(i)}$ представления гиперкомплексного числа (13), равно нулю, то все нелинейные операции над этими гиперкомплексными числами сводятся к таким нелинейным действиям отдельно с каждыми слагаемыми в своих гиперкомплексных числовых системах. А это означает, в частности, такое правило возведения числа в целую степень:

$$m^r = (\sum_{i=1}^{k} m_i e_i)^r = \sum_{m=1}^{k} (m^{(i)})^r ,$$

и поэтому формула определения экспоненты преобразуется так:

$$Exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = \sum_{i=1}^{m} (E_i + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(m^{(i)})^s}{s!}) \qquad (14)$$

или:

$$Exp(M) = \sum_{i=1}^{k} Exp(m^{(i)}) . \qquad (15)$$

Таким образом, можно сформулировать такое правило: ***представление экспоненты от гиперкомплексного числа, которое принадлежит прямой сумме гиперкомплексных числовых систем, равно сумме представлений экспонент от слагаемых этого числа, которые принадлежат всем компонентам прямой суммы.*** При этом нумерация компонентов слагаемых и соответствующих базисных элементов должна соответствовать схеме (13).

Действие оператора изоморфизма на представление экспоненты

Изоморфизм двух ГЧС означает существование такого линейного преобразования базисов, детерминант которого не равен нулю, что для операций сложения и умножения образ результата выполнения этих операций равен результату выполнения операции над операндами. Поэтому любое выражение с конечным числом гиперкомплексных операций преобразуется этим же линейным преобразованием.

Представление экспоненты через степенной ряд содержит бесконечное число операций. Однако и в этом случае, как будет показано ниже, изоморфное преобразование представления экспоненты от числа в одной ГЧС приведет к представлению экспоненты от образа этого числа в другой ГЧС.

Действительно, пусть даны две изоморфные ГЧС $\Gamma_1(e,n) \cong \Gamma_2(f,n)$ и линейное изоморфное преобразование L:

$$\Gamma_1(e,n) \overset{L}{\cong} \Gamma_2(f,n), \tag{16}$$

$$L: e_k = \sum_{j=1}^{n} l_{kj} f_j, \quad k = 1,...,n. \tag{17}$$

Посмотрим, во что превратится число $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \Gamma_1(e,n)$ при переходе к системе $\Gamma_2(f,n)$ с помощью изоморфизма L:

$$\begin{gathered} X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \Leftrightarrow x_1(l_{11} f_1 + l_{12} f_2 + ... + l_{1n} f_n) + \\ + x_2(l_{21} f_1 + l_{22} f_2 + ... + l_{2n} f_n) + ... + x_n(l_{n1} f_1 + l_{n2} f_2 + ... + l_{nn} f_n) = \\ = (x_1 l_{11} + x_2 l_{21} + ... + x_n l_{n1}) f_1 + (x_1 l_{12} + x_2 l_{22} + ... + x_n l_{2n}) f_2 + \\ + ... + (x_1 l_{1n} + x_2 l_{2n} + ... + x_n l_{nn}) f_n = y_1 f_1 + ... + y_n f_n \in \Gamma_2(f,n), \end{gathered} \tag{18}$$

где

$$y_i = x_1 l_{1i} + x_2 l_{2i} + ... + x_n l_{ni}. \tag{19}$$

Тогда

$$\overline{Y} = L^T \overline{X}, \tag{20}$$

т.е. компоненты гиперкомплексного числа $Y \in \Gamma_2(f,n)$ (вектор-столбец $\overline{Y}$) получаются умножением слева вектор-столбца $\overline{X}$ на транспонированную матрицу оператора изоморфного преобразования L^T.

Значит, если к экспоненте от гиперкомплексного числа X в ГЧС $\Gamma(e,n)$ применить линейное преобразование изоморфизма L, то получится экспонента от гиперкомплексного числа $Y \in \Gamma_2(f,n)$, являющегося образом числа X:

$$Exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \overset{L}{\Leftrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^k}{k!} = Exp(Y) \in \Gamma_2(f,n). \tag{21}$$

Соответственно, подвергая изоморфному преобразование экспоненту в одной ГЧС, можно получить экспоненту в изоморфной ГЧС от чисел-образов. То же самое можно сказать и о представлениях экспонент, поскольку их построение по степенному ряду даст единственное представление.

