ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2000. Том 2 (74), N 3. С. 40 – 52*

УДК 532.526

ДВА ПОДХОДА К АНАЛИЗУ КОАКСИАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ

В. Т. ГРИНЧЕНКО*, В. В. МЕЛЕШКО*
А. А. ГУРЖИЙ*, Г. Я. Ф. ХЕЙСТ А. Г. М. ЭЙСЕНГА****

* *Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина,*
** *Технологический университет, Эйндховен, Нидерланды*

Получено 15.07.2000

Сравниваются модельные представления вихревых колец: модель Дайсона с непрерывным распределением завихренности и модель вортонов с дискретным распределением завихренности, которые могут быть использованы для описания взаимодействия двух одинаковых коаксиальных вихревых колец в идеальной несжимаемой жидкости. Представление уравнений движения обеих моделей в аналогичной форме позволило провести расширенный анализ как аналогий, так и разницы между моделями: сравниваются траектории движения, импульсы и энергии системы вихревых колец в обоих случаях для периодического взаимодействия двух одинаковых коаксиальных вихревых колец в безграничной жидкости. Незначительная разница в траекториях взаимодействия вихревых структур может быть полностью объяснена теоретически из соответствующих уравнений движения моделей вихревого кольца и вортонного кольца. В работе приводится анализ и сопоставление начальных условий и параметров двух различных моделей, которые описывают одно и то же взаимодействие. Для модели вортонов получен критерий, который можно использовать для описания несимметричного взаимодействия вихревых колец с помощью дискретной модели вортонных колец.

Порівнюються модельні уявлення вихрових кілець: модель Дайсона з безперервним розподілом завихореності та модель вортонів з дискретним розподілом завихореності, які можуть бути використані для опису взаємодії двох однакових коаксіальних вихрових кілець в ідеальній нестисливій рідині. Представлення рівнянь руху обох моделей в аналогічній формі дало можливість провести розширений аналіз як аналогій, так і різниці між моделями: порівнюються траєкторії руху, імпульси та енергії системи вихрових кілець в обох випадках для періодичної взаємодії двох однакових коаксіальних вихрових кілець в безмежній рідині. Незначна різниця в траєкторіях взаємодії вихрових структур може бути повністю роз'ясненою теоретично через відповідні рівняння руху моделей вихрового кільця та вортонного кільця. В роботі наведено аналіз та співставлення початкових умов і параметрів двох різних моделей, які описують одну й ту саму взаємодію. Для моделі вортонів отримано критерій, який можна використовувати для опису несиметричної взаємодії вихрових кілець за допомогою дискретної моделі вортонних кілець.

Two models for describing vortex rings: Dyson model with a continuous vorticity distribution and vorton model with discrete votricity distribution, which both can be used to describe the coaxial interaction of two identical vortex rings, are compared. The presentation of motion equations of both models in a similar formulation makes possible an extended analysis of both the analogies and differences between the models: comparing trajectories, impulses and energies of the vortex rings system in both cases for periodical interaction of two identical vortex rings in unbounded fluid. The slightly different trajectories could be entirely explained theoretically from the respective equation of motion for vortex rings and vorton rings. The analysis of matching and comparising the initial parameters of two different models, which both describe the same interaction, is presented in this article. A possible criterion, which can be used for an application to non-coaxial interaction of vortex rings by means of discrete vorton model, was obtained.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с классической работы Гельмгольца [1], в которой впервые теоретически указана возможность периодического взаимодействия двух коаксиальных вихревых колец (так называемая "чехарда" колец), к этой задаче отмечается повышенное внимание исследователей. Эта проблема также интенсивно изучалась экспериментально [2, 3] на двух дымовых кольцах. Следует отметить и теоретические исследования, основыванные на решении и анализе уравнений Эйлера и Навье-Стокса для невязкой [4, 5] и вязкой [6–9] жидкостей. Эта задача нашла свое отражение в классических монографиях по вихревой динамике [10, 11].

Дайсон [12] предложил простую модель для описания коаксиального взаимодействия двух произвольных осесимметричных колец в идеальной жидкости. В этой модели траектории вихревых колец могут быть получены из двух инвариантов движения (импульса и энергии) без прямого численного интегрирования уравнений движения по времени. В настоящее время модель Дайсона широко используется [13–18] для изучения различных случаев регулярного и хаотического движения двух и более коаксиальных вихревых колец.

Анализ упомянутых ранее работ свидетельствует, что модель Дайсона достаточно хорошо описывает взаимодействие реальных осесимметричных вихревых структур, особенно на начальной стадии их взаимодействия. В то же время следует отметить существенный недостаток: течение жидкости должно обладать осевой симметрией.

В последнее время для качественного (а в некоторых случаях и количественного) описания и анализа взаимодействия крупномасштабных вихревых структур привлекается модель вортонов [19, 20], поле завихренности которых сконцентрировано в точке. С вычислительной точки зрения дискретизация вихревого поля системой трехмерных точечных вихрей имеет определенные преимущества, более того, вортонная модель позволяет рассматривать вихревые течения с различной пространственной конфигурацией [19 – 21].

Несмотря на существование различных подходов к описанию процесса взаимодействия осесимметричных вихревых структур, до настоящего времени остается невыясненным полностью вопрос об условиях, при которых возможен переход от моделей с распределенным полем завихренности к моделям с дискретным распределением поля завихренности при описании и анализе взаимодействия реальных крупномасштабных вихревых течений.

Известно [20], что определенным образом сориентированная система вортонов может быть применена для моделирования взаимодействия осесимметричных вихревых структур. В этом случае уравнения движения вортонов, в силу симметрии задачи, могут быть записаны в аналогичной форме уравнением движения модели Дайсона. Это так называемая "осесимметричная вортонная модель", в которой предполагается, что каждое вортонное кольцо движется в осесимметричном поле скорости, наведенном другим вортонным кольцом.

Для того, чтобы провести сравнение двух подходов к описанию осесимметричного вихревого течения, необходимо сопоставить геометрические (радиус, осевое положение) и энергетические (интенсивность) характеристики вихревого течения. Однако вортонная модель не может описать изменение толщины вихревого кольца (в поперечном сечении) при взаимодействии с другим кольцом[1], что приводит к появлению отличий в траекториях движения. Детальное сравнение обеих моделей в литературе отсутствует, каждая из моделей используется при описании конкретных вихревых течений и сравнивается с соответствующими экспериментальными данными или точными решениями [5, 6, 8, 13, 15, 21, 22].

В работе проводится сравнительный анализ обеих моделей при взаимодействии осесимметричных вихревых колец в идеальной безграничной жидкости с целью определения условий, при которых разница в описании эволюции взаимодействия вихрей будет минимальна. Другими словами, мы хотим выяснить, какие существуют ограничения, накладываемые на вортонную модель вихревых колец, для того, чтобы течение жидкости с распределенным полем завихренности (модель Дайсона) могло быть эквивалентно заменено вортонной моделью.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся основные соотношения динамики осесимметричных вихревых колец, основанные на подходе Дайсона, а в разделе 3 – вортонной модели для осесимметричного распределения системы вортонов. Сравнение обеих моделей приводится в разделе 4, а численный анализ, основанный на интегрировании уравнений движения, представлен в разделе 5. Некоторые заключительные замечания, обсуждение и выводы помещены в разделе 6.

