УДК 517.938:004.9

А. Н. Катулев[1], В. И. Кожешкурт[2]
[1]Тверской государственный университет
ул. Желябова, 33, 170100 Тверь, Россия
[2]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Метод исследования структурной устойчивости нелинейных автономных динамических систем

Изложены метод, алгоритм и результаты решения практической задачи исследования структурной устойчивости в смысле Андронова и Понтрягина нелинейных автономных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Метод основан на идее исследования критических точек — бифуркаций сопряженной гамильтоновой системы без использования функций Ляпунова или потенциальных функций. Достоверность метода обоснована теоретически и подтверждена совпадением результатов вычислительного эксперимента, полученных по разработанному методу, с результатами по исследованию структурной устойчивости потенциальных автономных нелинейных систем.

Ключевые слова: *структурная устойчивость, динамическая система, бифуркация, катастрофа, обратная связь, собственное значение, функциональная матрица.*

Введение

В ряде известных работ по устойчивости нелинейных динамических систем [1–4] исследуется их структурная устойчивость.

Необходимость в этом непосредственно исходит из объективной обусловленности качественных изменений траектории движения системы при изменении ее структурных параметров или из объективной зависимости динамики системы от ее параметров, входящих в правые части описывающих систему дифференциальных уравнений.

Структурная устойчивость непосредственно связана с анализом особых — критических точек (бифуркаций и особенностей — катастроф) решений, описывающих систему дифференциальных уравнений, или с анализом влияния малых в смысле C^1-метрики изменений параметров системы на характер (гладкий, непрерывный, скачкообразный) ее перемещения из одного положения равновесия в другое, в том числе из положения равновесия, соответствующего штатному режиму функционирования динамической системы, в недопустимое — нештатное положение равновесия.

Стандартными методами исследования критических точек являются методы, основанные на функциях Ляпунова, фазовых портретах, потенциальных функциях и на разложениях силовых функций в ряд Тейлора в окрестности стационарного решения с последующим выводом потенциальной функции («обобщенной» [4]) и канонической формы катастрофы из конечного числа стандартных типов [4], и с последующим интегрированием получаемых уравнений.

Необходимо отметить, что методы, использующие потенциальные функции, применимы для градиентных динамических систем, которые составляют частный класс динамических систем, в том числе и автономных. Для построения функций Ляпунова универсального алгоритма не существует, поэтому исследование критических точек с использованием фазовых портретов на практике возможно лишь для систем второго порядка, а известная теорема Тома-Зимана теории катастроф применима только для систем, динамика которых описывается потенциалом.

Поэтому существует актуальная проблема исследования структурной устойчивости нелинейных динамических систем без применения функций Ляпунова, потенциальных функций, фазовых портретов и без замены силовых функций отрезком ряда Тейлора.

Цель статьи

Целью статьи является изложение нового метода и алгоритма увода нелинейной автономной динамической системы, описываемой нелинейным векторным обыкновенным дифференциальным уравнением или другими уравнениями, но сводимыми к названному, от бифуркаций, обусловливающих при изменении параметров системы катастрофический ее переход из заданного — штатного состояния равновесия в недопустимое — нештатное состояние равновесия.

Метод исследования структурной устойчивости

В основу метода положим тот факт, что для решения основной и сопряженной гамильтоновых систем дифференциальных уравнений невозможны одновременно асимптотически устойчивые положения равновесия и асимптотически устойчивые предельные циклы в фазовом пространстве. То есть, устойчивости одной из них однозначно соответствует неустойчивость другой.

Тогда справедлива следующая теорема: *нелинейная автономная динамическая система, описываемая нелинейным обыкновенным векторным дифференциальным уравнением*

$$\dot{x}(t) = \varphi(x(t), \mu(t)) \tag{1}$$

уводима от бифуркаций при введении обратной связи по выходу и при условии, что функциональная матрица ее линейной сопряженной гамильтоновой системы не вырождена, не положительно определена и непрерывна вместе со своими про-

изводными по совокупности фазовых координат $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ *и параметров* $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), ..., \mu_m(t))$ *основной системы.*

Доказательство.