Сформулируем главный результат: ***если есть две изоморфные системы (16) и их изоморфизм (17), то изоморфное преобразование представления экспоненты в одной из ГЧС есть представление экспоненты в другой ГЧС***.

Набор корней характеристического уравнения и изоморфизм ГЧС

Рассмотрим случай, когда гиперкомплексная числовая система $\Gamma_1(e,n)$ является прямой суммой k числовых систем Γ_{1i}:

$$\Gamma_1 = \bigoplus_{i=1}^{k} \Gamma_{1i}\,. \tag{22}$$

Как было показано выше, нормальная форма представления ее экспоненты состоит из нормальных форм экспонент каждой из входящих подсистем. То есть число слагаемых равно числу корней характеристического уравнения, которое равно, в свою очередь, размерности всей ГЧС. Каждое слагаемое определяется, прежде всего, одним из корней характеристического уравнения.

Перейдем линейным преобразованием базиса e от системы $\Gamma_1(e,n)$ к изоморфной ей системе $\Gamma_2(f,n)$. Рассмотрим, как изменятся при этом корни характеристического уравнения, входящие в слагаемые экспоненты системы $\Gamma_1(e,n)$. Так как эти корни являются функциями от компонентов числа $\overline{M}$, то они будут меняться по (18), т.е. умножением слева вектор-столбца $\overline{M}$ на транспонированную матрицу оператора изоморфного преобразования L^T. Значит, корни характеристического уравнения преобразуются линейно. А это означает, что их тип не меняется: разные вещественные корни переходят в разные вещественные, разные комплексные в разные комплексные, одинаковые корни — в одинаковые, вещественные не могут преобразоваться в комплексные и наоборот. Действительно, уравнение (11) можно представить в виде

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) = 0\,, \tag{23}$$

где λ_i, $i = 1,...,n$ — корни характеристического уравнения. Поскольку они зависят от компонентов $\overline{M}$, то линейное преобразование их не меняет типа. А это означает, что нормальная форма экспоненты системы $\Gamma_2(f,n)$ имеет такую же структуру, что и экспонента в системе $\Gamma_1(e,n)$.

Если базис системы $\Gamma_1(e,n)$ преобразовать другим линейным преобразованием, то получится система $\Gamma_3(g,n)$, изоморфная $\Gamma_1(e,n)$:

$$\Gamma_3(g,n) \cong \Gamma_1(e,n)\,,$$

и, ввиду транзитивности отношения изоморфизма, получаем:

$$\Gamma_3(g,n) \cong \Gamma_2(f,n).$$

Таким образом, преобразуя всевозможными невырожденными линейными преобразованиями какой-либо базис, которому соответствует фиксированный набор корней характеристического уравнения, можно получить весь класс изоморфизмов. То есть данному классу изоморфизмов будет соответствовать один и только один набор корней характеристического уравнения.

К сожалению, обратное утверждение неверно — одному и тому же набору корней могут соответствовать различные неизоморфные ГЧС. Это может произойти в том случае, когда в составе корней характеристического уравнения есть кратные вещественные или (и) комплексные корни кратности, большей 2. Корням такой кратности соответствуют несколько классов изоморфизмов неразложимых ГЧС, а кратности 2 соответствует только один класс изоморфизмов системы дуальных чисел D с таблицей умножения:

D	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	0

Кратности 3 будут соответствовать 2 класса изоморфизмов. Таблицы умножения представителей классов приведены ниже.

Γ_{31}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

Γ_{32}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	0
e_3	e_3	0	0

В обоих ГЧС характеристические уравнения будут иметь трехкратные корни $\lambda_{1,2,3} = m_1$.

Кратности 4 будут соответствовать 6 классов изоморфизмов. Таблицы умножения представителей классов приведены ниже.