2. МОДЕЛЬ ДАЙСОНА

Рассмотрим осесимметричное вихревое кольцо радиуса R, двигающееся в безграничной идеальной жидкости, спокойной на бесконечности. Пусть завихренность распределена равномерно внутри тонкого вихревого ядра радиуса a ($a/R \ll 1$) с интенсивностью Γ. Такое изолированное вихревое кольцо движется стационарно, без изменения размеров и формы, в соответствии с самоиндуцированной скоростью, направленной нормально к плоскости кольца. Скорость распространения вихревого кольца впервые получена Томсоном (Лорд Кельвин) [23] (см. также [10], §163):

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{1}{4}\right). \qquad (1)$$

Рассмотрим взаимодействие двух изначально одинаковых вихревых колец, движущихся вдоль общей оси симметрии. В этом случае на движение каждого вихревого кольца оказывает влияние поле скорости, наведенного со стороны другого вихревого кольца. В соответствии с таким взаимным влиянием радиусы колец либо увеличиваются, либо уменьшаются. Самоиндуцированная скорость вихревых колец не является постоянной величиной, и, следовательно, движение системы двух вихревых колец в общем случае является нестационарным.

Дайсон [12] получил уравнения движения для двух тонких осесимметричных вихревых колец в

[1] Изменение интенсивностей вортонов при их взаимодействии, заложенные в модель [19], не может в точности описать изменение поля скорости, зависящее от двух переменных (завихренность и толщина вихревой трубки), особенно в ближнем поле по отношению к радиусу кольца.

идеальной безграничной жидкости. При анализе он предполагал, что при взаимодействии ядра вихревых колец не деформируются, остаются тонкими по сравнению с их радиусами, и не пересекаются. Эти предположения выполняются только в тех случаях, когда расстояние между ядрами вихревых колец остается большим по сравнению с размерами самих ядер.

Радиусы поперечного сечения тонких круговых ядер изменяются так, что объем ядра $2\pi^2 a^2 R$ каждого вихревого кольца остается постоянной величиной. Уравнение для завихренности в осесимметричном потоке (без закрутки) может быть представлено в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z), (см. [24], §7.1):

$$\frac{D(\omega_\phi / r)}{Dt} = 0. \tag{2}$$

В соответствии с этим уравнением Дайсон [12] предположил, что распределение завихренности $\omega_\phi / r = \text{const}$ внутри ядра и $\omega_\phi / r = 0$ вне его. Более того, предполагается, что циркуляции вокруг вихревого ядра сохраняется в соответствии с теоремой Кельвина [25].

В результате уравнения движения двух вихревых колец с интенсивностями Γ_1 и Γ_2, описывающие изменение радиусов колец R_1, R_2 и их осевые положения Z_1 и Z_2, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
\dot{R}_1 &= \frac{\Gamma_2 Z_{12}}{2\pi R_1 R_{max}} \left(\mathbf{W}(k) - \frac{2 R_1 R_2 \mathbf{E}(k)}{R_{min}^2} \right), \\
\dot{R}_2 &= \frac{-\Gamma_1 Z_{12}}{2\pi R_2 R_{max}} \left(\mathbf{W}(k) - \frac{2 R_1 R_2 \mathbf{E}(k)}{R_{min}^2} \right), \\
\dot{Z}_1 &= \frac{\Gamma_1}{4\pi R_1} \left(\ln \frac{8 R_1}{a_1} - \frac{1}{4} \right) + \\
&+ \frac{\Gamma_2}{2\pi R_{max}} \left(\mathbf{W}(k) - \frac{2 R_2 (R_1 - R_2) \mathbf{E}(k)}{R_{min}^2} \right), \\
\dot{Z}_2 &= \frac{\Gamma_2}{4\pi R_2} \left(\ln \frac{8 R_2}{a_2} - \frac{1}{4} \right) + \\
&+ \frac{\Gamma_1}{2\pi R_{max}} \left(\mathbf{W}(k) - \frac{2 R_1 (R_2 - R_1) \mathbf{E}(k)}{R_{min}^2} \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{max}^2 &= Z_{12}^2 + (R_1 + R_2)^2, \quad Z_{12} = Z_1 - Z_2, \\
R_{min}^2 &= Z_{12}^2 + (R_1 - R_2)^2, \quad k^2 = \frac{4 R_1 R_2}{R_{max}^2}, \\
\mathbf{W}(k) &= \mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{E}(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Как видно из уравнений (3), движение вихревых колец определяется двумя вкладами: самоиндуцированной скоростью вихревых колец в осевом направлении (см. так же уравнение (1)) и взаимно наведенной скоростью как в радиальном, так и осевом направлении в точках, в которых расположены вихревые ядра. Поскольку уравнения движения определяются только первым порядком по отношению к a/R, взаимно наведенные компоненты скорости идентичны полю скорости, наведенному круговой вихревой нитью с нулевым поперечным сечением. Выражение для функции тока $\psi(r, z)$ имеет вид ([24], § 7.2)

$$\psi(r, z) = \frac{\Gamma}{\pi} \sqrt{Rr} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) \mathbf{K}(k) - \frac{2}{k} \mathbf{E}(k) \right], \tag{4}$$

где

$$k^2 = \frac{4Rr}{(R + r)^2 + z^2}.$$

Следовательно, взаимное влияние рассматриваемых вихревых колец можно трактовать как взаимодействие сингулярных вихревых нитей (вихревые нити с нулевым поперечным сечением).

Уравнения (3) должны выполняться совместно с уравнениями, выражающими условие постоянства объема вихревых ядер:

$$a_1^2 R_1 = \text{const}, \qquad a_2^2 R_2 = \text{const}, \tag{5}$$

которые в дальнейшем используются при описании эволюции радиусов ядер вихревых колец a_1 и a_2 во времени.

Таким образом, траектории двух вихревых колец с интенсивностями Γ_1, Γ_2 и радиусами R_1, R_2, расположенные на оси симметрии с координатами Z_1, Z_2, описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (3) совместно с уравнениями (5) – задача Коши с начальными условиями:

$$\begin{aligned}
R_1(0) = R_1^0, &\quad R_2(0) = R_2^0, \\
Z_1(0) = Z_1^0, &\quad Z_2(0) = Z_2^0, \\
a_1(0) = a_1^0, &\quad a_2(0) = a_2^0.
\end{aligned}$$

Можно показать, что система уравнений (3) имеет два независимых инварианта движения:

$$P_{z,tot} = P_1 + P_2 = \pi \Gamma_1 R_1^2 + \pi \Gamma_2 R_2^2 = \text{const}. \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
E_{tot} &= E_1 + E_2 + E_{1-2} = \\
&= \frac{\Gamma_1^2 R_1}{2} \left(\ln \frac{8 R_1}{a_1} - \frac{7}{4} \right) + \\
&+ \frac{\Gamma_2^2 R_2}{2} \left(\ln \frac{8 R_2}{a_2} - \frac{7}{4} \right) + \\
&+ \Gamma_1 \Gamma_2 \sqrt{R_1 R_2} \left[\frac{2}{k} \mathbf{W}(k) - k \mathbf{K}(k) \right] = \text{const},
\end{aligned} \tag{7}$$

которые выражают законы сохранения импульса вдоль оси симметрии и кинетической энергии поля течения вихревых колец соответственно. Общая энергия E_{tot} состоит из кинетической энергии изолированных вихревых колец E_1, E_2 и слагаемого E_{1-2}, выражающего энергию взаимодействия двух вихревых колец.

Следует отметить, что существование двух инвариантов движения вполне достаточно для того, чтобы определить фазовые траектории $R_1(Z_{12})$ и $R_2(Z_{12})$ (зависимость радиусов колец от осевого расстояния между кольцами) вихревых колец без прямого интегрирования уравнений движения (3) по времени. Этот факт открывает возможность проведения классификации различных типов взаимодействия двух коаксиальных вихревых колец [13, 14, 18]. Однако в дальнейшем будем рассматривать абсолютные траектории $R_1(Z_1)$ и $R_2(Z_2)$, определяемые численным решением уравнений (3) и (5). Абсолютные траектории позволяют более точно учесть влияние самоиндуцированных скоростей на траектории взаимодействия осесимметричных вихрей [13, 15]. При интегрировании уравнений движения инварианты (6) и (7) могут использоваться для контроля точности проведенных вычислений.