Согласно принципу обратной связи по выходу, разомкнутую исходную нелинейную автономную динамическую систему (1) преобразуем в замкнутую.

Замкнутая система будет описываться векторным нелинейным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\ \mu(t),\ u(x(t),\ \mu(t))),$$

где $u(x(t),\ \mu(t))$ — вектор входных управляющих воздействий по обратной связи, подлежащий определению в каждый текущий момент времени на основе измерений выхода $x(t)$ и параметров системы $\mu(t)$; $x(t) \in E^n$; $\mu(t) \in E^k$; $u(x(t),\ \mu(t)) \in E^m$, $m \le n + k$; $f(x(t),\ \mu(t),\ u(x(t),\ \mu(t)))$ — непрерывная функция по совокупности своих аргументов вместе со своими производными. При такой функции при любых непрерывных или кусочно-непрерывных физически реализуемых (ограниченных) управляющих воздействиях удовлетворяются условия теоремы существования решения уравнения исходной системы, а если потребуется учет произвольно заданных начальных условий, то обеспечивается и единственность решения.

Положим

$$\mu(t) = (\mu_1(t) = x_{n+1}(t), \mu_2(t) = x_{n+2}(t), ..., \mu_m(t) = x_{n+k}(t)) \tag{2}$$

и будем рассматривать систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_j(t) = f_j(x(t), u(x(t))), \quad && j = 1, 2, ..., n, \\ &\dot{x}_l(t) = f_l(u(x(t))), && l = 1, 2, ..., k. \end{aligned} \tag{3}$$

Эта система будет управляема из любого исходного состояния, а значит и уводима от бифуркации, если она допускает целенаправленное изменение своих координат, или, иначе, если выполняются условия непрерывности функций

$$f_j(x(t), u(x(t))),\ j = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

вместе со своими производными по фазовым координатам при всех управляющих воздействиях. Таким условиям функции (4) удовлетворяют в силу существования, а при задании исходных состояний, и единственности решения исходного нелинейного уравнения, то есть в силу существования для исследуемой системы переходной функции, отличной от нуля при всех ограниченных управляющих воздействиях по обратной связи.

Для отыскания управления в зависимости от текущего выхода системы воспользуемся функцией Гамильтона

$$H(p(t), x(t), u(x(t))) = (p^T(t), f(x(t), u(x(t)))),$$

где $p^T(t)$ — вектор-строка (размера $n+k$) сопряженных координат гамильтоновой системы, определяющийся из системы

$$\dot{p}(t) = -(p^T(t), f_x'(x(t), u(x(t)))). \tag{5}$$

В векторном уравнении (5) $f_x'(x(t),\ u(x(t)))$ — функциональная $(n+k)\times(n+k)$-матрица линейной замкнутой сопряженной гамильтоновой системы, которая в силу выбора $u(x(t))$ всегда может быть приведена к не положительно определенной функциональной матрице с ненулевым непрерывным определителем Якоби и, следовательно, линейная сопряженная система будет обладать свойством управляемости.

Реализуем это свойство при следующем требовании: система должна переводиться из одного состояния в любое другое заданное состояние, в том числе из непосредственно предшествующего особому — катастрофическому, в допустимое не особое, при минимальных затратах энергии. Тогда для сопряженной системы соответствующее управляющее воздействие $u^*(x(t))$ должно определяться по выражению

$$u^*(x(t)) = \arg\max_{u(x(t))} H(p(t), x(t), u(x(t))), \tag{6}$$

а значения параметров системы — компонент вектора (2) по выражению

$$\mu^*_{n+l}(t) = x^*_{n+l}(t) = \frac{\partial H(x^*_j(t), x_{n+l}(t), u^*(x^*_j(t), x_{n+l}(t)))}{\partial x_l} = 0,\ j = \overline{1,n},\ l = \overline{1,k},$$

