

УДК 532.528

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ТОНКОГО ТЕЛА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗВИТЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Д. ВАСИН

ГосНИИЦ ЦАГИ, Москва

Получено 15.06.2000

Приведены результаты применения теории тонкого тела для решения задач кавитационного обтекания осесимметричных тел дозвуковым потоком сжимаемой жидкости. В случае затупленных кавитаторов получено внешнее решение. Для тонких конусов решение пригодно для всей области течения. Проводится сравнение полученных автором результатов с известными теоретическими и экспериментальными данными.

Наведені результати застосування теорії тонкого тіла для розв'язування задач кавітаційного обтікання осесимметричних тіл дозвуковим потоком стисливої рідини. У випадку затуплених кавітаторів одержаний зовнішній розв'язок. Для тонких конусів розв'язок придатний для всієї області течії. Проводиться порівняння одержаних автором результатів з відомими теоретичними та експериментальними даними.

Results of application of the slender body theory to solve problems on subsonic cavitating flow around axisymmetric bodies in compressible fluid are presented. The external solution is obtained in the case of blunted cavitators. For slender cones the solution is applicable for all flow zone. A comparison of the results obtained by author with well known theoretical and experimental data is performed.

## ВВЕДЕНИЕ

Практический интерес к кавернам в сжимаемой жидкости появился в начале 80-х годов. Возникла необходимость создания теории развитых осесимметричных кавитационных течений в сжимаемой жидкости. На первом этапе теоретические исследования в основном базировались на теории тонкого тела [1 – 6]. В дальнейшем были развиты численные методы [7 – 10]. В последнее время существенный прогресс достигнут в Институте гидромеханики НАН Украины в отделе Ю.Н.Савченко по экспериментальному изучению высокоскоростного движения тела в воде со скоростью, соизмеримой со скоростью звука [11 – 13]. Сравнение результатов, полученных по теории тонкого тела для дозвукового кавитационного обтекания, с расчетами, выполненными на основе численных методов, и экспериментальными данными показало хорошее согласование. В данной работе дан анализ основных результатов, полученных автором на основе теории тонкого тела для дозвукового кавитационного обтекания.

## 1. ТОНКИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КАВЕРНЫ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим обтекание дозвуковым потоком

тонкого осесимметричного тела с каверной по схеме Рябушинского, когда применимо линеаризованное уравнение течения в цилиндрической системе координат [14]:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi = \frac{\Phi^*}{V_0 L}$  – безразмерный потенциал скорости обтекания;  $\Phi^*$  – потенциал скорости обтекания;  $V_0$  – скорость набегающего потока;  $L$  – полная длина тонкого тела, включающая кавитатор, каверну и замыкатель;  $M = V_0/a_0$  – число Маха;  $a_0$  – скорость звука в невозмущенном потоке;  $x, r$  – безразмерные координаты, отнесенные к длине  $L$ . Сечение системы тело – каверна меридианной плоскостью показано на рис. 1, где  $x_0$  и  $1-x_0$  – координаты начала и конца каверны. Уравнения для безразмерного радиуса меридиана тела и каверны запишем в виде:  $R_1 = \varepsilon f_1(x)$  – тело,  $R = \varepsilon f(x)$  – каверна, где  $\varepsilon$  – малый параметр, равный отношению максимального радиуса каверны к полной длине; функции  $f(x)$  и  $f_1(x)$  имеют порядок единицы.

К уравнению (1) добавляются кинематические граничные условия на теле и каверне и динамическое условие постоянства давления на поверхности каверны. Второе уравнение имеет вид

$$r = R_1 : \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \bigg/ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon f_1'(x),$$

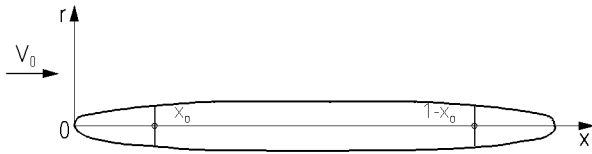


Рис. 1. Сечение системы тело – каверна меридианной плоскостью

$$r = R : \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \bigg/ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon f'(x), \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - 1 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right] + \int_{P_0}^{P_k} \frac{dP}{\rho} = 0,$$

где  $P = P^*/\rho_0 V_0^2$  – безразмерное давление на линии тока;  $P_0 = P_0^*/\rho_0 V_0^2$  – безразмерное давление в невозмущенном потоке;  $P_k = P_k^*/\rho_0 V_0^2$  – безразмерное давление на поверхности каверны;  $P^*, P_0^*, P_k^*$  – давления на линии тока, в невозмущенном потоке и на поверхности каверны соответственно;  $\rho_0$  – плотность в невозмущенном потоке;  $\rho = \rho^*/\rho_0$  – безразмерная плотность на линии тока;  $\rho^*$  – плотность на линии тока.

