УДК 004.94;681.3

М. В. Синьков, Я.О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, Т. В. Синькова, О. В. Федоренко, Н. О. Городько
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Фундаментальні основи ефективного подання та обробки даних на базі гіперкомплексних числових систем

Розглянуто різні способи отримання гіперкомплексних числових систем (ГЧС), у тому числі методом переходу від нескінченновимірних гіперкомплексних систем шляхом факторизації до скінченновимірних ГЧС. Розглянуто засоби подання та обробки інформації за допомогою ГЧС.

Ключові слова: *гіперкомплексна числова система, подання інформації, ізоморфізм, множинність, факторизація.*

Вступ

Питання ефективного подання інформації на всіх етапах розвитку науки і техніки вважалися найважливішими і привертали увагу фахівців і вчених різних галузей знань. Коли мова йде про форми подання інформації, сьогодні найчастіше подумки звертаємося до математики і це, напевно, правильно. Однак при цьому видається доцільним зазирнути і в «сусідні» науки. До них віднесемо, в першу чергу, хімію та біологію.

Кажуть, що «хімія» навколо нас і скрізь. Вона «проявляється» в твердотільній формі, рідкій і газоподібній. Різноманітність хімічних елементів і можливих реалізацій їх тут надзвичайно велика. І це вже наштовхує на думку про те, що доцільно було б знайти таке правило впорядкування елементів, яке розставляло би на свої місця «складності в хімії». Прийнято вважати, що в неорганічну хімію вміщуються всі відомі елементи, що зведені й упорядковані в так званій періодичній системі, а в органічній хімії розміщені мільйони сполук вуглецю. Сьогодні можна дивуватися тій простоті, яка властива періодичній системі елементів. Цю систему можна вважати однією з перших побудов, виключно цікавих за впорядкованим поданням інформації.

Що ж у цьому плані можна сказати про подання інформації в біології? Виявляється, що варіантів структур і взаємодій досить не багато. Так, усі молекули ДНК (дезоксирибонуклеїнова кислота) та РНК (рибонуклеїнова кислота) складаються з конструкцій, що базуються на чотирьох елементах — тимін, цитозин, гуанін, аденін. Ці елементи в ДНК та РНК групуються в трійки — триплети, кількість яких з урахуванням їхньої комутативності по три з чотирьох, можуть дати шістдесят чотири основні комбінації. Природою створено так, що кожен триплет кодує одну єдину амінокислоту. При цьому інформація, що зчитується з ДНК, передається через інформаційну РНК і транспортну РНК, що забезпечує перенос амінокислот на рибосому та формування в ній білків.

Цікавий факт полягає в тому, що можна сконструювати шістдесят чотири комбінації триплетів, але при цьому реально в білках жива природа використовує тільки двадцять триплетів, яким відповідає двадцять амінокислот, що складають основу всіх білків.

Це по суті все, що створила природа, щоб забезпечити нескінченну різноманітність всього живого і при цьому надати цим живим суб'єктам потрібні швидкісні та надійнісні характеристики, а також стабільність у різних кліматичних умовах.

Звертає на себе увагу те, що, говорячи про характеристики біологічних структур, ми повторюємо ті ж характеристики, які властиві засобам подання та обробки даних в інших галузях науки.

Тепер підійдемо ближче до математики та її ролі у поданні і обробці даних. На ранніх етапах перші обчислювальні засоби базувалися на позиційних системах і працювали переважно в двійковій системі числення. «Новатори» наполягали на перевагах трійкової системи числення, і в літературі навіть було показано, що за певних умов мінімум апаратних витрат забезпечує позиційна система з основою $e = 2{,}71\ldots$ На тих самих ранніх етапах фігурували вісімкова, шістнадцяткова і, навіть, двійково-п'ятіркова системи числення. Особливості позиційних систем числення очевидні, але в них є труднощі у виявленні та виправленні помилок, що змушує шукати інші шляхи подання інформації.

Суттєву роль у системах обробки інформації грали і продовжують грати непозиційні системи числення, в основі яких лежить модулярна арифметика та теоретико-числові властивості порівнянь.

