УДК 004.942

Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Нормализованная форма представления экспоненциальной функции в коммутативных гиперкомплексных числовых системах

Рассмотрена нормализованная форма представления экспоненциальной функции в коммутативных гиперкомплексных числовых системах (ГЧС), ее структура, методы построения и возможности использования для решения задачи определения изоморфности различных ГЧС.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, экспонента, характеристическое уравнение, изоморфизм, кратные корни.*

Вступление

Экспоненциальная функция от вещественного и комплексного аргументов играет основополагающую роль как в математике в целом, так и в многочисленных приложениях. Многие зависимости между величинами, применяющиеся при математическом моделировании различных процессов и объектов, носят именно экспоненциальный характер. Решения дифференциальных уравнений и их систем также основаны на экспоненциальной функции.

В последнее время в математическом моделировании все шире используются гиперкомплексные числовые системы (ГЧС). Поэтому актуальным является вопрос о построении представлений различных нелинейностей от гиперкомплексных переменных и, в первую очередь, представлений экспоненты.

Здесь необходимо отметить, что представлением нелинейной функции называется приведение ее к гиперкомплексной функции, то есть функции $F(X)$ от гиперкомплексного аргумента $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \Gamma(e,n)$ вида

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot e_i \,, \tag{1}$$

где $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1,...,n$ — действительные функции от многих действительных аргументов.

Авторами предложен метод построения представлений экспоненциальных функций в ГЧС [1]. Однако он дает такие представления, которые не всегда удобны для решения различных задач и, прежде всего, для решения задачи определения изоморфности различных ГЧС. В данной работе рассматривается другой вид представления экспоненты, который базируется на принципе группирования по корням характеристического уравнения ГЧС и назван авторами нормализованной формой представления.

Конструктивное определение экспоненциальной функции от гиперкомплексного переменного

Один из творцов гиперкомплексных чисел В.Р. Гамильтон первым предложил конструктивное определение экспоненциальной функции от гиперкомплексного переменного. В работе «Researches respecting Quaternions: First Series» [2] он предлагает определить экспоненциальную функцию от гиперкомплексного переменного X как сумму степенного ряда

$$Exp(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}. \tag{2}$$

Со временем этот поход был обобщен на другие трансцендентные функции гиперкомплексного переменного: тригонометрические, гиперболические и другие [3–5].

Так из (3) непосредственно выводится формула Эйлера для системы комплексных чисел $C(e,2)$ с таблицей умножения

C	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$-e_1$

(3)

$$Exp(x_1e_1 + x_2e_2) = e^{x_1}(\cos x_2 \cdot e_1 + \sin x_2 \cdot e_2), \tag{4}$$

а также системы двойных чисел $W(e,2)$

W	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

(5)

$$Exp(x_1e_1 + x_2e_2) = e^{x_1}(chx_2 \cdot e_1 + shx_2 \cdot e_2) \tag{6}$$

и дуальных чисел $D(e,2)$

$$\begin{array}{|c|cc|} \hline D & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (7)$$

$$Exp(x_1e_1 + x_2e_2) = e^{x_1}(e_1 + m_2 \cdot e_2)\,. \qquad (8)$$

Для ГЧС больших размерностей и, особенно, более сложной структуры, в том числе и неканонических, вывод представлений экспоненты непосредственно из ряда (2) становится весьма затруднительным, так как заметить закономерность строения выражения при очень большом количестве слагаемых тяжело. Для преодоления этих трудностей авторами предложен оригинальный метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений [1].

Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений

Будем в дальнейшем обозначать гиперкомплексные числа большими латинскими буквами:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,;\; M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i\,, \qquad (9)$$

а вектор-столбцы, составленные из компонентов гиперкомплексных чисел, — большими латинскими буквами с чертой:

$$\overline{X} = (x_1,...,x_n)^T,\;\; \overline{M} = (m_1,...,m_n)^T. \qquad (10)$$

Тогда основные положения вышеназванного метода состоят в следующем.

Представление экспоненты в системе $\Gamma(e,n)$ от числа $M \in \Gamma(e,n)$, которое будем обозначать $Exp(M)$, есть частное решение гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{X} = MX \qquad (11)$$

при начальном условии

$$Exp(0) = \varepsilon\,, \qquad (12)$$

где ε — единичный элемент системы $\Gamma(e,n)$.