Γ_{41}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	e_4	$-e_3$	0	0

Γ_{42}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0

Γ_{43}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0

Γ_{44}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	e_4	0
e_4	e_4	0	0	0

Γ_{45}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	$-e_4$	0
e_4	e_4	0	0	0

Γ_{46}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	e_4	0
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	e_4	0	0	0

В ГЧС Γ_{41} характеристическое уравнение имеет двукратную пару комплексно-сопряженных корней: $\lambda_{1,2} = m_1 \pm im_2$, $\lambda_{3,4} = m_1 \pm im_2$. Остальные ГЧС имеют вещественные четырехкратные корни $\lambda_{1,2,3,4} = m_1$. Поэтому, судя по характеристическим корням, всегда можно утверждать, что система Γ_{41} не изоморфна ни одной из остальных систем и обратно. Но об изоморфизме в совокупности систем $\Gamma_{42}, \Gamma_{43}, \Gamma_{44}, \Gamma_{45}, \Gamma_{46}$ только по характеристическим корням ничего сказать нельзя. Просто при использовании других, более громоздких методов, было установлено, что в этой совокупности нет хотя бы одной пары изоморфных систем.

В заключениии этого раздела остановимся на случае, когда кратность характеристических корней рассматриваемой ГЧС равна ее размерности. В этом случае ГЧС неизоморфна никакой прямой сумме ГЧС низших размерностей, ибо в противном случае она бы имела нормальную форму представления экспоненты совершенно другой структуры. Если имеется еще одна ГЧС с такими же свойствами, то судить об их изоморфизме только по виду наборов характеристических корней нельзя. Для решения этого вопроса необходимы дальнейшие исследования.

Пример

Рассмотрим пару ГЧС: бикомплексную систему $C \oplus C(e,4)$ и систему квадриплексных чисел $K(f,4)$. Их таблицы умножения такие:

$C \oplus C$:

$C \oplus C$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	e_2	$-e_1$	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4
e_4	0	0	e_4	$-e_3$

K:

K	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	$-f_3$
f_3	f_3	f_4	$-f_1$	$-f_2$
f_4	f_4	$-f_3$	$-f_2$	f_1

(24)

Будем считать, что оператор изоморфизма имеет самый общий вид:

$$L: \begin{cases} e_1 = x_{11}f_1 + x_{12}f_2 + x_{13}f_3 + x_{14}f_4, \\ e_2 = x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3 + x_{24}f_4, \\ e_3 = x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3 + x_{34}f_4, \\ e_3 = x_{41}f_1 + x_{42}f_2 + x_{43}f_3 + x_{44}f_4. \end{cases} \tag{25}$$

Так как единичные элементы этих систем соответственно $\varepsilon_{C\oplus C} = e_1 + e_3$, $\varepsilon_K = f_1$, то первое уравнение системы (25) можно было бы взять

$$e_1 + e_3 = f_1, \tag{26}$$

что несколько бы упростило задачу. Однако для демонстрации универсальности метода не будем использовать эту упрощающую предварительную информацию.

Для решения задачи традиционным методом необходимо составить систему (1), которая в данном случае будет состоять из 24-х квадратичных уравнений [1]:

$$\begin{array}{ll}
x_{21}^2 - x_{22}^2 = -1, & \\
2x_{21}x_{22} = 0, & x_{21}x_{31} - x_{22}x_{32} = x_{41}, \\
x_{23}^2 - x_{24}^2 = -1, & x_{22}x_{31} + x_{21}x_{32} = x_{42}, \\
2x_{23}x_{24} = 0, & x_{23}x_{33} - x_{24}x_{34} = x_{43}, \\
x_{31}^2 - x_{32}^2 = -1, & x_{23}x_{34} + x_{24}x_{33} = x_{44}, \\
2x_{31}x_{32} = 0, & x_{21}x_{41} - x_{22}x_{42} = -x_{31}, \\
x_{33}^2 - x_{34}^2 = -1, & x_{23}x_{43} - x_{24}x_{44} = -x_{33}, \\
2x_{33}x_{34} = 0, & x_{23}x_{44} + x_{24}x_{43} = -x_{34}, \\
x_{41}^2 - x_{42}^2 = 1, & x_{31}x_{41} - x_{32}x_{42} = -x_{21}, \\
2\alpha_{41}\alpha_{42} = 0, & x_{32}x_{41} + x_{31}x_{42} = -x_{22}, \\
x_{43}^2 - x_{44}^2 = 1, & x_{33}x_{43} - x_{32}x_{44} = -x_{23}, \\
2x_{43}x_{44} = 0, & x_{33}x_{44} + x_{34}x_{43} = -x_{24}.
\end{array} \tag{27}$$