Однією з найважливіших переваг цієї системи є легко досяжна надмірність, що забезпечує високі надійнісні характеристики. З літератури відомо про дослідження арифметичних кодів, націлених на розв'язання тієї ж задачі. Тут не ставиться за мету перелічити все те, що зроблено вченими в цьому напрямку, і тому не зупинятимемося на відомій системі подання та обробки даних, що називається системою Фібоначчі, та інших системах.

Говорячи про стратегічні шляхи і форми подання та обробки даних, необхідно відзначити наступні напрями, до яких належать системи дійсних чисел і системи комплексних чисел. З позицій загальної алгебри і дійсні, і комплексні системи є полями. Це означає, що в цих системах є комутативність і асоціативність, відсутні дільники нуля, і в них виконуються всі обчислювальні операції. Виявляється далі, що поле комплексних чисел може бути розширене, але вже у двох самостійних напрямках — комутативному і некомутативному. Ці розширення комплексних чисел різноманітні і мають як науковий, так і практичний інтерес. Ідучи шляхом розширень, можна побудувати системи другої, третьої та інших вимірностей. Усі вони розрізняються видами вихідних елементів, таблицями множення та багатьма іншими особливостями.

Пізнання цих систем має з одного боку глибоке теоретичне значення, а вивчення основ «числової світобудови» спрямоване на використання отриманих систем для розв'язання практичних задач. Це висуває на передній план задачу, пов'язану з вивченням внутрішніх структур цих систем і їхньою розкладністю на прямі суми дійсних чисел, комплексних чисел, кватерніонів і радикалів.

Слід зауважити, що ефективним засобом підвищення продуктивності сучасних комп'ютерних систем є організація, так званої, векторної обробки, для забезпечення якої часто доводиться штучно структурувати оброблювані масиви даних. У той же час гіперкомплексні числові системи (ГЧС) є природною векторною формою подання інформації, що обумовлює її перспективність для використання у високопродуктивних системах.

Множинність і класифікація ГЧС

Гіперкомплексна числова система вимірності n є елементом скінченновимірної алгебри з фіксованим базисом тієї ж вимірності і містить множину чисел такого вигляду:

$$A = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + .. + a_{n-1} e_{n-1}$$

з уведеними за певними законами операціями додавання та множення.

Як показали дослідження, можна побудувати нескінченну множину ГЧС, які відрізняються вимірністю та законами композиції базисних елементів. Властивості різних ГЧС можуть істотно відрізнятися одна від одної, що впливає на використання цих систем для моделювання в науці та техніці. Тому на перший план виходить задача класифікації ГЧС.

Зараз не існує загальноприйнятої класифікації ГЧС. Тому розглянемо найбільш значущі ознаки, за якими можна класифікувати ГЧС:

1) вимірність;
2) належність до класу ізоморфізмів;
3) властивості закону композиції;
4) структурні властивості;
5) канонічність;
6) присутність в базисі одиничного елемента;
7) наявність в системі дільників одиниці;
8) наявність дільників нуля.

Вимірність ГЧС визначається максимальною кількістю лінійно незалежних елементів системи, яка дорівнює кількості елементів в базисі системи. Систему дійсних чисел можна розглядати як одновимірну ГЧС. Система комплексних чисел — двовимірна система. Існують системи будь-якої вимірності — як скінченої, так і нескінченної.

Лінійне перетворення базису ГЧС приводить до базису іншої системи, яка відрізняється від вихідної. Такі системи називаються ізоморфними або еквівалентними відносно лінійного перетворення. В загальному випадку не кожні дві ГЧС ізоморфні.

Відношення ізоморфності розбиває всю множину ГЧС однієї вимірності на деяку кількість класів, які звуться класами ізоморфізмів. Класифікація систем за цією ознакою розподіляє всі системи на класи дуже близьких, а по суті еквівалентних, за властивостями гіперкомплексних систем.

Велике теоретичне і практичне значення має дослідження таких підмножин ГЧС, які знайшли ефективні застосування в науці та техніці зараз і зможуть знайти застосування і в подальшому. До таких підмножин насамперед належать канонічні ГЧС.

Оскільки кількість канонічних ГЧС фіксованої вимірності скінчена, то можна поставити питання про їхній перегляд і класифікацію.