Зависимость  $P(\rho)$  представляет собой адиабату для воды и определяется уравнением Тэта [15]

$$P = P_0 + \frac{1}{7,15M^2} (\rho^{7,15} - 1). \quad (3)$$

После подстановки соотношения (3) в (2) и разложения в ряд динамическое граничное условие будет иметь вид

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - 1 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{M^2}{4} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - 1 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right]^2 + \dots = \sigma, \quad (4)$$

где  $\sigma = 2(P_0^* - P_k^*)/\rho_0 V_0^2$  – число кавитации. Потенциал  $\Phi$  представим в виде

$$\Phi = \varphi + x,$$

где  $\varphi$  – безразмерный потенциал возмущенных скоростей, который стремится к нулю при  $x$  и  $r \rightarrow \infty$ . После подстановки  $\Phi$  в условие (4) и при пренебрежении членами, имеющими порядок малости не ниже  $\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon$ , выражение (4) запишем следующим образом:

$$2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 = \sigma. \quad (5)$$

Для тонких осесимметричных тел потенциал возмущенных скоростей находится методом источников и стоков, распределенных на оси симметрии. Для дозвукового потока  $\varphi$  имеет вид [14]

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{q(x_1) dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (1+M^2)r^2}}, \quad (6)$$

где  $q(x_1)$  – интенсивность источников и стоков на оси симметрии. Вблизи оси симметрии  $\varphi$  имеет следующее асимптотическое представление [16, 17]:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} S'(x) \ln r + g(x), \quad (7)$$

где  $S'(x)$  – производная по  $x$  от безразмерной площади поперечного сечения.

Главной частью представления (7) является логарифмический потенциал, к нему добавляется некоторая функция  $g(x)$ , определяемая из условия сращивания с потенциалом распределенных источников (6), так как логарифмический потенциал не удовлетворяет условию на бесконечности. Функция  $g(x)$  также учитывает влияние сжимаемости. В некоторых случаях (для очень тонких каверн) величиной  $g(x)$  пренебрегают по сравнению с логарифмическим членом. Подставляя логарифмический потенциал в выражение (5), можно перейти к уравнению, впервые полученному в [18]. Учет функции  $g(x)$  дает следующее выражение для потенциала вблизи поверхности тела и каверны [17]:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} S'(x) \ln \frac{(1-M^2)r^2}{4x(1-x)} - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{S'(x_1) - S'(x)}{|x-x_1|} dx_1. \quad (8)$$

Подставляя уравнение (8) в (5), получаем интегродифференциальное уравнение для профиля каверны:

$$\begin{aligned} & \frac{u'^2}{2u} + u'' \ln \frac{(1-M^2)u}{4x(1-x)} - \int_0^{x_0} \frac{u_1''(x_1) - u''(x)}{|x-x_1|} dx_1 - \\ & - \int_{x_0}^{1-x_0} \frac{u_1''(x_1) - u''(x)}{|x-x_1|} dx_1 - \int_{1-x_0}^1 \frac{u_1''(x_1) - u''(x)}{|x-x_1|} dx_1 - \\ & - \frac{u_1'(0)}{x} + \frac{u_1'(1)}{1-x} = 2\sigma, \quad (9) \\ & u = R^2, \quad u_1 = R_1^2. \end{aligned}$$

Следует отметить, что для несжимаемой жидкости аналогичное уравнение получено в [19]. В том случае, если место отрыва каверны фиксировано, к уравнению (9) добавляются граничные условия

$$\begin{aligned} x = x_0 : R &= R_1, R' = R'_1; \\ x = 1 - x_0 : R &= R_1, R' = R'_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Поместим начало системы координат в середину каверны, а геометрические размеры обезразмерим по ее полудлине (для удобства сравнения с ранее опубликованными результатами). При малых числах кавитации, когда размерами кавитатора можно пренебречь по сравнению с размерами каверны, для получения внешнего решения запишем выражения (9) и (10) следующим образом:

$$\frac{u'^2}{2u} + u'' \ln \frac{(1 - M^2)u}{4(1+x)(1-x)} - \int_{-1}^1 \frac{u''_1(x_1) - u''(x)}{|x - x_1|} dx_1 - \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -\frac{u'(-1)}{1+x} + \frac{u'(1)}{1-x} &= 2\sigma, \\ R(\pm 1) = 0, R(0) &= \varepsilon_1, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_1 = \frac{2R_k}{L_k} = \frac{1}{\lambda} = 2\varepsilon$  – малый параметр, обратный удлинению каверны  $\lambda$ ;  $R_k$  – максимальный радиус каверны;  $L_k$  – длина каверны.

Внешнее решение (11) ищем в виде разложения в асимптотические ряды по функциям от  $\varepsilon_1$ . Для квадрата радиуса каверны и числа кавитации эти ряды имеют вид

$$\begin{aligned} R^2 = \varepsilon_1^2 \left[ R_0^2 + R_{-1}^2 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right)^{-1} + \right. \\ \left. + R_{-2}^2 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right)^{-2} + \dots \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$\sigma = \varepsilon_1^2 \left[ \sigma_1 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) + \sigma_0 + \sigma_{-1} \left( \ln \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right)^{-1} + \dots \right].$$

После подстановки выражений (12) в (11) и сохранения двух членов ряда интегриро-дифференциальное уравнение (11) преобразуется в два дифференциальных. Первое уравнение получается после приравнивания членов при  $\varepsilon_1^4 \ln 1/\varepsilon_1^2$ , второе следует из равенства членов при  $\varepsilon_1^4$ . Первое дифференциальное уравнение с граничными условиями записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_0^2}{dx^2} = -2\sigma_1, \\ R_0^2(\pm 1) = 0, R_0^2(0) = 1. \end{aligned} \quad (13)$$