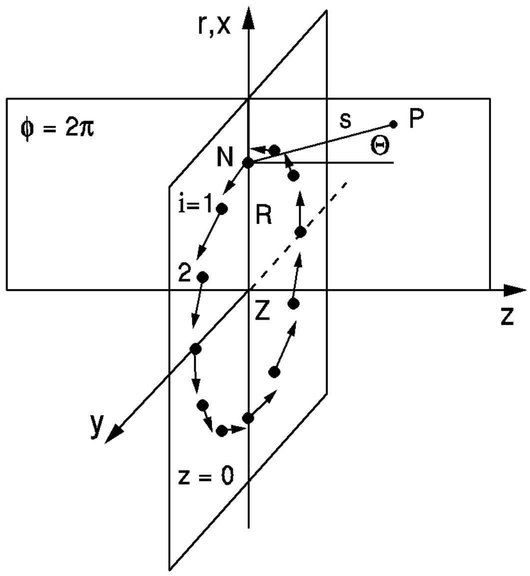

Рис. 1. Геометрия задачи. Положение точки P, расположенной в меридиональной плоскости $\phi = 2\pi$, задается в полярных координатах (s, θ) относительно положения N-го вортона вортонного кольца

3. МОДЕЛЬ ВОРТОНОВ

Вортон представляет собой трехмерный сингулярный вихрь с полем завихренности, сконцентрированным в точке [19]. Вортон полностью определяется пространственным вектором положения $\boldsymbol{x}$ и вектором интенсивности $\boldsymbol{\gamma}$. Система, состоящая из N вортонов, может быть использована в качестве модели трехмерных вихревых течений. В этом случае вортон располагается в области с завихренностью, а его вектор интенсивности ориентируется параллельно вектору завихренности в точке, в которой расположен вортон.

Каждый вортон движется со своей собственной скоростью, наведенной со стороны других вортонов. Скорость j-го вортона, расположенного с точке $\boldsymbol{x}_j$, задается следующим уравнением [19] (подробнее в [21]):

$$\frac{d\boldsymbol{x}_j}{dt} = \boldsymbol{u}_j = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}{}' \frac{(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i)\times\boldsymbol{\gamma}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3}, \quad (8)$$

где штрих в сумме означает опускание слагаемого, при котором $i = j$. Интенсивность вортона изменяется пропорционально градиентам компонент (проекций на оси) поля скорости в точке, в которой расположен рассматриваемый вортон:

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}_j}{dt} = (\boldsymbol{\gamma}_j \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u}_j. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) определяют движение системы вортонов. Для любой начальной конфигурации вортонов, траектории их движения и изменения их интенсивностей могут быть получены посредством численного интегрирования приведенных уравнений.

Известно [19], что вихревое кольцо с распределенным полем завихренности можно представить системой идентичных вортонов, изначально помещенных по кругу в плоскости кольца (рис. 1). В этом случае вортоны имеют координаты $\boldsymbol{x}_i = (R\cos\phi_i, R\sin\phi_i, Z)$ (здесь $i = 1, ..., N$) с интенсивностями $\boldsymbol{\gamma}_i = \gamma(-\sin\phi_i, \cos\phi_i, 0)$. Здесь R и Z – радиус и осевое положение вихревого кольца, соответственно; $\phi_i = 2\pi i/N$ – азимут i-го вортона, N – число вортонов в кольце, а γ – модуль интенсивности, которая в этом случае остается неизменной величиной для всех вортонов. Из уравнений (8) и (9) можно показать, что для кольцевой конфигурации вортонов интенсивности вортонов не изменяются и кольцо двигается само в направлении, перпендикулярном к своей плоскости, со скоростью

$$U = \frac{dZ}{dt} = \frac{\gamma}{8\sqrt{2}\,\pi R^2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1-\cos\phi_i}}, \qquad (10)$$

которая фактически равна наведенной скорости отдельного (в данном случае N-го) вортона в направлении оси Oz со стороны остальных вортонов, входящих в систему.

В случае двух N-вортонных колец, движущихся вдоль общей оси симметрии, каждое вортонное кольцо будет наводить дополнительную скорость. Для того, чтобы вычислить скорость одного из вортонных колец, необходимо к выражению (10) добавить вклады вортонов от другого кольца, действующих на N-ый вортон первого кольца.

В дальнейшем, как и в предыдущем разделе, будем рассматривать два кольца с начальными радиусами R_1 и R_2 соответственно, разнесенные на расстояние $Z_{12} = Z_1 - Z_2$. Пусть модули интенсивностей колец будут γ_1 и γ_2 соответственно. Изначальное азимутальное распределение вортонов по кольцу, обозначенное азимутальным углом ϕ_i, будет одинаковым для обоих колец. В работе [20], используя уравнение движения (8) и осевую симметрию течения, показано, что взаимодействие вортонов на их изимутальную конфигурацию влияния не оказывает; начальное распределение вортонов в кольце остается неизменным. Как результат, радиальные и осевые компоненты скорости вортонного кольца выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
\dot R_1 &= -\frac{\gamma_2 Z_{12}}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{\cos\phi_i}{[R(\phi_i)]^3}, \\
\dot R_2 &= \frac{\gamma_1 Z_{12}}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{\cos\phi_i}{[R(\phi_i)]^3}, \\
\dot Z_1 &= \frac{\gamma_1}{8\sqrt{2}\,\pi R_1^2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1-\cos\phi_i}} - \\
&- \frac{\gamma_2}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{R_1\cos\phi_i - R_2}{[R(\phi_i)]^3}, \\
\dot Z_2 &= \frac{\gamma_2}{8\sqrt{2}\,\pi R_2^2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1-\cos\phi_i}} - \\
&- \frac{\gamma_1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{R_2\cos\phi_i - R_1}{[R(\phi_i)]^3},
\end{aligned} \qquad (11)$$

где

$$R^2(\phi_i) = R_1^2 + R_2^2 + Z_{12}^2 - 2R_1R_2\cos\phi_i.$$

В общем случае интенсивность вортонов в каждом кольце изменяется в соответствии с изменением градиента поля скорости, наведенной вортонами другого вортонного кольца. Начальная ориентация векторов интенсивности вортонов обоих колец направлена по азимутальному направлению, $\boldsymbol{\gamma}_i = \gamma(\boldsymbol{e}_\phi)_i$, где $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор в локальной цилиндрической системе координат $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z)_i$, и вортоны изначально симметрично распределены по обоим кольцам. Анализ [20, 21] уравнений движения показывает, что ориентация векторов интенсивности не изменяется во времени. Следовательно, векторное уравнение (9) может быть сведено к одному скалярному уравнению для азимутальной компоненты вектора интенсивности. Так, для каждого вортона в кольце радиуса R изменение γ во времени оказывается одинаковым и подчиняется уравнению

$$\frac{D(\gamma/R)}{Dt} = \frac{\gamma}{R^2}\,\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}, \qquad (12)$$

где u_ϕ – азимутальная компонента поля скорости, наведенная другим вортонным кольцом. Однако на большом расстоянии вортонов от другого кольца наведенное поле скорости является асимптотически осесимметричным, величина $\partial u_\phi/\partial\phi$ стремится к нулю.