Враховуючи, що в таблиці множення n^2 клітинок, кожна з яких у випадку канонічної системи може бути сформована $(2n+1)$ способами, то всього можна утворити

$$N = (2n+1)^{n^2} \qquad (1)$$

таблиць множення.

Як видно з формули (1), число N дуже швидко зростає зі збільшенням вимірності ГЧС. Тому доцільно переглядати деякі підмножини канонічних систем, які мають важливі застосування. Наприклад, якщо обмежитися комутативними системами, то кількість можливих таблиць множення зменшиться до

$$N_k = (2n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Якщо вимагати виконання умови асоціативності ГЧС, то множина таблиць значно скоротиться. Умова асоціативності зводиться до виконання тотожностей:

$$(e_i e_s)e_k = e_i(e_s e_k), \quad i, j, k = 1, ..., n.$$

Множина таблиць множення містить і такі таблиці, які ізоморфні одна до одної відносно нетривіального лінійного перетворення базису з дійсними коефіцієнтами. Тому дуже важливо перелічити всі ті класи, з яких складається множина таблиць, зазначивши одну з таблиць, як ознаку свого класу ізоморфізму. Саме у вирішенні цього питання і полягає задача переліку ГЧС.

Підсумовуючи все вищесказане, зазначимо, що задача переліку окрім визначення всієї множини ГЧС також передбачає розбиття всієї множини систем на класи ізоморфних відносно лінійного перетворення базису систем з зазначенням для кожного з класів хоча б однієї системи — представника даного класу ізоморфізму. При цьому повинні виконуватися задані властивості множення, які переносяться в характеристики одержаної множини ГЧС. Наприклад, якщо поставлені вимоги комутативності та асоціативності, то одержану множину систем називають комутативно-асоціативною.

Слід виділити в задачі переліку ГЧС такі важливі підзадачі:

— одержання для якогось класу ізоморфізмів, заданого представником, всіх членів цього класу у вигляді таблиць множення;

— пошук для двох ізоморфних ГЧС такого нетривіального лінійного перетворення, відносно якого ці системи ізоморфні.

Результати застосування методу переліку класів ізоморфізмів комутативних ГЧС другої–четвертої вимірності за допомогою перебору канонічних таблиць множення полягають в наступному. Для систем другої вимірності є 6 класів неізоморфних ГЧС, серед яких 3 класи невироджених ГЧС. Для систем третьої вимірності існує 16 класів неізоморфних ГЧС, серед яких 7 класів невироджених ГЧС.

Інший спосіб отримання скінченновимірних ГЧС ґрунтується на переході від нескінченновимірних гіперкомплексних систем шляхом факторизації до скінченновимірних ГЧС. Цей спосіб був запропонований професором М.В. Синьковим як засіб отримання нових знань про ГЧС. В Інституті математики досліджуються нескінченновимірні гіперкомплексні системи, які можуть бути як неперервними, так і дискретними. При цьому труднощів роботи з неперервними гіперкомплексними системами більше, ніж з дискретними гіперкомплексними системами.

Перехід від нескінченновимірних гіперкомплексних систем до скінченновимірних ГЧС дає можливість отримати нові скінченновимірні ГЧС, які не були отримані комбінаторним способом перебору, але в окремих випадках можуть і співпадати з отриманим раніше комбінаторним способом.

Цей метод можна розглядати на такому прикладі. Нехай є деяка група Z — нескінченний ряд цілих чисел. У ній існує множення двох елементів $\delta_n * \delta_m = \delta_{n+m}$.

Факторизація по групі автоморфізмів $B=\{1,-1\}$, іншими словами, зменшення складності групи Z за допомогою відображень, які не виводять за межі групи, дає нескінченновимірну дискретну гіперкомплексну систему $A = Z/B = N \cup \{0\}$. Згортка для цієї гіперкомплексної системи буде мати вигляд: $\delta_n * \delta_m = \frac{1}{2}\delta_{n+m} + \frac{1}{2}\delta_{|n-m|}$.