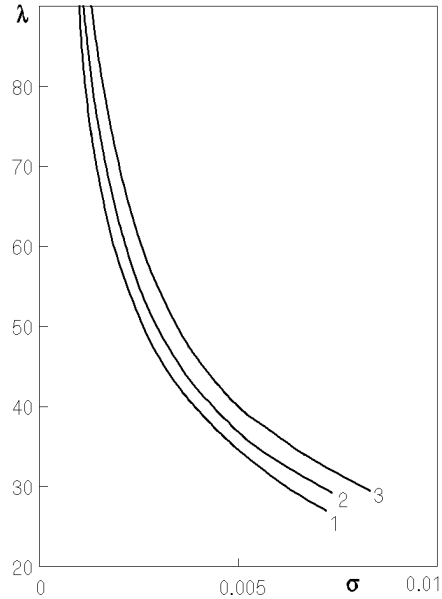


Рис. 2. Зависимость  $\lambda$  от  $\sigma$ : кривые 1–3 –  $M = 0, 0,6, 0,9$  соответственно

Второе уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_{-1}^2}{dx^2} = -2 \left( \sigma_0 + 1 + \ln \frac{1 - M^2}{4} + \frac{1}{1 - x^2} \right), \\ R_{-1}^2(\pm 1) = 0, R_{-1}^2(0) = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

После решения уравнений (13) и (14) получим выражение для профиля каверны и зависимость числа кавитации от удлинения каверны и числа Маха:

$$\begin{aligned} R^2 = \varepsilon_1^2 \left\{ (1 - x^2) + \right. \\ \left. + \frac{x^2 \ln 4 - \ln[(1+x)^{(1+x)}(1-x)^{(1-x)]]}{2 \ln \lambda} \right\}, \quad (15) \\ \sigma = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - M^2}}, \end{aligned}$$

где  $e$  – основание натуральных логарифмов.

Первым приближением для формы каверны (как и в несжимаемой жидкости) является эллипсоид вращения. Из зависимости (15) следует, что при малых числах кавитации добавочный член к эллипсоиду вращения мал, например, при  $\lambda = 14,66$  и  $\sigma = 0,02$  ( $M = 0$ ) отличие формы каверны от эллипсоида не превышает 1 %.

Удлинение каверны в общем случае зависит от числа кавитации и числа Маха. На рис. 2 показаны зависимости  $\lambda$  от  $\sigma$  при  $M = 0$  (несжимаемая жидкость) – кривая 1, при  $M = 0,6$  – кривая 2 и при  $M = 0,9$  – кривая 3. Из рис. 2 видно, что

при постоянном числе кавитации  $\sigma$  с ростом числа Маха удлинение каверны  $\lambda$  увеличивается; при постоянном значении удлинения каверны при увеличении числа Маха число кавитации растет. По мере уменьшения числа кавитации влияние сжимаемости на удлинение каверны становится незначительным, что согласуется с [2,18].

## 2. КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЗА ТОНКИМИ КОНУСАМИ

Рассмотрим кавитационное обтекание тонкого конуса дозвуковым потоком по схеме Рябушинского (рис. 3): начало системы координат  $x, r$  поместим в вершину конуса, линейные размеры отнесем к радиусу его основания (радиус основания конуса равен единице),  $l$  – высота конуса,  $\alpha$  – угол полураствора,  $L_k$  – длина каверны,  $l + L_k$  и  $2l + L_k$  – координаты основания и вершины замыкающего конуса,  $L = 2l + L_k$  – полная длина. Считаем, что конус и каверна имеют одинаковый порядок тонкости  $\varepsilon$ , равный отношению радиуса основания конуса к его высоте ( $\varepsilon = 1/l = \operatorname{tg} \alpha$ ). По координате  $x$  радиус  $R_1$  конуса-кавитатора и замыкателя изменяется как  $R_1 = \varepsilon x$  и  $R_1 = \varepsilon(L - x)$ . Профиль каверны определим в виде изменения ее радиуса по горизонтальной координате:  $R(x)$ . Интегродифференциальное уравнение для профиля каверны (9) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{u'^2}{2u} + u'' \ln \frac{(1 - M^2)u}{4x(L - x)} - \quad (16) \\ & - \int_0^l \frac{u_1''(x_1) - u''(x)}{|x - x_1|} dx_1 - \int_l^{l+L_k} \frac{u_1''(x_1) - u''(x)}{|x - x_1|} dx_1 - \\ & - \int_{l+L_k}^L \frac{u_1''(x_1) - u''(x)}{|x - x_1|} dx_1 = 2\sigma, \\ & u = R^2, \quad u_1 = R_1^2, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_1'(L) = 0. \end{aligned}$$

К уравнению (16) добавляются граничные условия

$$\begin{aligned} x = l : R = 1, \quad R' = \varepsilon, \\ x = l + L_k : R = 1, \quad R' = -\varepsilon. \end{aligned}$$

Решение для всей области течения ищем в виде разложения в асимптотические ряды с малым параметром  $\varepsilon$ :

$$R^2 = \varepsilon^2 \left[ R_0^2 + R_{-1}^2 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon^2} \right)^{-1} + \right.$$