Сначала определим условия, при которых величиной $\partial u_\phi/\partial\phi$ можно пренебрегать. Для этого рассмотрим меридиональную плоскость, пересекающую вортонное кольцо в точке N-го вортона, и произвольную точку P в этой плоскости с полярными координатами (s, θ) относительно вортона N (рис. 1). Пусть положение точки P соответствует положению N-го вортона второго вортонного кольца. После несложных преобразований основного уравнения для поля скорости (8) получим следующее выражение для $\partial u_\phi/\partial\phi$ как функцию аргументов $s' = s/R$ и θ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} &= U_0 \frac{s'\cos\theta}{N} \times \\
&\times \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\cos\phi_i}{[s^{(i)}]^3} + \frac{3(1+s'\sin\theta)\sin^2\phi_i}{[s^{(i)}]^5} \right),
\end{aligned} \qquad (13)$$

где

$$s_i = \left[(s')^2 + 2(1+s'\sin\theta)(1-cos\phi_i) \right]^{1/2} \qquad (14)$$

есть нормированное расстояние между точкой P и i-м вортоном кольца. Характерная скорость $U_0 = N\gamma/(4\pi R^2)$ представляет собой масштаб осевой скорости на оси симметрии, в плоскости вортонного кольца. В терминах масштаба скорости ($u'_\phi = u_\phi/U_0$) можно вычислить для каждого s' значение $|\partial u'_\phi/\partial\phi|$ как функцию угла θ.

На рис. 2 приведена зависимость максимального (среди $-\pi \le \theta \le \pi$) значения $|\partial u'_\phi/\partial\phi|$ для различных s'. Видно, что для малых значений s', т. е. около вортонного кольца, величина $|\partial u'_\phi/\partial\phi|$ является большой. На больших расстояниях от кольца по сравнению с радиусом кольца значение $|\partial u'_\phi/\partial\phi|$ уменьшается. Аналогичные вычисления могут быть проведены для различного числа вортонов в кольце. На фиксированном расстоянии s' от кольца величина $|\partial u'_\phi/\partial\phi|$ становится меньше для больших значений N.

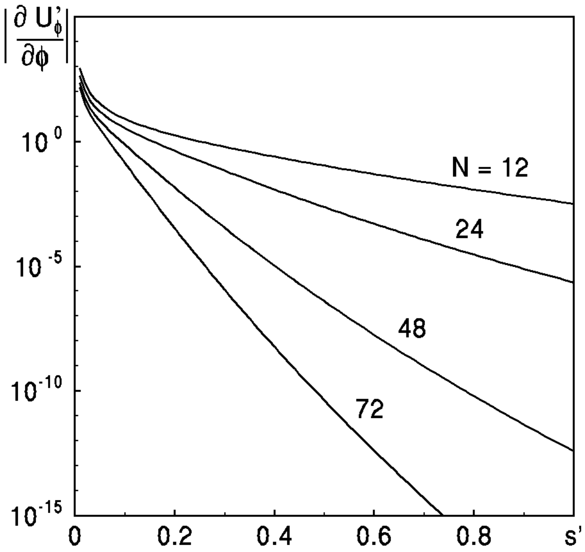

Рис. 2. Максимальное значение $|\partial u_\phi/\partial\phi|$ в зависимости от нормированного расстояния s' от ядра вортонного кольца для различных N

Таким образом, если расстояние между ядрами[2] двух вортонных колец велико и если число вортонов в каждом кольце выбрать достаточно большим, то правая часть уравнения (12) асимптотически стремится к нулю. Частным решением этого уравнения является отношение

$$\frac{\gamma}{R} = B = \text{const}. \qquad (15)$$

Это приближение является важным в рассматриваемой модели, поскольку в этом случае нет необходимости вычислять изменение интенсивности вортонных колец во времени: можно считать интенсивности вортонных колец постоянными, как это было использовано в уравнениях (11). Величина γ может быть непосредственно вычислена из зависимости изменения радиуса вортонного кольца для произвольного момента времени. В дальнейшем для обоих вортонных колец приведенное частное решение можно подставлять в уравнение (11) для того, чтобы вычислять интенсивности колец γ_1 и γ_2, используя их пропорциональность соответствующим константам B_1 и B_2.

Уравнения движения (11) имеют инвариант, связанный с законом сохранения общего импульса вдоль оси симметрии [22]:

$$P_{z,tot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2N}(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{\gamma}_i)_z = \qquad (16)$$
$$= \frac{N}{2}(R_1\gamma_1 + R_2\gamma_2) = P_1 + P_2 = \text{const},$$

в то время как радиальная и азимутальная составляющие $P_r = P_\phi = 0$. В общем случае импульс системы вортонов не является инвариантной величиной [22]. Однако, в связи с симметричным распределением вортонов у обоих колец, эффект несимметричности поля течения исчезает, поэтому дополнительные вклады в общий импульс системы не вносятся. Как результат $P_{z,tot} = \text{const}$.

Поскольку вортон обладает вихревой сингулярностью, его собственная энергия равна бесконечности. Для того, чтобы вычислить кинетическую энергию течения жидкости, наведенной системой вортонных колец, можно воспользоваться соотношением для кинетической энергии, связанной с двумя вортонами [20]. Суммируя все возможные комбинации взаимодействий между вортонами, общая энергия системы вортонов имеет вид:

$$E_{int} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{2N}{\sum_{j=1}^{2N}}' \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}_i\cdot\boldsymbol{\gamma}_j}{|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|} + \right. \qquad (17)$$
$$\left. + \frac{\boldsymbol{\gamma}_i\cdot(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)\cdot\boldsymbol{\gamma}_j\cdot(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)}{|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|^3}\right).$$

Полученная величина не является инвариантом движения, поскольку часть энергии взаимодействия может переходить в бесконечную собственную энергию вортона. Для случая двух взаимодействующих N-вортонных колец это выражение может быть преобразовано к виду

$$E_{tot} = E_1 + E_2 + E_{1-2} =$$
$$= \frac{N\gamma_1^2}{32\sqrt{2}\,\pi R_1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1+3\cos\phi_i}{\sqrt{1-\cos\phi_i}} +$$
$$+ \frac{N\gamma_2^2}{32\sqrt{2}\,\pi R_2}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1+3\cos\phi_i}{\sqrt{1-\cos\phi_i}} + \qquad (18)$$

[2] Здесь ядра вортонных колец определены как круги малого радиуса, в которых расположены вортоны.

$$+\frac{2N\gamma_1\gamma_2}{16\pi}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\cos\phi_i}{R(\phi_i)}+\frac{R_1R_2\sin^2\phi_i}{[R(\phi_i)]^3}\right),$$

где первый и второй члены соответствуют кинетической энергии изолированных вортонных колец, а последний член выражает энергию, связанную с энергией взаимодействия вортонных колец.

4. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛИ ДАЙСОНА С ВОРТОННОЙ МОДЕЛЬЮ

В модели Дайсона одиночное вихревое кольцо характеризуется радиусом кольца R, относительным радиусом ядра a/R и интенсивностью Γ. В то же время, вортонная модель характеризуется радиусом кольца R, числом вортонов N в кольце и интенсивностью γ каждого вортона. Для того, чтобы провести сравнительный анализ обеих моделей, необходимо ввести дополнительные условия для начальных параметров, описывающих вихревое и вортонное кольца.

Понятно, что в обеих моделях необходимо выбрать одинаковые радиусы R и осевые положения Z колец в начальный момент времени. Более того, полагаем, что начальный импульс каждого вихревого кольца равен импульсу соответствующего вортонного кольца. Используя выражения (6) и (16), находим соотношение между Γ и γ:

$$N\gamma = 2\pi R\Gamma. \qquad (19)$$

Это соотношение можно проинтерпретировать следующим образом. Изначально каждый вортон представляет завихренность N-й части объема $V = 2\pi^2a^2R$ ядра непрерывного вихревого кольца с однородной завихренностью $\omega_\phi = \Gamma/\pi a^2$. Интенсивность γ вортона равна произведению этой части объема $V_p = V/N$ на ω_ϕ, или $\gamma = V_p\omega_\phi = 2\pi R\Gamma/N$.