Обираючи різного вигляду підгрупи з цієї нескінченновимірної, зауважимо що ці підгрупи повинні бути теж нескінченновимірні, виконуємо факторизацію та отримуємо скінченновимірні ГЧС. Можна обрати підгрупи $\{2k, 3k, 4k, ..., Mk, ...\}$. Кількість цих нескінченновимірних підгруп нескінченно. Наприклад, для підгрупи $A_1 = \{2k,\ k \in A\}$ отримаємо ГЧС з таблицею множення вигляду

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

Це — система подвійних чисел, вона була отримана раніше комбінаторним способом.

Для підгрупи $A_2 = \{3k,\ k \in A\}$ отримаємо ГЧС з таблицею множення вигляду

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$\frac{1}{2}(e_1+e_3)$	$\frac{1}{2}(e_1+e_2)$
e_3	e_3	$\frac{1}{2}(e_1+e_2)$	$\frac{1}{2}(e_1+e_2)$

Це нова ГЧС.

Актуальність досліджень полягає в розширені наших знань про гіперкомплексні числові системи. Спочатку будуються штучні структури — нескінченновимірні гіперкомплексні системи, з яких потім отримуємо скінченновимірні ГЧС.

Метод отримання скінченновимірних ГЧС з нескінченновимірних гіперкомплексних систем досліджено, що дозволило створити програмні засоби для автоматизації отримання скінченновимірних ГЧС різної вимірності.

Нові скінченновимірні ГЧС, що були отримані, досліджуються на можливість їхнього розкладання на прямі суми R, C, H, виконання різних операцій у них, що дає можливість використовувати їх при розв'язання практичних задач.

Практичні використання ГЧС

Методи гіперкомплексних числових систем знайшли дуже важливі застосування в теоретичній фізиці. Найбільшу кількість застосувань у технічних науках знайшли кватерніони. Це обумовлено тим, що з їхньою допомогою дуже зручно та ефективно моделювати обертання твердого тіла, в тому числі і навколо декількох осей.

З численних застосувань кватерніонів відзначимо тільки деякі, найбільш важливі: задачі навігації, орієнтації та управління рухом твердого тіла в тривимірному просторі [1–9], в тому числі і під водою [10–11]; комп'ютерна графіка, де необхідно розрахувати, як буде виглядати на екрані тіло, що обертається в багатьох проміжних положеннях для створення ефектів анімації [12–15]; дослідження деформації пружних [16] та еластичних конструкцій [17]; фільтрація зображення на базі кватерніонного перетворення Фур'є [18–22]; обробка кольорового зображення [23].

Висновки

На сучасному етапі розвитку математичного моделювання та комп'ютерних обчислень ще більш актуальним стає створення ефективних методів подання інформації. Представлення інформації за допомогою ГЧС має декілька переваг, які дозволяють підвищити якість моделювання.

Переваги подання інформації за допомогою гіперкомплексних числових систем визначаються такими властивостями останніх, яких немає у традиційних систем подання інформації. Насамперед, при застосуванні ГЧС враховуються особливості структури самого об'єкта моделювання, а в багатьох випадках зменшується вимірність систем рівнянь, які описують об'єкти. А це відкриває можливість для використання аналітичних обчислень при моделюванні, що також підвищує ефективність останнього.

1. *Панов А.П.* О новых ненормированных кватернионах вращения твердого тела / А.П. Панов // Вопросы аналитической механики и ее применения. — Труды Института математики НАН Украины. — К., 1999. — Т. 26. — С. 300–329.

2. *Про автоматизоване* проектування системи програмно-апаратних засобів на базі гіперкомплексних чисел для задач орієнтації твердого тіла. Частина 1 / М.Ф. Будьонний, Я.О. Каліновський, А.П. Панов [та ін.] // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 4. — С. 73–83.

3. *Noise* Smoothing for VR Equipment in the Quaternion Space [Електронний ресурс] / M. Kim, C. Hsieh, M. Wang [et al.]. — Режим доступу: www_ivri.me.uic.edu/events /symp96/papers/IVRI31.html.

4. *Ickes B.P.* A New Method for Performing Digital Control System Attitude Computations Using Quaternions / B.P. Ickes // AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics. — 1970. — Vol. 8, N 1. — P. 13–17.