Для построения решения гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения (11) его необходимо представить в векторно-матричной форме. При этом

$$\dot{\overline{X}} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)^T, \tag{13}$$

а вектор-столбец $\overline{MX}$, полученный из гиперкомплексного числа MX, можно представить в виде матричного произведения некоторой матрицы M размерами $n \times n$, элементы которой есть линейные комбинации компонентов гиперкомплексного числа M, на вектор-столбец $\overline{X}$:

$$\overline{MX} = \mathrm{M}\overline{X}. \tag{14}$$

Тогда гиперкомплексное уравнение (11) превратится в систему из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется ассоциированной системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\overline{X}} = \mathrm{M}\overline{X}. \tag{15}$$

Далее необходимо найти характеристические числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матрицы M, то есть решить характеристическое уравнение:

$$\det(\mathrm{M} - \lambda E) = 0. \tag{16}$$

Таким образом, характеристические числа (корни этого уравнения $\lambda_1, ..., \lambda_n$) будут функциями от компонентов числа $\overline{M}$.

После этого нужно построить общее решение, зависящее от n^2 произвольных постоянных, из которых $n^2 - n$ линейно зависимы от n свободных переменных. Для получения этих линейных зависимостей необходимо решить систему линейных уравнений [1], после чего можно получить общие решения (15), зависящие от n произвольных постоянных и компонентов числа $\overline{M}$ — $\overline{X}(C_1, ..., C_n, m_1, ..., m_n)$. Значения произвольных постоянных устанавливаются с помощью начального условия (12). Компоненты вектор-столбца решения $\overline{X}$ и будут компонентами экспоненты от гиперкомплексного числа M:

$$Exp(M) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i e_i. \tag{17}$$

В работе [1] приведены представления экспонент для большого количества ГЧС. Они характеризуются значительными отличиями друг от друга как по структуре, так и по сложности. Таблицы умножения и представления экспонент некоторых из них показаны в приведенной ниже таблице.

Таблицы умножения и представления экспонент в некоторых ГЧС.

№	Обозначение	Таблица умножения	Представление экспоненты
1	$C \oplus C$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline e_1 & e_2 & 0 & 0 \\ \hline e_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_3 & e_4 \\ \hline 0 & 0 & e_4 & -e_3 \\ \hline \end{array}$	$Exp(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) =$ $= e^{m_1}\left(\cos m_2 \cdot e_1 + \sin m_2 \cdot e_2\right) +$ $+ e^{m_3}\left(\cos m_4 \cdot e_3 + \sin m_4 \cdot e_4\right)$
2	K	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ \hline e_3 & e_4 & -e_1 & -e_2 \\ \hline e_4 & -e_3 & -e_2 & e_1 \\ \hline \end{array}$	$Exp(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) =$ $= (\frac{1}{2}e^{(m_1-m_4)}\cos(m_2+m_3) +$ $+ \frac{1}{2}e^{(m_1+m_4)}\cos(-m_2+m_3))e_1 +$ $+ (\frac{1}{2}e^{(m_1-m_4)}\sin(m_2+m_3) -$ $- \frac{1}{2}e^{(m_1+m_4)}\sin(-m_2+m_3))e_2 +$ $+ (\frac{1}{2}e^{(m_1-m_4)}\sin(m_2+m_3) +$ $+ \frac{1}{2}e^{(m_1+m_4)}\sin(-m_2+m_3))e_3 +$ $+ (-\frac{1}{2}e^{(m_1-m_4)}\cos(m_2+m_3) +$ $+ \frac{1}{2}e^{(m_1+m_4)}\cos(-m_2+m_3))e_4$
3	Γ_{44}	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_2 & e_4 & 0 & 0 \\ \hline e_3 & 0 & e_4 & 0 \\ \hline e_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$Exp(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) =$ $= e^{m_1}(e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 +$ $+ (m_4 + \frac{1}{2}(m_2^2 + m_3^2))e_4)$
4	Γ_{45}	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_2 & e_4 & 0 & 0 \\ \hline e_3 & 0 & -e_4 & 0 \\ \hline e_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$Exp(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) =$ $= e^{m_1}(e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 +$ $+ (m_4 + \frac{1}{2}(m_2^2 - m_3^2))e_4)$

Как видно из этой таблицы, ГЧС могут быть изоморфными (например, системы $C \oplus C$ и K), но представления их экспонент сильно отличаются друг от друга. И, в то же время, представления их экспонент могут быть очень похожими, но сами ГЧС — не изоморфны (системы Γ_{44} и Γ_{45}).

Так как представления экспонент в таком виде слабо отражают структурные свойства ГЧС, то появляется необходимость в поиске такого вида представления экспоненты, который бы в большей мере отражал структурные характеристики ГЧС.