В предыдущем разделе было сделано предположение о линейной зависимости между γ и R при условии, что при взаимодействии расстояние между ядрами вортонного кольца намного больше размера самих колец. В этом случае из выражений (15) и (19) следует, что

$$B = \frac{2\pi\Gamma}{N}. \qquad (20)$$

Заметим, что изменение импульса вихревого кольца и вортонного кольца в этом случае уже одинаковы. Импульс пропорционален квадрату мгновенного значения радиуса рассматриваемого кольца в обеих моделях.

Наконец, необходимо потребовать, чтобы самоиндуцированные скорости каждого вихревого кольца в начальный момент равнялись самоиндуцированным скоростям соответствующих вортонных колец. Используя уравнения (1) и (10) совместно с (19), начальное соотношение между радиусом ядра a/R и числом вортонов N в кольце будет

$$\frac{a}{R} = 8\exp\left(-\frac{1}{4}-\frac{\pi}{\sqrt{2}\,N}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{1-\cos\phi_i}}\right). \qquad (21)$$

При увеличении числа вортонов в кольце соответствующие размеры ядра уменьшаются; как следствие, самоиндуцированная скорость вихревого кольца увеличивается.

Надо отметить, что при взаимодействии колец общее число вортонов N каждого кольца сохраняется, в то время как у модели Дайсона сохраняется объем a^2R вихревого кольца. Эта разница приводит к отличиям в самоиндуцированных скоростях при взаимодействии вихревых колец. Если в начальный момент времени вихревое и вортонное кольца имели одинаковый радиус R_0 и самоиндуцированную скорость, то разницу в самоиндуцированных скоростях $U_{vr} - U_{vt}$ в те моменты, когда их радиусы при взаимодействии достигли значения R, можно определить подстановкой выражения (19) в уравнение (10):

$$U_{vr} - U_{vt} = \frac{3\Gamma}{8\pi R}\ln\frac{R}{R_0}. \qquad (22)$$

Если кольца увеличили свои радиусы ($R > R_0$), вихревые кольца движутся быстрее соответствующих вортонных колец. И наоборот, если кольца уменьшили свои радиусы ($R < R_0$), вортонное кольцо движется немного быстрее. Эта разница обратно пропорциональна мгновенному значению радиуса кольца R. Следовательно, разность $U_{vr} - U_{vt}$ тем больше, чем больше становится радиус кольца.

Для того, чтобы провести сравнительный анализ обеих моделей, необходимо сравнить наведенные скорости между двумя вихревыми кольцами с аналогичной компонентой скорости между двумя вортонными кольцами. Для этого определим поле скорости, индуцированное одиночным вихревым кольцом и вортонным кольцом в точке P с полярными координатами (s,θ) относительно ядра кольца (см. рис. 1). Используя первые и третьи уравнения в выражениях (3) и (11), амплитуда $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\dot{R}_1^2+\dot{Z}_1^2}$ поля скорости вычисляется относительно переменных s' и θ. В рассма-

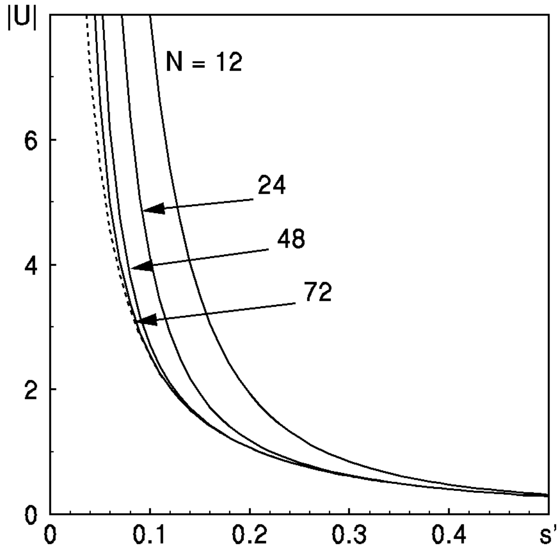

Рис. 3. Сравнение амплитуд осевых компонент скоростей $|\boldsymbol{u}| = |\dot{Z}_1|$, индуцированных вихревых кольцом (штриховая линия) с вортонным кольцом (сплошная линия) в плоскости кольца ($\theta = \pi/2$) в зависимости от s'. При больших значениях N кривые для вортонного кольца приближаются к кривой для вихревого кольца

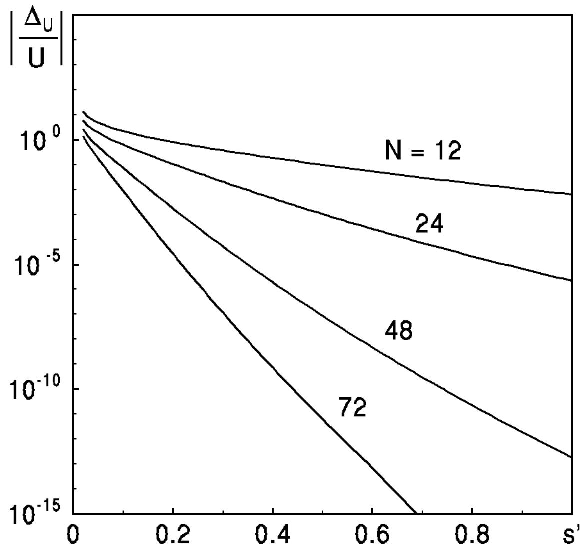

Рис. 4. Относительная разница $|\Delta_u/\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}_{vt} - \boldsymbol{u}_{vr}|$ / $|\boldsymbol{u}_{vr}|$ между осевыми скоростями, наведенными вортонным кольцом $|\boldsymbol{u}_{vt}|$ и вихревым кольцом $|\boldsymbol{u}_{vr}|$, в соответствии с рис. 3

триваемом случае P является произвольной точкой поля, которая не совпадает с ядром кольца, поэтому $\Gamma_1 = 0$ и $\gamma_1 = 0$, и самоиндуцированная скорость в точке P равна нулю. Как и ранее, поле скорости пронормировано на величину $U_0 = \Gamma_2/(2R_2) = N\gamma_2/(4\pi R_2^2)$.

Оказывается, что на фиксированном расстоянии s' амплитуда поля скорости, наведенного в точке P вортонным кольцом больше, чем вихревым кольцом для всех углов θ. Эта разница максимальна при $\theta = \pi/2$, т.е. там, где радиальная компонента скорости равна нулю. На рис. 3 представлено максимальное значение скорости (для $\theta = \pi/2$) в зависимости от s' для вортонного кольца при различных N и соответствующая компонента для вихревого кольца (штриховая линия). Видно, для всех N наведенное поле скорости у обеих моделей приблизительно совпадает для больших значений s'; разница возникает при малых s'. На рис. 4 представлена относительная разница $|\Delta_u/\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}_{vt} - \boldsymbol{u}_{vr}|/|\boldsymbol{u}_{vr}|$ в логарифмическом масштабе в зависимости от s'. Видно, что существует некоторое критическое расстояние s_{cr}, при котором Δ_u еще остается малым (скажем, при $\Delta_u < 0.001$). Это означает, что при $s' > s_{cr}$ наведенные поля скорости обеих моделей практически одинаковы. Для больших значений N это критическое расстояние становится меньше. В связи с этим можно заключить, что разница в траекториях для обеих моделей двух вихревых колец и двух вортонных колец может возникать только по причине разницы самоиндуцированных скоростей колец в процессе взаимодействия (см. уравнение (22)) при условии, что расстояние между ядрами колец всегда больше s_{cr}, которое зависит от числа вортонов в каждом кольце.

5. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

В этом разделе проводится сравнительный анализ траекторий изначально двух одинаковых вихревых колец с траекториями двух одинаковых вортонных колец с использованием соответствующих начальных условий и параметров. Учитывая линейное приближение $\gamma_i/R_i = B_i$, $(i = 1, 2)$, траектории определяются численным интегрированием уравнений движения (3) и (11) по времени с использованием схемы Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага интегрирования [26].