5. *Ickes B.P.* Use of Quaternions to Perform Attitude and Control Computations / B.P. Ickes // R:SEA-8029. — Logicon Inc., San Pedro, Calif., 1967.

6. *Ignagni M.B.* On the Orientation Vector Differential Equation in Strapdown Inertial Systems / M.B. Ignagni // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 1994. — Vol. 30, N 4. — P. 1076–1081.

7. *Ignagni M.B.* Optimal Strapdown Attitude Integration Algorithms / M.B. Ignagni // AIAA Journal of Guadance, Control and Dynamics. — 1990. — Vol. 13, N 2. — P. 363–369.

8. *Davailus G.* The Application of Quaternion Algebra to Gyroscopic Motion, Navigation, and Guidance Space [Електронний ресурс] / G. Davailus, B. Newman. — Режим доступу: www.aiaa.org/agenda.cfm?lumeetingid=1089&viewcon=agenda&formatview=1 &DateGet=15-Aug-05 (2005).

9. *Mukundan R.* Quaternions: From Classical Mechanics to Computer Graphics, and Beyond / R. Mukundan // Proceedings of the 7th Asian Technology Conference in Mathematics. — 2002. — P. 97–106.

10. *Pletinckx D.* Quaternion Calculus as a Basic Tool in Computer Graphics / D. Pletinckx // The Visual Computer. — 1989. — Vol. 5, N 1/2. — P. 2–13.

11. *Shoemake K.* Animating Rotation with Quaternion Curves / K. Shoemake // Computer Graphics (SIGGRAPH '85 Proceedings held in San Francisco, CA). — 1985. — Vol. 19, N 3. — P. 245–254.

12. *Shoemake K.* Animation with quaternions / K. Shoemake // ACM SIGGRAPH Course Notes 10, Computer Animation: 3D Motion, Specification and Control. — 1987.

13. *Samareh J.A.* Application of Quaternions for Mesh Deformation / J.A. Samareh // 8-th International Conf. on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations. — Honolulu (Hawaii). — 2002.

14. *Hestenes D.* Modeling Elastically Coupled Rigid Bodies with Geometric Algebra / D. Hestenes, E. Fasse // Preprint. — 2001. — P. 13.

15. *Bas P.* Utilisation de la Transformee de Fourier Quaternionique en Tatouage D'images Couleur [Електронний ресурс] / P. Bas, Le Bihan N., J.M. Chassery. — Режим доступу: http://www.lis.inpg.fr/pages_perso/bas/ (2003).

16. *Bas P.* Color Image Watermarking using Quaternion Fourier Transform [Електронний ресурс] / P. Bas, Le Bihan N., J.M. Chassery. — Режим доступу: http://www.lis.inpg.fr /pages_perso/ bas (2003).

17. *Bulow T.* Quaternionic Gabor Filters for Local Structure Classification [Електронний ресурс] / T. Bulow, G. Sommer. — Режим доступу: ieeexplore.ieee.org/xpl/abs_free. jsp?arNumber= 711271 (1998).

18. *Felsberg M.* Fast Algorithms of Hypercomplex Fourier Transforms [Електронний ресурс] / M. Felsberg, T. Bulow, G. Sommer. — Режим доступу: //www.isy.liu.se/~mfe/ publications.html (2001).

19. *Felsberg M.* Non-commutative Hypercomplex Fourier Transforms of Multidimensional Signals Transforms [Електронний ресурс] / M. Felsberg, T. Bulow, G. Sommer. — Режим доступу: //www.isy.liu.se/~mfe/publications.html (2001).

20. *Sangwine S.J.* Colour in Image Processing / S.J. Sangwine // Electronics & Communication Engineering Jour. — 2000. — Vol. 12, N 5. — P. 211–219.

21. *Coppersmith D.* Weakness in Quaternion Signatures / D. Coppersmith // J. Cryptology. — 2000. — P. OF1–OF9.

22. *Ball R.S.* The Theory of Screws / R.S. Ball. — [1-st ed.] // Cambridge University Press, 1900.

23. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые его приложения к геометрии и механике / А.П. Котельников. — Казань, 1895. — 214 с.

Надійшла до редакції 01.06.2010