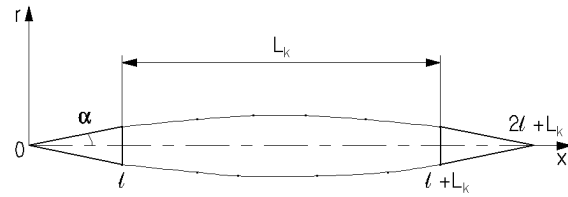


Рис. 3. Схема Рябушинского для кавитационного обтекания тонкого конуса

$$+ R_{-2}^2 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon^2} \right)^{-2} + \dots \Big], \quad (17)$$

$$\sigma = \varepsilon^2 \left[ \sigma_1 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon^2} \right) + \sigma_0 + \sigma_{-1} \left( \ln \frac{1}{\varepsilon^2} \right)^{-1} + \dots \right].$$

После подстановки выражений (17) в (16) и сохранения двух членов ряда интегродифференциальное уравнение (16) преобразуется в два дифференциальных. Первое уравнение получается после приравнивания членов при  $\varepsilon^4 \ln 1/\varepsilon^2$ , второе следует из равенства членов при  $\varepsilon^4$ . Первое дифференциальное уравнение с граничными условиями записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} = -2\sigma_1,$$

$$R_0^2(l) = l^2, \quad R_0^2(l + L_k) = l^2, \quad \left. \frac{R_0^2}{dx} \right|_{x=l} = 2l. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) имеет вид

$$\begin{aligned} R_0^2 &= \sigma_1(a - x)(x - b), \\ \sigma_1 &= \frac{2l}{L_k}, \quad a = \frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{lL}{2}}, \\ b &= \frac{L}{2} - \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{lL}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Второе дифференциальное уравнение с граничными условиями можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 R_{-1}^2}{dx^2} = \frac{\sigma_1(a - b)^2}{2(a - x)(x - b)} - \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & -2\sigma_1 \ln \left[ \frac{\sigma_1(1 - M^2)(a - x)(x - b)}{4} \right] - 2 \ln[x(L - x)] + \\ & + 2(\sigma_1 + 1) \ln[(x - l)(l + L_k - x)] - 2(\sigma_1 + \sigma_0), \end{aligned}$$

$$R_{-1}^2(l) = 0, \quad R_{-1}^2(l + L_k) = 0, \quad \left. \frac{dR_{-1}^2}{dx} \right|_{x=l} = 0.$$

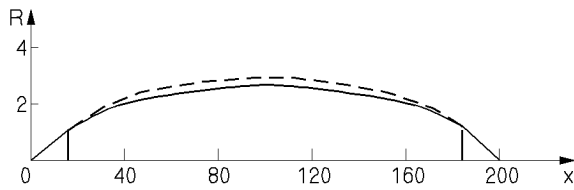


Рис. 4. Профиль каверны для конуса  $\alpha = 5^\circ$ :  
штриховая линия - первое приближение;  
сплошная линия - второе приближение

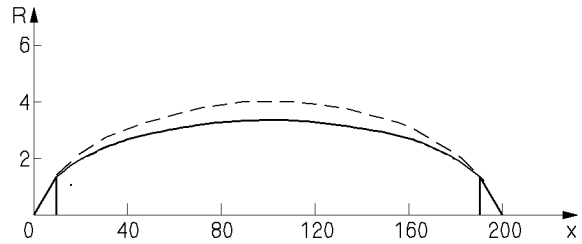


Рис. 5. Профиль каверны для конуса  $\alpha = 10^\circ$ :  
штриховая линия - первое приближение;  
сплошная линия - второе приближение

Решение уравнения (20) имеет вид

$$R_{-1}^2 = \frac{C_1 x^2}{2} + \sigma_1 \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \times$$

$$\times [(a-x) \ln(a-x) - (x-b) \ln(x-b)] - (L-x)^2 \times$$

$$\times \ln(L-x) + (1 + \sigma_1) \times$$

$$\times [(l + L_k - x)^2 \ln(l + L_k - x) + (x-l)^2 \ln(x-l)] -$$

$$-x^2 \ln x + C_2 x + C_3, \quad (21)$$

$$C_1 = \sigma_1 \sqrt{1 + \sigma_1} \ln \frac{a-l}{l-b} + 2\sigma_1 \ln \frac{l + L_k}{2L_k} + 4 \ln \frac{l + L_k}{L_k},$$

$$C_2 = -\frac{C_1 L}{2},$$

$$C_3 = -\frac{C_1 l^2}{2} - \frac{\sigma_1 L_k}{2} [(l-b) \ln(l-b) -$$

$$-(a-l) \ln(a-l)] + (l + L_k)^2 \ln(l + L_k) -$$

$$-(1 + \sigma_1) L_k^2 \ln L_k + l^2 \ln l - C_2 l,$$

$$\sigma_0 = -\frac{C_1}{2} - \sigma_1 \left[ 1 + \ln \frac{\sigma_1 (1 - M^2)}{4} \right].$$

Из уравнений (17), (19) и (21) можно определить форму каверны и число кавитации. Порядок расчета следующий: в первую очередь задается угол полураствора  $\alpha$ , определяется высота конуса  $l$ , равная  $\text{ctg } \alpha$ , задается длина каверны  $L_k$  или общая длина  $L$  в долях радиуса основания конуса, затем по формулам (19) и (21) при заданном числе Маха определяются коэффициенты  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$  для числа кавитации и функции  $R_0^2$  и  $R_{-1}^2$  для профиля каверны. Число Маха влияет на число кавитации через коэффициент  $\sigma_0$ .