В таб. 1 представлены начальные параметры, используемые при численном анализе. Индекс '0' при переменных соответствует величинам, которым присваиваются только начальные значения, а без этого индекса представлены величины, кото-

Табл. 1. Начальные параметры для вихревых колец (модель Дайсона) и вортонных колец (вортонная модель)

Модель Дайсона		Вортонная модель
$R_1^0 = 1.0$		$R_1^0 = 1.0$
$R_2^0 = 1.0$		$R_2^0 = 1.0$
$Z_1^0 = 0.0$		$Z_1^0 = 0.0$
$Z_2^0 = 2.0$		$Z_2^0 = 2.0$
$a_1^0/R_1^0 = 0.07632$	$\Leftarrow$	$N_1 = 72$
$a_2^0/R_2^0 = 0.07632$	$\Leftarrow$	$N_2 = 72$
$\Gamma_1 = 1.0$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^0 = 0.087$
$\Gamma_2 = 1.0$	$\Rightarrow$	$\gamma_2^0 = 0.087$

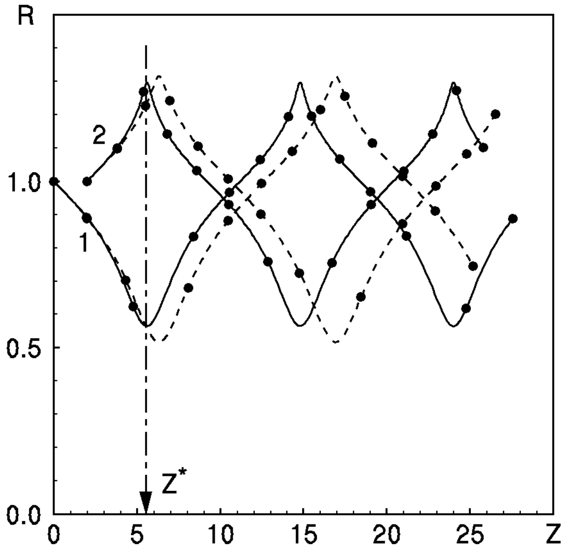

Рис. 5. Траектории двух изначально одинаковых вихревых колец (штриховая линия) и двух одинаковых вортонных колец (сплошная линия) при периодическом взаимодействии (“чехарда” колец). Начальные параметры вихревых колец и вортонных колец соответствуют значениям, приведенным в таб.1

рые обладали фиксированным значением при вычислениях. Каждое кольцо состояло из 72 вортонов. Выбор этого значения был произвольный, хотя иногда требовались и большие значения N в тех случаях, когда соответствующий радиус ядра в модели Дайсона требовал выполнение условия $a/R \ll 1$.

На рис. 5 показаны траектории вихревых (штриховая линия) и вортонных (сплошная линия) колец, которые представляют собой периодическое взаимодействие двух вихревых колец с одинаковой завихренностью (так называемая “чехарда” колец). Переднее вихревое кольцо в наведенном поле скорости увеличивает свой радиус и замедляется, в то время как заднее вихревое кольцо уменьшает свой радиус и ускоряется. С течением времени кольца проскакивают друг сквозь друга, и теперь заднее вихревое кольцо, оказавшись впереди, увеличивает свой радиус из-за наведенной скорости со стороны другого (уже заднего) вихревого кольца. С течением времени процесс проскакивания одного кольца сквозь другое периодически повторяется. Кружками на рис. 5 отмечены положения ядер вихревых колец для обеих моделей через равные промежутки времени $\Delta t = 5.0$.

Несмотря на то, что глобальное движение обеих моделей практически одинаково, имеется незначительная разница в траекториях, которая после каждого проскакивания колец накапливается. Для того, чтобы исследовать эту разницу, необходимо обратить свое внимание на моменты прохождения колец друг сквозь друга, т. е. в моменты $Z_1 = Z_2 \equiv Z^*$, когда кольца имеют экстремальные значения радиусов. На рис. 5 видно, что это осевое положение для вортонного кольца меньше по сравнению с соответствующим моментом для вихревого кольца. В эти моменты имеется некоторая разница в самоиндуцированных скоростях вихревых и вортонных колец. Как видно из положений ядер колец для фиксированных моментов времени (кружочки на рисунке), осевая скорость сжимающегося вортонного кольца в действительности больше, чем осевая скорость соответствующего вихревого кольца. Что касается переднего кольца, эта разница имеет обратную тенденцию, хотя отличия в осевых скоростях здесь меньше. Следовательно, проскакивание вортонных колец происходит немного раньше, чем вихревых колец. Вот почему осевое положение Z^* момента проскакивания меньше для вортонных колец.

Поскольку на первое проскакивание потребовалось меньшее время, увеличение радиуса переднего вортонного кольца и уменьшение радиуса заднего вортонного кольца до момента проскакивания происходило за меньшие промежутки времени (рис. 5). Надо помнить, что это изменение в радиусах колец происходит только из-за взаимного влияния обоих колец, которые тоже имеют некоторые отличия у обеих моделей. Это особенно заметно в разнице выражений (3) и (11). Более того, разница в наведенных скоростях также влияет на осевые положения, что не было отмечено в приведенном выше анализе. Однако было показано (см. рис. 4), что разница между обеими моделями в наведенном поле скорости является незначительной.

Давайте проверим как меняется расстояние

$$s = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} \qquad (23)$$

между ядрами двух вортонных колец с течением времени. Это расстояние нормировалось на мгновенное значение радиуса большего из вортонных колец. Минимальное расстояние s'_{min}, возникающее в момент проскакивания вортонных колец, можно использовать для того, чтобы определить относительную разницу между наведенными полями скорости вортонных колец и вихревых колец из рис. 4. Для траекторий на рис. 5 получается $s'_{min} = 0.566$, что соответствует $|\Delta_u/\boldsymbol{u}| = O(10^{-13})$. Таким образом, разница в наведенных полях скорости у обеих моделей является незначительной.

Более того, из рис. 2 видно, что $|\partial u'_\phi/\partial \phi| = O(10^{-13})$ для $s'_{min} = 0.566$. Таким образом, линейное приближение в осесимметричной вортонной модели, пренебрегающей азимутальное изменение в наведенном поле скорости вортонных колец, является также приемлемым.

Наконец, можно также проверить минимальное нормированное расстояние s_{min} между ядрами двух вихревых колец в момент проскакивания. В модели Дайсона предполагается, что расстояние между ядрами вихревых колец должно оставаться большим по сравнению размерами ядер, что и приводит к сохранению кругового поперечного сечения вихревых ядер при взаимодействии. В рассматриваемом случае видно, что сумма радиусов ядер a_1 и a_2 взаимодействующих колец равна $a_1 + a_2 = 0.173$, при $s = s_{min} = 0.801$, так что допущение в модели Дайсона выполняется. Более того, максимальный относительный радиус вихревого ядра a/R для меньшего из колец в этот момент $a/R = 0.205$, что в действительности меньше единицы, как это требуется в модели Дайсона[3].

Разница в траекториях вихревых и вортонных колец проявляется и в разнице импульса и энергии поля течения. На рис. 6 представлены импульсы отдельных вихревых колец и вортонных колец. Видно, что период осциллирующего движения в действительности короче у вортонных колец, что свидетельствует о том, что взаимодействие у вортонных колец происходит немного быстрее. Важно отметить, что общий импульс $P_{tot} = P_1 + P_2$ для обоих вихревых колец и вортонных колец представляет собой константу с максимальными флуктуациями порядка $3 \cdot 10^{-5}$, что вызвано, очевидно, точностью численного интегрирования.

[3]Максимальное значение, отмечнное Дайсоном [12], составляет 0.3.