При этом следует отметить, что учтена зависимость между единичными элементами (26). В противном случае количество уравнений в системе (27) увеличилось бы до 40. Как видим, уравнения квадратичной системы (27) имеют непростую структуру, а при решении возникает большая комбинаторность. Как показывает расчет, она имеет 8 решений, удовлетворяющих (2). Поэтому можно сделать вывод, что рассматриваемые системы $C \oplus C(e,4)$ и $K(f,4)$ изоморфны.

Приведем одно из невырожденных решений системы (27):

$$\begin{gathered}
x_{11} = 1,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 1,\ x_{14} = 0,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = -1,\ x_{23} = 0,\ x_{24} = 1, \\
x_{31} = 0,\ x_{32} = -1,\ x_{33} = 0,\ x_{34} = -1,\ x_{41} = -1,\ x_{42} = 0,\ x_{43} = 1,\ x_{44} = 0.
\end{gathered} \tag{28}$$

Оператор изоморфизма примет вид:

$$\begin{cases}
f_1 = e_1 + e_3, \\
f_2 = -e_2 + e_4, \\
f_3 = -e_2 - e_4, \\
f_4 = -e_1 + e_3.
\end{cases} \tag{29}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_4, \\ e_2 = -\frac{1}{2} f_2 - \frac{1}{2} f_3, \\ e_3 = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_4, \\ e_4 = \frac{1}{2} f_2 - \frac{1}{2} f_3. \end{cases} \tag{30}$$

Решим эту же задачу с помощью представлений экспонент. Пусть

$$M = \sum_{j=1}^{4} m_j e_j \in C \oplus C, \; N = \sum_{j=1}^{4} n_j f_j \in K.$$

Представления экспонент имеют следующий вид [1]:

$$Exp(M) = e^{m_1}\left(\cos m_2 \cdot e_1 + \sin m_2 \cdot e_2\right) + e^{m_3}\left(\cos m_4 \cdot e_3 + \sin m_4 \cdot e_4\right), \tag{31}$$

$$\begin{aligned} Exp(N) = (&\frac{1}{2} e^{(n_1 - n_4)} \cos(n_2 + n_3) + \frac{1}{2} e^{(n_1 + n_4)} \cos(-n_2 + n_3)) f_1 + \\ +(&\frac{1}{2} e^{(n_1 - n_4)} \sin(n_2 + n_3) - \frac{1}{2} e^{(n_1 + n_4)} \sin(-n_2 + n_3)) f_2 + \\ +(&\frac{1}{2} e^{(n_1 - n_4)} \sin(n_2 + n_3) + \frac{1}{2} e^{(n_1 + n_4)} \sin(-n_2 + n_3)) f_3 + \\ +(-&\frac{1}{2} e^{(n_1 - n_4)} \cos(n_2 + n_3) + \frac{1}{2} e^{(n_1 + n_4)} \cos(-n_2 + n_3)) f_4. \end{aligned} \tag{32}$$

Переведем представления (31) и (32) в нормальную форму, для чего вместо тригонометрических функций нужно подставить их выражения через экспоненты с мнимыми показателями

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \;\; \sin\alpha = -\frac{1}{2} i (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

и сделать перегруппировку слагаемых. В результате получатся одинаковые выражения, но с разными константами и характеристическими корнями:

$$Exp(K) = C_1 e^{\lambda_1} + \overline{C_1} e^{\overline{\lambda_1}} + C_2 e^{\lambda_2} + \overline{C_2} e^{\overline{\lambda_2}}, \tag{33}$$

где для системы $C \oplus C(e,4)$:

$$K = N,$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2)\,,\ C_2 = \frac{1}{2}(e_3 - ie_4)\,,\ \lambda_1 = \mu_1 = m_1 + im_2\,,\ \lambda_2 = \mu_2 = m_3 + im_4\,, \tag{34}$$