Нормализованная форма представления экспоненты

Анализ приведенных в таблице представлений экспонент говорит о том, что по структуре они соответствуют гиперкомплексному числу: сумма одночленов, каждый из которых состоит из базисного элемента с некоторыми множителями.

Альтернативной формой построения представления является группирование членов с одинаковыми вещественными экспонентами e^{λ_i}, где λ_i — корни характеристического уравнения. При этом множители у таких экспонент будут не только вещественными, но и гиперкомплексными, а также могут включать в себя классическую мнимую единицу i $(i^2 = -1)$. Как видно из метода построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений, изложенного в [1], именно в таком виде определяются компоненты представления экспоненты. Однако там при решении систем линейных дифференциальных уравнений для пары комплексно сопряженных корней частное решение берется в виде

$$x = e^{\mathrm{Re}(\lambda)}(C_1 \cos(\mathrm{Im}(\lambda)) + C_2 \sin(\mathrm{Im}(\lambda))). \tag{18}$$

В нормализованной форме представления вместо (18) для пары комплексно-сопряженных корней компоненты представления записываются в виде двух слагаемых:

$$x_i = \overline{x}_i \cdot e_i = C_i e^{\lambda_i} e_i\,, \quad x_{i+1} = \overline{x}_{i+1} \cdot e_{i+1} = \overline{C}_i e^{\overline{\lambda}_i} e_{i+1}\,, \tag{19}$$

но произвольные константы здесь уже не вещественные, а комплексные: $C_i \in C$. Таким образом, в представлении экспоненты будут отсутствовать тригонометрические и гиперболические функции, и ее вид унифицируется.

В общем случае множество корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения имеет n корней и может состоять из следующих подмножеств.

1. Подмножество однократных вещественных корней $\lambda_i \in R$.

В представлении экспоненты ему соответствует слагаемое вида

$$x_i = \overline{x}_i \cdot e_i = C_i e^{\lambda_i} e_i\,. \tag{20}$$

2. Подмножество сопряженных пар комплексных корней $\lambda_{i,} \lambda_{i+1} = \overline{\lambda}_i \in C$.

Для пары комплексно-сопряженных корней компоненты представления записываются в виде двух слагаемых (19).

3. Подмножество вещественных кратных корней.

Пусть кратность одного из наборов вещественных кратных корней равна s:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \ldots \lambda_{i+s} .$$

Тогда, как следует из теории линейных дифференциальных уравнений, этой совокупности корней будут соответствовать s компонентов общего решения вида

$$x_{i+j} = \overline{x}_{i+j} e_{i+j} = (P_0^j + P_1^j + \ldots + P_s^j) e^{\lambda_{i+j}} e_{i+j} , \quad j = 1, \ldots, s , \tag{21}$$

где P_k^j — полином k-й степени от переменных $m_1, \ldots, m_n$. Вид этих полиномов определяется из определяющего уравнения ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений.

4. Подмножество кратных пар комплексно-сопряженных корней.

Пусть кратность одного из наборов кратных пар комплексно-сопряженных корней равна s. Тогда всего в этом наборе будет $2s$ корней:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+3} = \ldots = \lambda_{i+2s-1} , \quad \lambda_{i+2} = \ldots = \lambda_{i+2s} = \overline{\lambda}_{i+1} .$$

Тогда этой совокупности корней будут соответствовать $2s$ компонентов общего решения вида:

$$x_{i+j} = \overline{x}_{i+j} e_{i+j} = (P_0^j + P_1^j + \ldots + P_s^j) e^{\lambda_{i+j}} e_{i+j} , \tag{22}$$

$$x_{i+j+1} = \overline{x}_{i+j+1} e_{i+j+1} = (\overline{P}_0^j + \overline{P}_1^j + \ldots + \overline{P}_s^j) e^{\overline{\lambda}_{i+j}} e_{i+j+1} , \; j = 1, 3, \ldots, 2s-1 . \tag{23}$$

Здесь уже будут полиномы с комплексными коэффициентами.

Таким образом, представление экспоненты будет представлять собой сумму n слагаемых, каждое из которых — одночлен, у которого в первых двух случаях три сомножителя: вещественная или комплексная произвольная постоянная, экспонента от вещественного или комплексного характеристического корня и базисный элемент. В третьем и четвертом случаях — четыре сомножителя. К трем предыдущим сомножителям добавляется полином $(s-1)$-й степени с вещественными или комплексными перемененными. Такую форму представления экспоненты будем называть ***нормализованной формой представления***.