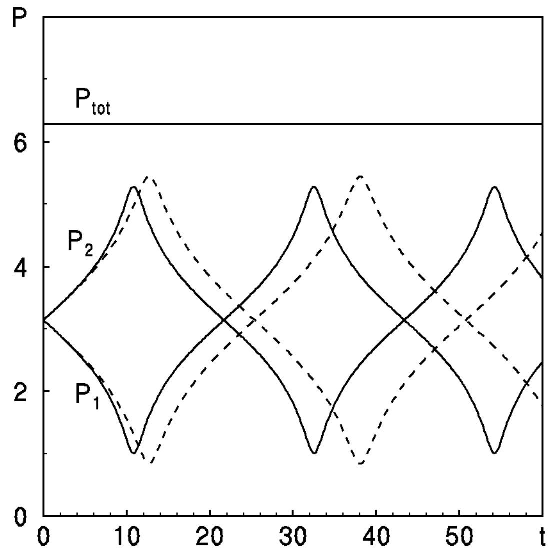

Рис. 6. Изменение импульсов P_1 и P_2 двух вихревых колец (штриховая линия) и двух вортонных колец (сплошная линия) во времени при периодическом взаимодействии. Общий импульс $P_{tot} = P_1 + P_2$ является постоянной величиной для обоих случаев

На рис. 7 нанесены различные вклады в общую энергию поля течения, как это представлено в уравнениях (7) и (17). По аналогии с уравнением (22) можно получить соотношение, выражающее разницу в кинетических энергиях вихревого и вортонного колец для мгновенного значения радиуса кольца R, которые имели изначально одинаковый радиус R^0:

$$E_{vr} - E_{vt} = \frac{3\Gamma^2 R}{4} \ln \frac{R}{R^0}. \qquad (24)$$

Следовательно, если радиус кольца увеличивается ($R > R^0$), кинетическая энергия вортонного кольца меньше, чем у соответствующего вихревого кольца и эта разница пропорциональна R. И наоборот, если радиус уменьшается ($R < R^0$), кинетическая энергия вортонного кольца больше. Эта особенность наблюдается и на рис. 7. Как было показано в разделе 3, кинетическая энергия вортонного кольца представляет собой сумму энергии взаимодействия между всеми вортонами, составляющими кольцо, опуская бесконечную собственную энергию отдельного вортона. Известно [20], что растяжение вортонного кольца может приводить к преобразованию энергии взаимодействия в собственную энергию вортона, которое может быть проинтерпретировано как невязкая энергия диссипации. И наоборот, если вортонное кольцо

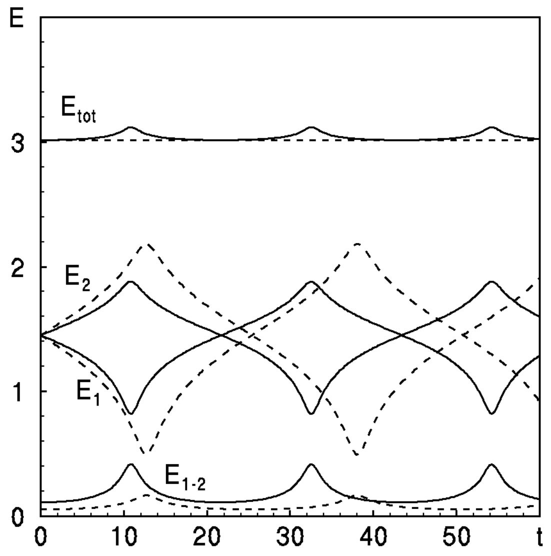

Рис. 7. Изменение собственных энергий E_1 и E_2 и энергии взаимодействия E_{1-2} двух вихревых колец (штриховая линия) и двух вортонных колец (сплошная линия) во времени при периодическом взаимодействии. В отличие от вихревых колец Дайсона общая энергия для вортонной модели $E_{tot} = E_1 + E_2 + E_{1-2}$ не является постоянной величиной

сжимается, появляется энергия взаимодействия. В этом случае энергия диссипации может регенерироваться.

В момент проскакивания колец взаимная энергия E_{1-2} вортонных колец больше, чем соответствующая энергия вихревых колец, поскольку расстояние между их ядрами меньше, что приводит к более сильному взаимодействию вортонных колец. Общая энергия вихревых колец является постоянной величиной с точностью до $1 \cdot 10^{-5}$. В модели Дайсона общая энергия вихрей является величиной инвариантной, а в вортонной модели таковой не является. Для вортонных колец общая энергия зависит от времени и увеличивается примерно на 3% при прохождении колец по отношению к начальной энергии в системе.

Таким образом, можно выделить отличия между моделью Дайсона и вортонной моделью для типичного примера осесимметричного взаимодействия двух одинаковых вихревых колец и двух соответствующих вортонных колец ($N = 72$ и $a^0/R^0 = 0.07632$ соответственно). На примере периодического взаимодействия было показано, что сопоставление уравнений движения вортонной модели (так называемая "осесимметричная вортонная модель") аналогичным уравнениям движения модели Дайсона вполне допустимо. Этот вывод подразумевает, что азимутальным полем скорости в дискретном распределении вортонов по кольцу можно пренебречь, и вортонные кольца взаимодействуют как непрерывные осесимметричные вихревые структуры. Для того, чтобы определить, при каких N осесимметричная вортонная модель обладает достаточным приближением, необходимо выполнить различные численные эксперименты, при которых можно варьировать значением N и, используя выражение (21), подобрать значение радиуса ядра соответствующего вихревого кольца.

В табл. 2 представлены некоторые результаты такого сопоставления. Во всех случаях наблюдалось периодическое взаимодействие вихревых колец, хотя траектории колец имели незначительное отличие по сравнению с рассмотренным ранее случаем. Например, поскольку глобальные самоиндуцированные скорости колец для меньших дискретных значений N уменьшаются, то период движения увеличивается, а проходимое кольцами расстояние уменьшается.

В табл. 2 величина s'_{min} означает минимальное нормированное расстояние между ядрами вортонных колец, которые практически одинаковы для всех значений N. Соответствующие значения $|\partial u'_\phi/\partial\phi|$ и $|\Delta_u/\boldsymbol{u}|$ уменьшаются при увеличении N. Однако при $N = 12$ обе эти величины порядка $O(10^{-2})$. В этом случае вортоны в осесимметричной модели не имеют достаточного приближения к модели течения с непрерывным распределением завихренности; в этом случае должны быть использованы полные уравнения движения вортонов (8). Анализируя последнюю колонку в табл. 2, находим, что $a^0/R^0 = 0.2290$ (т.е. $N = 24$ в вортонной модели), расстояние между ядрами в процессе взаимодействия достаточно мало, а при $a^0/R^0 = 0.4583$ ($N = 12$) ядра при взаимодействии могут пересекаться. Максимальное значение относительного радиуса ядра $(a/R)_{max}$ достаточно велико для первых двух случаев (или даже одного) и только для тонких вихревых колец выполняется условие $a/R \ll 1$. Можно заключить, что проведенные исследования в этой части для $N = 72$ могут быть проведены и для $N = 48$, в то время как для меньших значений N найти соответствие между вортонной моделью и моделью Дайсона будет невозможно.