На рис. 4 штриховой линией отмечено первое приближение профиля каверны за конусом с углом  $\alpha$ , равным  $50^\circ$ , величина  $L$  равна 200; сплошной линией отмечено второе приближение. Из рисунка видно, что второе приближение мало отличается от первого, то есть вторые члены асимптотического ряда (17) малы по сравнению с первыми. Рисунки 5 и 6 аналогичны рис. 4 и относятся к

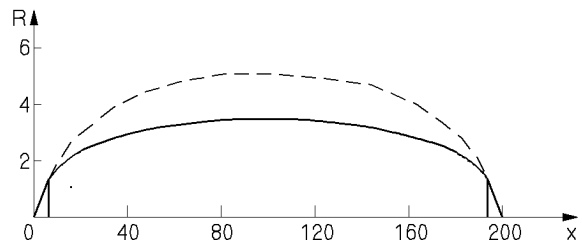


Рис. 6. Профиль каверны для конуса  $\alpha = 15^\circ$ :  
штриховая линия - первое приближение;  
сплошная линия - второе приближение

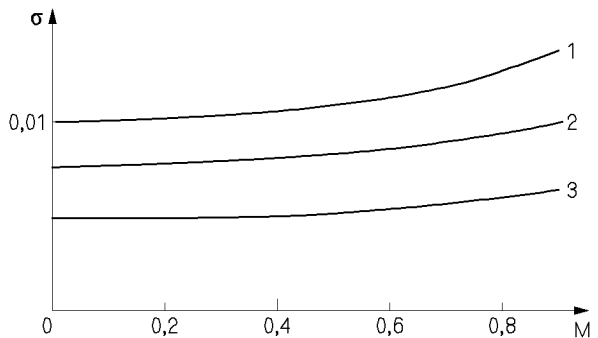


Рис. 7. Зависимость  $\sigma$  от  $M$  для конусов с углами полураствора  $\alpha$ :  
кривые 1 - 3 -  $\alpha = 15^\circ, 10^\circ, 5^\circ$

конусам  $\alpha = 10^\circ$  и  $15^\circ$  соответственно. Для этих конусов второе приближение более заметно отличается от первого. Можно сделать вывод, что разница между первым и вторым приближением формы каверны уменьшается при стремлении значения тонкости конуса  $\epsilon$  к значению тонкости каверны  $1/\lambda$ .

На рис. 7 приведен пример зависимости числа кавитации от числа Маха для конусов с разными углами полураствора:  $\alpha = 15^\circ$  - кривая 1,  $\alpha = 10^\circ$  - кривая 2,  $\alpha = 5^\circ$  - кривая 3, величина  $L$  постоянна и равна 200 для каждого конуса. Таким образом, для заданного конуса при неизменной длине  $L$  и  $L_k$  с увеличением числа Маха профиль каверны

остається незмінним, а число кавітації росте. Такий характер залежності числа кавітації від числа Маха відповідає рис. 2, із якого слідує, що в дозвуковому потоці при постійній величині  $\lambda$  з ростом числа Маха величина  $\sigma$  росте. Визначимо коефіцієнт кавітаційного опору тонкого конуса. Застосовуючи кінематичне і динамічне граничні умови (2) на конусі і проводячи перетворення, аналогічні перетворенням розділу 1, отримуємо вираз для коефіцієнта тиску на його поверхні:

$$C_p = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2, \quad (22)$$

де  $C_p = 2(P_{\text{кон}}^* - P_0^*) / \rho_0 V_0^2$  – коефіцієнт тиску;  $P_{\text{кон}}^*$  – тиск на поверхні конуса. Запишемо вираз потенціалу (8) поблизу поверхні конуса, лінійні розміри віднесемо до радіуса його основи, для форми каверни візьмемо перше наближення (19):

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{S'_{\text{кон}}(x)}{4\pi} \ln \frac{(1-M^2)R^2}{4x(L-x)} - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_0^l \frac{S'_{\text{кон}}(x_1) - S'_{\text{кон}}(x)}{|x-x_1|} dx_1 - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_l^{l+L_k} \frac{S'_{\text{кав}}(x_1) - S'_{\text{кон}}(x)}{x_1-x} dx_1 - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{l+L_k}^L \frac{S'_{\text{зам}}(x_1) - S'_{\text{кон}}(x)}{x_1-x} dx_1. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} S'_{\text{кав}}(x) &= \pi \varepsilon^2 \sigma_1 (a + b - 2x), \\ S'_{\text{кон}}(x) &= 2\pi \varepsilon^2 x, \\ S'_{\text{зам}}(x) &= -2\pi \varepsilon^2 (L - x), \end{aligned}$$

де  $S'_{\text{кав}}(x), S'_{\text{кон}}(x), S'_{\text{зам}}(x)$  – похідна по  $x$  від площі поперечного перерізу каверни, конуса-кавітатора і замикача відповідно.