и при оптимальных

$$u^*(x(t)),\ x^*(t) = (x_j(t), x^*_{n+l}(t)),\ j = \overline{1,n},\ l = \overline{1,k}$$

должно выполняться равенство

$$H(p(t), x^*(t), u^*(x^*(t))) = 0.$$

Управление $u^*(x(t))$, очевидно, приведет к изменению характеристического многочлена функциональной матрицы и ее собственных значений. При этом становится возможным обеспечение непрерывного изменения собственных значений и решения гамильтоновой сопряженной системы без бифуркаций. В результате того, что функциональная матрица линейной сопряженной системы

$$(-f_{ix_j}'(x_1, x_2, \ldots, x_n)),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

представляется транспонированной с противоположным знаком относительно матрицы Якоби

$$J(f)=\left(\frac{\partial f_i(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j}\right)_{j=1,2,...,n}^{i=1,2,...,n},$$

исходной (основной) нелинейной системы уравнений, т.е. собственные значения функциональной матрицы линейной сопряженной гамильтоновой системы равны по модулю и противоположны по знаку собственным значениям матрицы Якоби замкнутой исходной нелинейной автономной динамической системы, у решения последней не будет бифуркации, что и утверждается теоремой.

Однако, вследствие того, что исследуемая система описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением, функции $f_l(u(x(t)))$, $l=1,2,...,k$, априори неизвестны, функция Гамильтона записана по существу в неявной форме. Поэтому не представляется возможным выполнить ее минимизацию в общем виде и получить аналитические выражения для $p(t)$, $u^*(x(t))$, $\mu^*(t)$ и для собственных чисел функциональной матрицы сопряженной системы. В связи с этим можно воспользоваться только численным анализом на ЭВМ с помощью систем символьной математики и формировать управляющие воздействия, непосредственно изменяя управляющие параметры конкретной исследуемой динамической системы. Таким образом, можно изменить зависящие от управляющих параметров элементы функциональной матрицы и, как следствие, ее собственные значения, так, чтобы обеспечивались выполнение равенства

$$H(p(t),x(t),\ u(x(t)))=0 \tag{7}$$

и положительность собственных значений функциональной матрицы. То есть, чтобы не выполнялись необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейной сопряженной гамильтоновой системы, или, что то же, выполнялись при этом условия асимптотической устойчивости основной системы.

Соответствующие оптимальные воздействия на параметры динамической системы могут быть найдены только прямыми методами оптимизации без вычисления производных функции Гамильтона. Для этого воспользуемся известным методом покоординатного спуска с разностной аппроксимацией градиента по изменяемым в циклическом порядке параметрам, указанным в выражении (2).

Алгоритм исследования структурной устойчивости

По изложенному методу исследование структурной устойчивости нелинейных автономных динамических систем сводится к выполнению следующей последовательности операций:

1) составить сопряженную гамильтонову систему дифференциальных уравнений

$$\dot{p}(t) = -(p^T(t), f'_x(x(t),\ u(x(t))))$$

по отношению к основной — исходной системе

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\ u(x(t)));$$

2) составить характеристическое уравнение сопряженной системы

$$(-\lambda)^m + S_1(-\lambda)^{m-1} + S_2(-\lambda)^{m-2} + \ldots + S_{m-1}(-\lambda) + S_m = 0,$$

где S_ρ, $\rho = 1, 2, \ldots, m$ — сумма главных миноров ρ-го порядка функциональной матрицы сопряженной системы $\left(-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,m} = 0$, $m = n + k$; λ — собственное значение, подлежащее вычислению;

3) исследовать зависимость собственного значения от параметров основной системы по критериям непрерывности на языке ε, δ и выявить признак возникновения катастрофы на основе анализа динамики собственного значения с установлением изменения его знака и принятия им нулевого значения в любых произвольно выбираемых точках — значениях изменяемых параметров системы;