а для системы $K(f,4)$:

$$\begin{gathered} K = M\,,\ C_1 = \frac{1}{4}(f_1 - if_2 - if_3 - f_4)\,,\ C_2 = \frac{1}{4}(f_1 + if_2 - if_3 + f_4)\,, \\ \lambda_1 = \nu_1 = m_1 - m_4 + i(m_3 + m_2)\,,\ \lambda_2 = \nu_2 = m_1 + m_4 + i(m_3 - m_2)\,. \end{gathered} \tag{35}$$

Уже из того факта, что представления экспонент в обеих ГЧС имеют один тип набора корней характеристических уравнений — две различные пары комплексных корней — можно сделать вывод об изоморфизме систем $C \oplus C(e,4)$ и $K(f,4)$. И это при том, что нет необходимости решать громоздкую квадратичную систему (27).

Данный поход позволяет получить и явный вид линейного преобразования (25). Построим закон преобразования чисел при изоморфном переходе. Из соотношения

$$M = \sum_{j=1}^{4} m_j e_j \overset{L}{\Leftrightarrow} \sum_{j=1}^{4} n_j f_j = N \tag{36}$$

и (25) следует:

$$n_i = \sum_{j=1}^{4} m_j x_{ij}\,,\quad i = 1,\dots,4\,. \tag{37}$$

Искомое преобразование L должно переводить представление в системе $C \oplus C(e,4)$ в представление в $K(f,4)$:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}(e_1 - ie_2)e^{\mu_1} + \frac{1}{2}(e_1 + ie_2)e^{\overline{\mu_1}} + \frac{1}{2}(e_3 - ie_4)e^{\mu_2} + \frac{1}{2}(e_3 + ie_4)e^{\overline{\mu_2}} \overset{L}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(f_1 - if_2 - if_3 - f_4)e^{\nu_1} + \frac{1}{4}(f_1 + if_2 + if_3 - f_4)e^{\overline{\nu_1}} + \\ + \frac{1}{4}(f_1 + if_2 - if_3 + f_4)e^{\nu_2} + \frac{1}{4}(f_1 - if_2 + if_3 + f_4)e^{\overline{\nu_2}}. \end{gathered} \tag{38}$$

Подставим в левую часть преобразование (25):

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}(x_{11}f_1 + x_{12}f_2 + x_{13}f_3 + x_{14}f_4 - i(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3 + x_{24}f_4))e^{\mu_1} + \\ + \frac{1}{2}(x_{11}f_1 + x_{12}f_2 + x_{13}f_3 + x_{14}f_4 + i(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3 + x_{24}f_4))e^{\overline{\mu_1}} + \\ + \frac{1}{2}(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3 + x_{34}f_4 - i(x_{41}f_1 + x_{42}f_2 + x_{43}f_3 + x_{44}f_4))e^{\mu_2} + \end{gathered}$$

$$+\frac{1}{2}(x_{31}f_1+x_{32}f_2+x_{33}f_3+x_{34}f_4+i(x_{41}f_1+x_{42}f_2+x_{43}f_3+x_{44}f_4))e^{\overline{\mu_2}}\overset{L}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{L}{\Leftrightarrow}\frac{1}{4}(f_1-if_2-if_3-f_4)e^{\nu_1}+\frac{1}{4}(f_1+if_2+if_3-f_4)e^{\overline{\nu_1}}+ \tag{39}$$
$$+\frac{1}{4}(f_1+if_2-if_3+f_4)e^{\nu_2}+\frac{1}{4}(f_1-if_2+if_3+f_4)e^{\overline{\nu_2}}.$$

Так как соответствие (39) должно выполняться для любых значений корней μ и ν, то найти коэффициенты x_{ij} можно методом неопределенных коэффициентов относительно экспонент. Здесь можно комбинировать эти коэффициенты различными способами. При этом могут получаться преобразования различных видов, в том числе и вырожденные (не удовлетворяющие условию (2)). Вырожденные преобразования говорят о недопустимом способе комбинирования. Выберем способ комбинирования коэффициентов такой:

$$\mu_1\Leftrightarrow\nu_1,\ \overline{\mu_1}\Leftrightarrow\overline{\nu_1},\ \mu_2\Leftrightarrow\nu_2,\ \overline{\mu_2}\Leftrightarrow\overline{\nu_2}. \tag{40}$$