В виразі (22) входять компоненти збуреної швидкості на поверхні конуса  $v_x = \partial \varphi / \partial x$  і  $v_r = \partial \varphi / \partial r$ , визначимо їх із співвідношень (23). Після диференціювання і проведення перетворень компоненти швидкості запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} v_x = & \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \ln \frac{(1-M^2)x\varepsilon^2}{4(L-x)} + (\sigma_1 + 1) \ln \frac{l+L_k-x}{l-x} \right], \\ v_r = & \varepsilon \end{aligned} \quad (24)$$

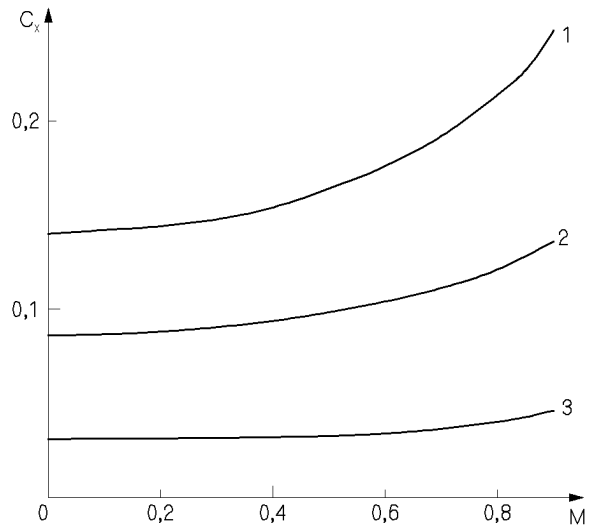


Рис. 8. Залежність  $C_x$  від  $M$  для конусів з кутами напівраствора  $\alpha$ : криві 1–3 –  $\alpha = 15^\circ, 10^\circ, 5^\circ$

Підставимо формули (24) в (22) і отримаємо вираз для коефіцієнта тиску на поверхні конуса:

$$\begin{aligned} C_p = & \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ -\ln \frac{(1-M^2)x\varepsilon^2}{4(L-x)} - \right. \\ & \left. - (\sigma_1 + 1) \ln \frac{l+L_k-x}{l-x} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

На вершині ( $x = 0$ ) і на основі конуса ( $x = l$ ) горизонтальна складова швидкості  $v_x$  і коефіцієнт тиску  $C_p$  мають слабку логарифмічну особливість, яка інтегрується по  $x$ . Коефіцієнт кавітаційного опору  $C_x$ , рівний відношенню сили опору до швидкісного напору і площі основи конуса, пов'язаний з коефіцієнтом тиску залежністю

$$C_x = 2\varepsilon \int_0^l C_p R_{\text{кон}}(x) dx + \sigma, \quad (26)$$

де  $R_{\text{кон}}(x) = \varepsilon x$  – радіус поперечного перерізу конуса. Після підстановки співвідношення (25) в (26) і інтегрування отримуємо вираз для коефіцієнта кавітаційного опору конуса:

$$\begin{aligned} C_x = & \varepsilon^2 \left[ \ln \frac{4}{(1-M^2)\varepsilon^2} - 1 - \frac{2l}{L_k} \ln \frac{l+L_k}{l} + \right. \\ & \left. + \frac{L^2}{l^2} \ln \frac{L_k L}{l+L_k} \right] + \sigma. \end{aligned} \quad (27)$$

На рис. 8 приведен пример зависимости коэффициента кавитационного сопротивления от числа Маха для конусов с разными углами полураствора:  $\alpha = 15^\circ$  – кривая 1,  $\alpha = 10^\circ$  – кривая 2,  $\alpha = 5^\circ$  – кривая 3, величина  $L$  постоянна и равна 200 для каждого конуса. Характер зависимостей  $C_x(M)$  (рис. 8) соответствует зависимостям  $\sigma(M)$  (рис. 7), что является следствием закона сохранения импульса, примененного к плоскости, проходящей через миделевое сечение каверны. Закон сохранения импульса можно записать в следующей форме [20]:

$$R_k = \sqrt{\frac{C_x}{k\sigma}}, \quad (28)$$

где  $R_k$  – радиус миделевого сечения каверны, отнесенный к радиусу основания кавитатора;  $k$  – коэффициент, величина которого при малых числах кавитации близка к 1; в первом приближении зависимостью  $k$  от числа Маха можно пренебречь. Решение для тонких конусов показало, что при постоянной величине  $L_k$  (или  $L$ ) с изменением числа Маха величина  $R_k$  не изменяется, тогда в соответствии с формулой (28) зависимости  $C_x(M)$  и  $\sigma(M)$  должны удовлетворять соотношению

$$\frac{C_x(M)}{\sigma(M)} = \text{const}, \quad (29)$$

где константа является функцией  $\alpha$  и  $L_k$ . Вычисления показали, что соотношение (29) выполняется с достаточной точностью для значений чисел Маха, находящихся в диапазоне  $0 \leq M \leq 0,8$ . Сравним результаты, полученные по теории тонкого тела, с результатами численного расчета Л. Г. Гузевского для несжимаемой жидкости. В [21] представлены аппроксимационные зависимости для размеров каверны Рябушинского за кавитаторами, угол полураствора которых изменяется в пределах  $15^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  ( $1/12 \leq \alpha \leq 1/2$  в обозначениях [21], где  $\alpha\pi$  – угол полураствора). Аппроксимационная зависимость для коэффициента  $k$  имеет вид

$$k = \frac{1 + 50\sigma}{1 + 56,2\sigma}. \quad (30)$$

Зависимость коэффициента сопротивления конусов от числа кавитации и угла полураствора конуса  $\alpha\pi$  аппроксимируется следующим образом:

$$C_x = C_{x0} + (0,524 + 0,672\alpha)\sigma, \quad (31)$$

$$C_{x0} = 0,5 + 1,81(\alpha - 0,25) - 2(\alpha - 0,25)^2,$$

$$1/12 \leq \alpha \leq 1/2.$$

Табл. 1.