4) проверить выполнение равенства (7);

5) реализовать, при невыполнении этого равенства, алгоритм покоординатного спуска для решения задачи (6), т.е. алгоритм поиска оптимальных значений параметров системы таких, чтобы выполнялось равенство:

$$H(p(t), x(t), u^*(x(t))) = 0;$$

6) построить из функциональных коэффициентов характеристического уравнения функциональные главные миноры Гурвица и сформировать по критерию Рауса–Гурвица необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости решения основной системы: собственные значения функциональной сопряженной системы должны быть положительными;

7) сформировать информационную модель отображения текущего состояния динамической системы, оптимальных значений ее параметров и собственных значений функциональной матрицы сопряженной гамильтоновой системы, при которых исходная нелинейная динамическая система асимптотически устойчива.

Изложенная последовательность операций составляет алгоритм метода.

Пример использования алгоритма

В нашем случае алгоритм используется для выявления критических точек решения системы нелинейных аэродинамических уравнений [4], описывающих летательный аппарат:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_j F_1^j C_j + \sum_{j=1}^{5} F_1^j x_j, \\ \dot{x}_i = \sum_j F_i^j C_j + \sum_{j=1}^{5} F_i^j x_j + F_i^{km} x_k x_m, k \neq m \neq i, i = 2,3, \\ \dot{x}_i = \sum_j F_i^j C_j + \sum_{j=1}^{5} F_i^j x_j, i = 2,3, \end{cases} \tag{8}$$

где $F_i^j = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$; C_j — управляющие параметры элеронов и рулей летательного аппарата; F_i^j, F_i^{km} — управляющие параметры летательного аппарата.

Построим для (8) сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\left[p_1 F_1^1 + p_2 (F_2^{31} + x_3 F_2^1) + p_3 (F_3^{12} x_2 + F_3^1) + p_4 F_4^1 + p_5 F_5^1 \right], \\ \dot{p}_2 = -\left[p_1 F_1^2 + p_2 F_2^2 + p_3 (F_3^{12} x_1 + F_3^2) + p_4 F_4^2 + p_5 F_5^2 \right], \\ \dot{p}_3 = -\left[p_1 F_1^3 + p_2 (F_2^{31} x_1 + F_2^3) + p_3 F_3^3 + p_4 F_4^3 + p_5 F_5^3 \right], \\ \dot{p}_4 = -\left[p_1 F_1^4 + p_2 F_2^4) + p_3 F_3^4 + p_4 F_4^4 + p_5 F_5^4 \right], \\ \dot{p}_5 = -\left[p_1 F_1^5 + p_2 F_2^5) + p_3 F_3^5 + p_4 F_4^5 + p_5 F_5^5 \right], \end{cases}$$

где $p_1 = p_1(t), p_2 = p_2(t), p_3 = p_3(t), p_4 = p_4(t), p_5 = p_5(t)$ — сопряженные координаты.

Для анализа устойчивости системы (8) необходимо исследовать корни характеристического уравнения пятой степени:

$$\begin{pmatrix} F_1^1 - \lambda & F_2^{31} + x_3 F_2^1 & F_3^{12} x_2 + F_3^1 & F_4^1 & F_5^1 \\ F_1^2 & F_2^2 - \lambda & F_3^{12} x_1 + F_3^2 & F_4^2 & F_5^2 \\ F_1^3 & F_2^{31} x_1 + F_2^3 & F_3^3 - \lambda & F_4^3 & F_5^3 \\ F_1^4 & F_2^4 & F_3^4 & F_4^4 - \lambda & F_5^4 \\ F_1^5 & F_2^4 & F_3^5 & F_4^5 & F_5^5 - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

где λ — собственное число.