Видно, что разница во взаимодействиях между вортонной моделью и моделью Дайсона связана самоиндуцированной скоростью вортонных и вихревых колец во время взаимодействия. Можно уменьшить разницу, изменив число вортонов в ка-

Табл. 2. Сравнение моделей для различных N и соответствующих a^0/R^0

N	a^0/R^0	s'_{min}	$\lvert\partial u'_\phi/\partial\phi\rvert$	$\lvert\Delta_u/\boldsymbol{u}\rvert$	s_{min}	a_1+a_2	$(a/R)_{max}$
12	0.4583	0.611	$2.8\cdot10^{-2}$	$5.1\cdot10^{-2}$	0.935	1.104	1.702
24	0.2290	0.590	$2.5\cdot10^{-4}$	$3.1\cdot10^{-4}$	0.868	0.533	0.718
48	0.1145	0.573	$1.3\cdot10^{-8}$	$1.0\cdot10^{-8}$	0.822	0.261	0.323
72	0.07632	0.566	$5.0\cdot10^{-13}$	$3.2\cdot10^{-13}$	0.801	0.173	0.205

ждом кольце при их движении. Для этого необходимо повторить исследования с трехмерными вортонами, развитыми в работе [27], в которых вортоны могут либо "делиться", либо "соединяться" в зависимости от изменения их взаимного расстояния $L=2\pi R/N$. Если $L \geq 2^{2/3}$, где L – начальное расстояние между вортонами, то дополнительный вортон вносится в систему; если $L < 2^{2/3}$ вортон убирается. Однако для рассмотренного периодического взаимодействия расстояние между вортонами в кольцах не достигает этого критического значения и, следовательно, число вортонов в каждом кольце может оставаться неизменным. Таким образом, сделанное предположение о фиксированном числе вортонов в каждом кольце при взаимодействии осесимметричных вихревых структур является допустимым.

6. ВЫВОДЫ

В настоящей статье было проанализировано соответствие двух моделей, которые могут использоваться для описания осесимметричного взаимодействия невязких вихревых колец. Была применена так называемая осесимметричная вортонная модель – приближение, в котором предполагается, что вортонные кольца индуцируют осесимметричное поле скорости. Сравнительный анализ показал, что при изучении периодического движения (типа "чехарда") вполне допустимо принимать число вортонов в кольце $N > 24$. В этом приближении уравнения движения вортонной модели имеют аналогичную структуру уравнениям движения модели Дайсона, что сделало возможным проведение сравнительного анализа обеих моделей. Были получены соотношения, которые связывают начальные условия и параметры обеих моделей. Обнаружено, что для $N > 24$ ($a^0/R^0 \leq 0.2290$) разница во взаимодействии между двумя вортонными кольцами является незначительной, а наблюдаемая разница в траекториях в обеих моделях может быть объяснена разницей в самоиндуцированных скоростях вихревых колец и вортонных колец при их движении.

В работе исследовались только осесимметричное взаимодействие двух одинаковых колец. В дальнейшем необходимо рассмотреть вопрос о соответствии моделей для двух произвольных колец и исследовать соответствие вортонной модели для этих случаев. Поскольку мы знаем как связаны характеристики вихревых колец (а именно: Z, R, a/R, χ) и вортонного кольца (соответственно: Z, R, N, γ) для коаксиального взаимодействия, есть основания распространить полученные результаты для несимметричного взаимодействия вортонных колец. Поскольку применение модели Дайсона в этом случае невозможно, вортонные кольца могут быть использованы для изучения динамики такого взаимодействия вихревых колец. В этом случае должны быть использованы полные уравнения вортонной модели. Рис. 2 и 4 могут быть использованы для проверки минимального нормированного расстояния между ядрами вортонных колец, для которых вортонная модель все еще остается допустимой.

Благодарности

Работа была проведена во Fluid Dynamics Laboratiry в Technological University of Eindhoven, the Netherland и украинские коллеги (среди авторов настоящей работы) выражают благадарность спонсору: Netherlands Organization for Scientific reserch (NWO). Авторы благодарны член-корреспонденту НАН Украины Ю.Н.Савченко за многочисленные обсуждения, рекомендации и советы.

1. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelwegungen entsprechen // J. reine angew. Math.– 1858.– **55**.– P. 25-55.
2. *Sallet D. W., Widmayer R. S.* An experimental investigation of laminar and turbulent vortex rings in air // Z. Flugwiss.– 1978.– **22**.– P. 207-215.
3. *Yamada H., Matsui T.* Preliminary study of mutual slip-through of a pair of vortices // Phys. Fluids.– 1978.– **21**.– P. 292-294.

4. *Hicks W. M.* On the mutual threading of vortex rings // Proc. R. Soc. London.– 1922.– A**102**.– P. 111-131.
5. *Shariff K., Leonard A., Zabusky N. J., Ferziger J. H.* Acoustics and dynamics of coaxial interacting vortex rings // Fluid Dyn. Res.– 1988.– **3**.– P. 337-343.
6. *Riley N.* On the behaviour of pairs of vortex rings // Q. J. Mech. Appl. Math.– 1993.– **46**.– P. 521-539.
7. *Riley N., Stevens D. P.* A note on leapfrogging vortex rings // Fluid Dyn. Res.– 1993.– **11**.– P. 235-244.
8. *Weidman P. D., Riley N.* Vortex rings pairs: numerical simulation and experiment // J. Fluid Mech.– 1993.– **257**.– P. 311-337.
9. *Wakelin S. L., Riley N.* On the formation and propagation of vortex rings and pairs of vortex rings // J. Fluid Mech.– 1997.– **332**.– P. 121-139.
10. *Lamb H.* Hydrodynamics.– Cambridge: Cambridge University Press, 1932.– 738 p.
11. *Saffman P. G.* Vortex Dynamics.– Cambridge: Cambridge University Press, 1992.– 311 p.
12. *Dyson F. W.* The potential of an anchor vortex ring. II // Phil. Trans. R. Soc. London.– 1893.– A**184**.– P. 1041-1106.
13. *Gurzhii A. A., Konstantinov M. Yu., Meleshko V. V.* Interaction of coaxial vortex rings in an ideal fluid // Fluid Dyn.– 1988.– **23**.– P. 224-229.
14. *Gurzhii A. A., Konstantinov M. Yu.* Head-on collision of twocoaxial vortex rings in an ideal fluid // Fluid Dyn.– 1988.– **24**.– P. 538-541.
15. *Мелешко В. В., Константинов М. Ю.* Динамика вихревых структур.– К.: Наук. думка, 1993.– 283 p.
16. *Gurzhii A. A., Konstantinov M. Yu., Meleshko V. V.* Ordered and chaotic movement in the dynamics of three coaial vortex rings // J. Math. Sci.– 1994.– **68**.– P. 711-714.
17. *Konstantinov M.* Chaotic phenomena in the interaction of vortex rings // Phys. Fluids.– 1994.– **6**.– P. 1752-1767.
18. *Гуржий А. А.* О классификации взаимодействий двух тонких вихревых колец в идеальной безграничной жидкости // Гидромеханика.– 1994.– 68.– С. 79-85.
19. *Novikov E. A.* Generalized dynamics of three-dimensional vortical singularities (vortons) // Sov. Phys. JETP.– 1983.– **57**.– P. 566-569.
20. *Aksman M. J., Novikov E. A., Orszag S. A.* Vorton methods in three-dimensional hydrodynamics // Phys. Rev. Lett.– 1985.– **54**.– P. 2410-2413.
21. *Eisenga A. H. M.* Dynamics of a vortex ring in a rotating fluid (Ph. D. thesis).– Eidhoven: Eidhoven University of Technology, 1997.– 128 p.
22. *Winckelmans G.S* Topics in vortex methods for the computation of three-and two-dimensional incompressible unsteady flow (Ph. D. thesis).– Pasadena: California Institute of Technology, 1989.– 120 p.
23. *Thomson W.* The translatory velocity of a circular vortex ring // Phil. Mag.– 1867.– **33**.– P. 511–512.
24. *Batchelor G. K.* An Introduction to Fluid Dynamics.– Cambridge: Cambridge University Press, 1967.– 615 p.
25. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
26. *Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff problems.– Berlin: Springer, 1987.– 480 p.
27. *Pedrizzetti G.* Insight into singular vortex flows // Fluid Dyn. Res.– 1993.– **10**.– P. 101–244.