Это соответствие даст систему из 4-х уравнений, которые методом неопределенных коэффициентов относительно базисных элементов и мнимой единицы даст систему из 16 очень простых линейных уравнений:

$$\begin{array}{llll}
2x_{11}-2ix_{21}=1, & 2x_{12}-2ix_{22}=-i, & 2x_{13}-2ix_{23}=-i, & 2x_{14}-2ix_{24}=-1,\\
2x_{11}+2ix_{21}=1, & 2x_{12}+2ix_{22}=i, & 2x_{13}+2ix_{23}=i, & 2x_{14}+2ix_{24}=1,\\
2x_{31}-2ix_{41}=1, & 2x_{32}-2ix_{42}=i, & 2x_{33}-2ix_{43}=-i, & 2x_{34}-2ix_{44}=1,\\
2x_{31}+2ix_{41}=1, & 2x_{32}+2ix_{42}=-i, & 2x_{33}+2ix_{43}=i, & 2x_{34}+2ix44=1,
\end{array} \tag{41}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{array}{l}
x_{11}=\frac{1}{2},\ x_{12}=0,\ x_{13}=0,\ x_{14}=-\frac{1}{2},\ x_{21}=0,\ x_{22}=\frac{1}{2},\ x_{23}=\frac{1}{2},\ x_{24}=0,\\
x_{31}=\frac{1}{2},\ x_{32}=0,\ x_{33}=0,\ x_{34}=\frac{1}{2},\ x_{41}=0,\ x_{42}=-\frac{1}{2},\ x_{43}=\frac{1}{2},\ x_{44}=0,
\end{array} \tag{42}$$

а оператор изоморфизма L:

$$L:\begin{cases}
e_1=\frac{1}{2}(f_1-f_4),\\
e_2=\frac{1}{2}(f_2+f_3),\\
e_3=\frac{1}{2}(f_1+f_4),\\
e_4=\frac{1}{2}(-f_2+f_3).
\end{cases} \tag{43}$$

Преобразование (43) отличается от (30). Это объясняется тем, что оператор изоморфизма может быть не единственным. Реализация конкретного вида оператора зависит от способа комбинирования корней (40) при составлении системы (41). Во всяком случае, как легко убедиться непосредственно, оператор (43) переводит систему квадриплексных чисел $K(f,4)$ в систему бикомплексных чисел $C \oplus C(e,4)$. Так, например, $e_3e_4 = \frac{1}{4}(-f_2 + f_3 + f_3 - f_2) = \frac{1}{2}(-f_2 + f_3) = e_4$. Также легко убедиться непосредственно с помощью (37), что оператор (43) выполняет соответствие (40).

Выводы

1. Наборы корней характеристических уравнений ассоциированных систем линейных дифференциальных уравнений ГЧС могут быть использованы для решения вопроса об изоморфизме ГЧС.

2. Если наборы корней характеристических уравнений двух ГЧС равной размерности отличаются по типу друг от друга, то эти ГЧС неизоморфны.

3. Если наборы корней характеристических уравнений двух ГЧС равной размерности, содержащие только однократные вещественные и (или) пары комплексно-сопряженных корней и различные вещественные корни кратности 2, имеют одинаковую структуру, то такие ГЧС изоморфны. При этом отпадает необходимость не то, что решения системы квадратичных уравнений (27), но и даже ее составления.

4. Если наборы корней характеристических уравнений двух ГЧС равной размерности имеют одинаковые структуры, но в них содержатся корни кратности выше 2, то судить об их изоморфизме только по виду наборов характеристических корней невозможно. Поэтому необходимы дальнейшие исследования в этом направлении.

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

2. *Dieterich E.* Classification, Automorphism Groups and Categorical Structure of the Two-Dimensional Real Division Algebras / E. Dieterich // J. of Algebra and Its Applications. — 2005. — **4**. — P. 517–538.

3. *E. Darpö E., Rochdi A.* Classification of the Four-Dimensional Power-Commutative Real Division Algebras // Proc. of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. — December 2011. — Vol. 141. — Issue 06. — P. 1207–1223.

Поступила в редакцию 21.02.2012