$\sigma$	0,0298	0,0172	0,0096
$L_k$	50	100	200
$L'_k$	52,9	98,2	186,4
$R_k$	2,35	2,97	3,72
$R'_k$	2,40	3,06	3,99
$\lambda$	10,65	16,83	26,84
$\lambda'$	11,01	16,02	23,30
$C'_x$	0,136	0,139	0,141
$C''_x$	0,160	0,153	0,148

Аппроксимационная формула для длины каверны, отнесенной к радиусу основания конуса, имеет вид

$$L_k = 2 \left[ \frac{1}{\sigma} - g(\alpha) \right] \sqrt{C_x \ln \frac{1}{\sigma}}, \quad (32)$$

$$g(\alpha) = \frac{4(1 - 2\alpha)}{1 + 144\alpha^2}.$$

Формула для радиуса миделя каверны совпадает с формулой (28). Удлинение каверны за конусами выражается аппроксимационной формулой

$$\lambda = [1, 1 - g(\alpha)\sigma] \sqrt{k \frac{1}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma}}. \quad (33)$$

Сравниваются значения, полученные по теории тонкого тела при нулевом числе Маха для конуса  $\alpha = 15^\circ$ , со значениями, определяемыми по аппроксимационным формулам (28), (30)–(33). Сравнение производится следующим образом. Задаются значения длины каверны  $L_k$ . По формулам (17), (19), (21) и (27) определяются: радиус миделя  $R_k$ , удлинение каверны  $\lambda$ , число кавитации  $\sigma$ , коэффициент кавитационного сопротивления  $C_x$ . Для числа кавитации  $\sigma$  по аппроксимационным формулам (28), (30) – (33) рассчитываются значения  $k', C'_x, R'_k, L'_k, \lambda'$  (величины имеют штриховой индекс), которые сравниваются с  $C_x, R_k, L_k, \lambda$ .

Из результатов сравнения для конуса  $\alpha = 15^\circ$  при одинаковых числах кавитации  $\sigma$ , представленных в табл. 1, следует, что значения, полученные по теории тонкого тела, согласуются с численным расчетом [21]. Однако наблюдается расхождение в характере зависимости коэффициента кавитационного сопротивления конуса  $C_x$  от числа кавитации  $\sigma$ . По численному расчету [21] с уменьшением  $\sigma$  величина  $C_x$  уменьшается (характерная зависимость для кавитационных течений). Зависимость, рассчитанная по теории тонкого тела, имеет противоположный характер. Расхождение можно объяснить погрешностью результатов,

Табл. 2.

$L_k$	50	100	200
$\sigma$ $\alpha = 10^\circ$	0,0235	0,0134	0,0074
$C_x$ $\alpha = 10^\circ$	0,0894	0,0884	0,0881
$R_k$ $\alpha = 10^\circ$	2,11	2,72	3,54
$\sigma$ $\alpha = 5^\circ$	0,0147	0,0083	0,0045
$C_x$ $\alpha = 5^\circ$	0,0381	0,0352	0,0337
$R_k$ $\alpha = 5^\circ$	1,71	2,17	2,84

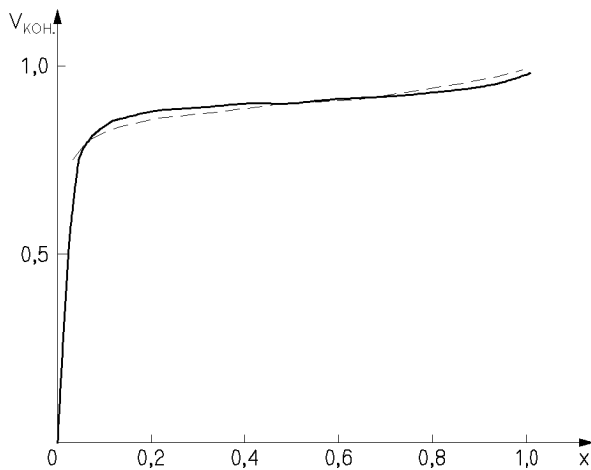


Рис. 9. Распределение скорости вдоль поверхности конуса  $\alpha = 15^\circ$ :  
штриховая линия – расчет по теории тонкого тела;  
сплошная линия – расчет по [21]

полученных по теории тонкого тела для конуса  $\alpha = 15^\circ$ . Следует ожидать, что для более тонких конусов  $\alpha = 10^\circ$  и  $\alpha = 5^\circ$  расчет по этой теории даст более точные значения  $C_x$ .

Это предположение подтверждается данными, представленными в табл. 2, (при тех же значениях  $L_k = 50, 100, 200$  рассчитаны величины  $\sigma$ ,  $C_x$  и  $R_k$  для конусов  $\alpha = 10^\circ$  и  $\alpha = 5^\circ$ ). В табл. 2 зависимости  $C_x(\sigma)$  имеют обычный характер, а величины  $R_k$  соответствуют формуле (28). Рассмотрение результатов, представленных в табл. 1 и 2, показывает, что теорию тонкого тела можно принять для расчета дозвуковых кавитационных течений за конусами, угол полураствора которых изменяется в пределах  $0^\circ < \alpha \leq 15^\circ$ .