Определяются также множество точек бифуркаций и стационарных точек в зависимости от каждого из управляющих параметров при фиксации всех других (при одновременном изменении всех параметров определение множества бифуркаций невозможно).

Вычислительным экспериментом установлено существование области точек бифуркации в связи с изменением управляющих параметров системы (8); такая область изображена на рис. 1 в пространстве (F_1^1, F_2^1) ее нижняя огибающая есть множество катастроф.

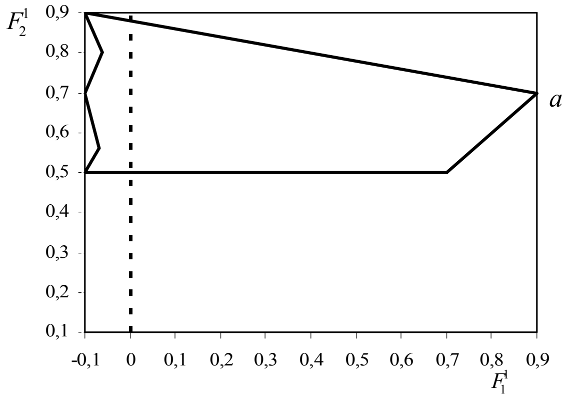

Рис. 1. Область точек бифуркации

На рис. 2 представлена функция управления u_1^1 при условии реализации обратной связи по параметру F_1^1. Такое управление компенсирует уменьшение значения параметра F_1^1, т.е. стабилизирует его значение около 0,9 и исключает выход системы в состояние катастрофы — решение системы асимптотически устойчиво, летательный аппарат остается в режиме устойчивого функционирования (в точке *a* на рис. 1).

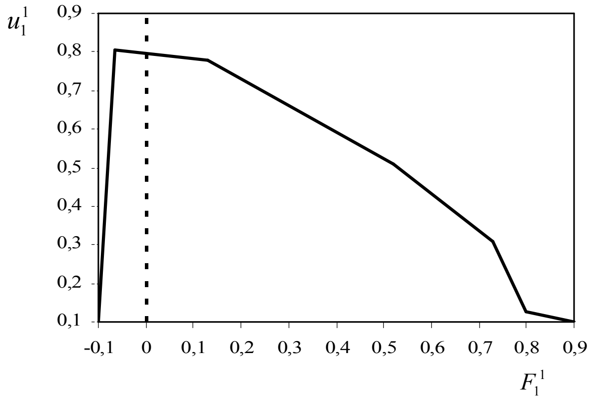

Рис. 2. Функция управления

Заметим, что полученные результаты (рис. 1) согласуются с результатами [4], где для описания состояний летательного аппарата использовалась обобщенная потенциальная функция.

Выводы

Разработанный метод:

— распространяется на исследование нелинейных динамических систем, описываемых уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными и интегральными уравнениями, сводимыми к нелинейным автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям;

— не требует преобразования правой части исходной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к виду гурвицевой;

— свободен от ассоциирования нелинейной автономной динамической системы к классу потенциальных;

— в отличие от метода исследования структурной устойчивости, основанного на теореме Тома [4], охватывает как потенциальные, так и не потенциальные нелинейные автономные динамические системы.

1. *Андронов А.А.* Большие системы / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин. — ДАН СССР, 1937. — Т. 14.

2. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения / М.В. Шамолин // Фундаментальная и прикладная математика. Центр новых информационных технологий МГУ. — Издательский дом «Открытые системы», 2008. — Т. 14, № 3. — С. 3–237.

3. *Неделько Н.С.* Использование теории катастроф к анализу поведения экономических систем / Н.С. Неделько // Вестник МГТУ. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 223–227.

4. *Gilmore R.* Catastrophe Theory for Scientists and Engineers / R. Gilmore. — A Willey-Intersclence Publication, John Wiley and Sons. — New-York-Chichester-Brislane-Toronto, 1981.

Поступила в редакцию 13.06.2011