Построение нормализованной формой представления осуществляется двумя способами:

1) использованием при решении дифференциального уравнения (11) при наличии комплексных корней выражений (19) и (22), (23);

2) заменой в существующей ненормализованной форме тригонометрических и гиперболических функций показательными:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \; \sin\alpha = -\frac{1}{2} i (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}), \; ch\alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}), \; sh\alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) .$$

Например, для системы комплексных чисел C известная формула Эйлера преобразуется так:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2)=e^{m_1}(\cos m_2\cdot e_1+\sin m_2\cdot e_2)=e^{m_1}(\frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})e_1-\frac{1}{2}i(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})e_2)=$$
$$=e^{m_1+im_2}\frac{e_1-ie_2}{2}+e^{m_1-im_2}\frac{e_1+ie_2}{2}=C_1e^{\lambda}+\overline{C}_1e^{\overline{\lambda}}. \qquad (24)$$

Аналогично для системы двойных чисел W :

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2)=e^{m_1}(chm_2\cdot e_1+shm_2\cdot e_2)=e^{m_1}(\frac{1}{2}(e^{m_2}+e^{-m_2})e_1+\frac{1}{2}(e^{m_2}-e^{-m_2})e_2)=$$
$$=e^{m_1+m_2}\frac{e_1+e_2}{2}+e^{m_1-im_2}\frac{e_1-e_2}{2}=C_1e^{\lambda_1}+C_2e^{\lambda_2}. \qquad (25)$$

Приведем нормализованные формы представления экспонент для некоторых ГЧС третьей и четвертой размерности.

1. Система триплексных чисел T .

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3-e_1/2)$	$-e_2$
e_3	e_e	$-e_2$	e_1

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1=m_1+m_3,\ \ \lambda_{2,3}=m_1-m_3\pm im_2.$$

Ненормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=\frac{1}{2}(e^{m_1+m_3}+e^{m_1-m_3}\cos m_2)e_1+$$
$$+e^{m_1-m_3}\sin m_2\cdot e_2+\frac{1}{2}(e^{m_1+m_3}-e^{m_1-m_3}\cos m_2)e_3.$$

Нормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=\frac{1}{2}(e_1+e_3)e^{\lambda_1}+\frac{1}{4}(e_1-e_3-2ie_2)e^{\lambda_2}+\frac{1}{4}(e_1-e_3+2ie_2)e^{\overline{\lambda}_2}=$$
$$=C_1e^{\lambda_1}+C_2e^{\lambda_2}+\overline{C}_2e^{\overline{\lambda}_2}. \qquad (26)$$

2. Система вещественно-комплексных чисел $R\oplus C$.

Корни характеристического уравнения:

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	e_3
e_3	0	e_3	$-e_1$

$$\lambda_1=m_1,\ \ \lambda_{2,3}=m_2\pm im_3.$$

Ненормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=e^{m_1}e_1+e^{m_2}\left(\cos m_3\cdot e_2+\sin m_3\cdot e_3\right).$$

Нормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=e_1e^{\lambda_1}+\frac{1}{2}(e_2-ie_3)e^{\lambda_2}+\frac{1}{4}(e_2+ie_3)e^{\overline{\lambda}_2}=$$
$$=C_1e^{\lambda_1}+C_2e^{\lambda_2}+\overline{C}_2e^{\overline{\lambda}_2}. \qquad (27)$$

3. Система квадриплексных чисел K.

K	e_1	e_2	e_3	e
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2}=m_1-m_4\pm i(m_2+m_3),$$
$$\lambda_{3,4}=m_1+m_4\pm i(-m_2+m_3).$$

Ненормализованное представление (см. таблицу).

Нормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\frac{1}{4}[(e_1-ie_2-ie_3-e_4)e^{\lambda_1}+(e_1+ie_2+ie_3-e_4)e^{\overline{\lambda}_1}+$$
$$+(e_1+ie_2-ie_3+e_4)e^{\lambda_3}+(e_1-ie_2+ie_3+e_4)e^{\overline{\lambda}_3}]=C_1e^{\lambda_1}+\overline{C}_1e^{\overline{\lambda}_1}+C_3e^{\lambda_3}+\overline{C}_3e^{\overline{\lambda}_3}. \qquad (28)$$

4. Система бикомплексных чисел $C\oplus C$.

$C\oplus C$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	e_2	$-e_1$	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4
e_4	0	0	e_4	$-e_3$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2}=m_1\pm im_2,\ \lambda_{3,4}=m_3\pm im_4.$$

Ненормализованное представление (см. таблицу).

Нормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\frac{1}{2}[(e_1-ie_2)e^{\lambda_1}+(e_1+ie_2)e^{\overline{\lambda}_1}+$$
$$+(e_3-ie_4)e^{\lambda_3}+(e_3+ie_4)e^{\overline{\lambda}_3}]=C_1e^{\lambda_1}+\overline{C}_1e^{\overline{\lambda}_1}+C_3e^{\lambda_3}+\overline{C}_3e^{\overline{\lambda}_3}. \qquad (29)$$

5. Система гиперкомплексных чисел Γ_{41}.

Γ_{41}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	e_4	$-e_3$	0	0

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2}=m_1\pm im_2$, $\lambda_{3,4}=m_1\pm im_2$ — двукратная пара комплексно-сопряженных корней.

Ненормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=e^{m_1}(\cos m_2\cdot e_1+\sin m_2\cdot e_2+$$
$$+(m_3\cos m_2-m_4\sin m_2)\cdot e_3+(m_4\cos m_2+m_3\sin m_2)\cdot e_4.$$

Нормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=e^{m_1+im_2}(e_1-ie_2+(m_3+im_4)e_3+(m_4-im_3)e_4)+$$
$$+e^{m_1-im_2}(e_1+ie_2+(m_3-im_4)e_3+(m_4+im_3)e_4)=Pe^{\lambda}+\overline{P}e^{\overline{\lambda}}. \quad (30)$$

6. Система гиперкомплексных чисел Γ_{44}.

Γ_{44}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	e_4	0
e_4	e_4	0	0	0

Корни характеристического уравнения:

$\lambda_{1,2,3,4}=m_1$ — четырехкратный вещественный корень.

Ненормализованное и нормализованное представления совпадают:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=e^{m_1}(e_1+m_2e_2+m_3e_3+(m_4+\frac{1}{2}(m_2^2+m_3^2))e_4).$$

7. Система гиперкомплексных чисел Γ_{45}.

Γ_{44}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	$-e_4$	0
e_4	e_4	0	0	0

Корни характеристического уравнения:

$\lambda_{1,2,3,4}=m_1$ — четырехкратный вещественный корень.

Ненормализованное и нормализованное представления совпадают:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=e^{m_1}(e_1+m_2e_2+m_3e_3+(m_4+\frac{1}{2}(m_2^2-m_3^2))e_4).$$

Выводы

Как видно из вышеизложенного, нормализованная форма представления экспоненты во многих случаях более полно отражает структуру ГЧС, чем ненормализованная. Так, например, ненормализованные формы представления триплексных чисел T и системы вещественно-комплексных чисел $R\oplus C$ (строки 1 и 2 соответственно таблицы) отличаются очень сильно. А нормализованные формы (26) и (27) очень похожи. То же самое можно сказать и о системах квадриплексных чисел K и бикомплексных чисел $C\oplus C$ (строки 3 и 4 соответственно таблицы и выражения (28) и (29)). Этот факт наводит на мысль об изоморфизме этих систем: $T\cong R\oplus C$ и $K\cong C\oplus C$. И они, как показано в [1], действительно изоморфны.

Однако представления экспонент в системах Γ_{44} и Γ_{45} тоже очень похожи — отличаются всего лишь одним знаком, но, как показано в [1], эти системы неизоморфны. То есть признак изоморфизма по одинаковости вида представлений является необходимым, но недостаточным. Более подробно и точно этот вопрос будет исследован в дальнейших работах авторов. Отметим только, что нормализованное представление экспоненты может позволить решить не только вопрос об изоморфности двух конкретных ГЧС, но и, в случае наличия такового, найти оператор изоморфизма без решения громоздкой системы квадратичных уравнений.

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

2. *Hamilton W.R.* Researches Respecting Quaternions: First Series / W.R. Hamilton // Transactions of the Royal Irish Academy. — 1848. — Vol. 21. — Part 1. — P. 199–296.

3. *Kähler U.* Die Anwendung der Hyperkomplexen Funktionentheorie auf Die Losung Partieller Differentialgleichungen [Электронный ресурс] / U. Kähler. — 1998. — Режим доступа: www.tuchemnitz.de/mathematik/prom_habil/promint.pdf

4. *Brackx F.* The Exponential Function of a Quaternion Variable / F. Brackx // Applicable Analysis. — 1979. — Vol. 8. — P. 265–276.

5. *Olariu S.* Complex Numbers in n Dimensions [Электронный ресурс] / S. Olariu. — 2000. — Режим доступа: www.arXiv:math/0011044

Поступила в редакцию 28.11.2011