По компонентам возмущенной скорости (24)

можно вычислить величину скорости обтекания на поверхности конуса  $V_{кон}$ , которая определяется следующим образом ( $V_{кон}$  отнесена к скорости  $V_0$ ):

$$V_{кон} = \sqrt{(1 + v_x)^2 + v_r^2}. \quad (34)$$

Распределение  $V_{кон}$  при нулевом числе Маха по поверхности конуса  $\alpha = 15^\circ$ , рассчитанное по формулам (24) и (34) для числа кавитации  $\sigma = 0,01 (L = 200)$ , представлено на рис. 9 штриховой линией (координата  $x$  отнесена к высоте конуса  $l$ ). Сплошной линией отмечено распределение скорости, полученное в [21] для тех же значений угла полураствора конуса  $\alpha$  и числа кавитации  $\sigma$ . Из рис. 9 следует, что на большей части конуса скорость обтекания, определенная по теории тонкого тела, близка к скорости, рассчитанной численным методом.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование, проведенное на основе теории тонкого тела, показало, что в дозвуковом потоке влиянием числа Маха на форму каверны можно пренебречь – каверна с достаточной точностью описывается эллипсоидом вращения (как и в несжимаемой жидкости). Эллипсоид вращения получается как из внешнего решения (15) – при пренебрежении размерами кавитатора по сравнению с размерами каверны, так и из решения для тонких конусов, когда порядок тонкости кавитатора и каверны одинаков. Эллипсоидальность первого приближения формы каверны для тонких конусов следует из решений (19). При переносе начала системы координат в середину длины каверны соотношения (19) примут вид

$$R_0^2 = \sigma_1(a_1^2 - x_1^2), \quad a_1 = a - \frac{L}{2}.$$

Число Маха в основном влияет на величину кавитационного сопротивления кавитатора (с ростом числа Маха коэффициент сопротивления растет). При неизменной длине каверны при увеличении числа Маха в соответствии с законом сохранения импульса число кавитации увеличивается. На протяжении ряда лет в Институте гидромеханики НАН Украины в отделе Ю.Н.Савченко проводятся экспериментальные исследования развитых кавитационных течений в сжимаемой жидкости. Экспериментальные данные о кавитационных течениях в дозвуковом потоке опубликованы в [11–13] (диапазон чисел Маха  $0, 1 \leq M \leq 0,93$ ). Экс-



периментальные исследования подтвердили вывод об эллипсоидальности формы каверны.

1. Якимов Ю.Л. Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1981. – N 3. – С. 3 – 10.
2. Якимов Ю.Л. Тонкая кавитационная каверна в сжимаемой жидкости // Проблемы современной механики. – М.: Изд-во МГУ. – 1983. – Ч.1. – С. 66–73.
3. Васин А.Д. Тонкие осесимметричные каверны в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. N 5. – С. 174 – 177.
4. Васин А.Д. Тонкие осесимметричные каверны в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1989. – N 1. – С. 179 – 181.
5. Серебряков В.В. Асимптотические решения осесимметричных задач обтекания с развитой кавитацией в приближении теории тонких тел // Гидродинамика больших скоростей. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. – 1990. – С. 99 – 111.
6. Серебряков В.В. Асимптотические решения осесимметричных задач до- и сверхзвуковых отрывных течений воды при нулевых числах кавитации // Докл. АН Украины. – 1992. – N 9. – С 66 – 71.
7. Альев Г.А. Отрывное обтекание кругового конуса трансзвуковым потоком воды // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1983. – N 2. – С. 152 – 154.
8. Зигангареева Л.М., Киселев О.М. О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // ПММ. – 1994. – Т. 58. – Вып. 4. – С. 93 – 107.
9. Васин А.Д. Расчет осесимметричных каверн за диском в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. – 1996. – N 2. – С. 94 – 103.
10. Васин А.Д. Расчет осесимметричных каверн за диском в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. – 1997. – N 4. – С. 54 – 62.
11. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н., Серебряков В.В. Экспериментальная проверка асимптотических формул для осесимметричных каверн при  $s + 0$  // Проблемы гидродинамики больших скоростей. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. – 1993. – С. 225 – 230.
12. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н., Серебряков В.В. Экспериментальное исследование развитых кавитационных течений при дозвуковых скоростях обтекания // Докл. АН Украины. – 1993. – N 2. – С. 64 – 69.
13. Savchenko Yu.N. Investigation of high-speed supercavitating underwater motion of bodies // High Speed Body Motion in Water. AGARD-R-827. – 1998. – Reference 20.
14. Липман Г.В., Рошко А. Элементы газовой динамики. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 518 с.
15. Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. – Л.: Судостроение, 1967. – 387 с.
16. Франкль Ф.И., Карлович Е.А. Газодинамика тонких тел. – М.;Л.: Гостехиздат, 1948. – 175 с.
17. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1969. – 318 с.
18. Григорян С.С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ. – 1959. – Т.23. – Вып.5. – С. 951 – 953.
19. Логвинович Г.В., Серебряков В.В. О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн // Гидромеханика. – 1975. – Вып.32. – С. 47 – 54.
20. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – Киев: Наук. думка, 1969. – 215 с.
21. Гузевский Л.Г. Плоские и осесимметричные задачи гидродинамики со свободными поверхностями. Дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук. – СО АН СССР. – Ин-т теплофизики. – Новосибирск. – 1987. – 300с.