УДК 004.942

М. В. Синьков, Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова,
Т. В. Синькова, О. В. Федоренко
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Розвиток основ теорії гіперкомплексних числових систем і алгебр

На шляху розвитку вказаного напрямку тісно сплітаються термінологія та понятійний зміст алгебри і гіперкомплексних числових систем. Вивченню цього питання та зв'язаних з ним особливостей присвячено матеріал цієї статті.

Ключові слова: *гіперкомплексна числова система, алгебра, комплексні числа, кватерніони, бікватерніони.*

Вступ

Автори статті багато років працюють над теорією гіперкомплексних числових систем [1]. При цьому в літературі помічена неоднаковість визначень різних авторів. Одні кажуть, що ми маємо справу з алгебрами, приділяючи увагу на вигляд елемента, правила додавання та множення елементів. Це ж, по суті, властиво гіперкомплексним числовим системам, тому можна зустріти у великих математиків висловлювання такого типу: це алгебра або гіперкомплексна числова система. Автори намагаються більш глибоко вникнути в ці поняття, в зв'язку з цим намітили випуск двох статей, з яких перша розглядає етапи розвитку гіперкомплексних числових систем, як предмета, найбільш близького нам, а в наступній буде наведено значну кількість висловлювань і визначень алгебри і гіперкомплексної числової системи.

У висновку другої статті буде дано визначення гіперкомплексної числової системи (ГЧС), який, з точки зору авторів, найбільш точно відображає справжню сутність цього поняття.

Постановка задачі полягає у визначені співвідношення поняття алгебри та гіперкомплексної числової системи в процесі розвитку теоретичних досліджень і виявлення їхньої практичної спрямованості.

Формування поняття гіперкомплексной числової системи

Гіперкомплексні числові системи є розширенням поля комплексних чисел. Вивчення цих розширень є новим науковим і практичним напрямком, розвиток якого зустрічав значні труднощі і вимагав зусиль провідних фахівців. Цій роботі присвятили свої праці: У. Гамільтон, А. Келі, Д. Сильвестр, Б. Пірс, Ч. Пірс, Е. Лагерр, А. Пуанкаре, Ш. Ерміт, Р. Грассман, Р. Ганкель, Д. Вейерштрас, Р. Дедекінд, Р. Фробеніус, А. Кліффорд та інші.

Поняття про число розвивалось і розширювалося, починаючи з глибокої старовини, відповідно до практичних і теоретичних потреб. Так, на цьому шляху виникли числа натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні, алгебраїчні, трансцендентні. Всі ці числа називаються дійсними. При цьому слід зазначити, що вони є одновимірними.

У 1545 р. вийшла в світ книга Д. Кардано «Велике мистецтво» [2]. У ній були введені комплексні числа, які є числами двовимірними. Цікаво зазначити, що вони виникли при розв'язанні системи рівнянь, в якій всі праві частини і коефіцієнти — числа дійсні.

У цей же період почалося вивчення методів розв'язання кубічних рівнянь. До розв'язання цієї задачі певний вклад вніс Н. Тарталья. З'ясувалося, що комплексні числа зустрічаються і при розв'язанні кубічних рівнянь. Формули для їхнього розв'язання відомі під іменами Кардано–Тартальї.

Величезне значення для розвитку алгебри мають роботи Р. Бомбеллі. По суті, він розробив у 1572 р. правила роботи з уявними одиницями. Його знаменита «Алгебра» складалася з п'яти частин [3]. У цій книзі Р. Бомбеллі записує правила для складання, віднімання та множення комплексних чисел. Розвиваючи вчення про комплексні числа, Р. Бомбеллі поліпшив формули Кардана–Тартальї для розв'язання кубічних рівнянь.

Цікава оцінка, яку дав комплексним числам Лейбніц в 1702 р. Він назвав їх «дивом аналізу, чудовиськом світу ідей, амфібією між буттям і небуттям» [4].

Ставлення до уявних величин принципово змінилося після роботи Ж. Даламбера «Досвід нової теорії опору рідин» (1752 р.), де він записав рівняння у вигляді дійсної і уявної частин функції комплексної змінної [5]. У цій роботі вперше з'явилися так звані умови Коші–Рімана для аналітичної функції. Можна вважати, що і алгебраїчний шлях до векторів йшов через завдання механіки.

Поняття вектор почало широко використовуватися в XVI столітті. Воно застосовується для представлення таких фізичних величин, як сила, швидкість та інші, тобто які характеризуються величиною та напрямком.

Зображення комплексних чисел у вигляді векторів на площині з чітким геометричним поясненням дій над комплексними числами вперше зустрічається в роботі датського геодезиста і картографа К. Весселя «Дослід про аналітичне представлення напряму і спроба його застосування, переважно до розв'язання плоских і сферичних трикутників» (1799 р.). Найважливішою особливістю цієї роботи було те, що разом з векторами на площині К. Вессель висунув ідею векторів у просторі та зробив спробу виведення закону множення цих векторів [6].

Думки про геометричне тлумачення операцій над комплексними числами були висловлені так само Ж. Арганом у роботі «Досвід деякого способу представлення уявних величин в геометричних побудовах» (1806 р.). Роботи Ж. Аргана набули найбільшого поширення після публікації «Курсу алгебраїчного аналізу» О. Коші і теорії біквадратичних лишків К. Гаусса [6]. Тому математики XIX століття стали називати площину комплексної змінної «площиною Коші» або «площиною Гауса».

Усі ці роботи можна розглядати як просування до побудови просторової числової системи. І. Кант писав: «Тривимірність виникає від того, що в існуючому світі субстанції діють одна на одну таким чином, що сила цієї дії обернено пропорційна квадрату відстань … з іншого закону виникав би зв'язок з іншими властивостями і вимірами. Наука про всі ці можливі види простору, поза сумнівом, являла б собою вищу геометрію, яку здатний побудувати кінцевий розум … Якщо можливі зв'язки з іншими вимірами, то ймовірно, що вони дійсно існують» [2].

Необхідно зазначити, що поняття чотиривимірного простору цікавить уже в XVIII столітті такі найсвітліші голови людства, як Ж. Даламбер (стаття «Розмірність») і Д. Дідро в їх спільній праці «Енциклопедія або тлумачний словник наук, мистецтв і ремесла» [8].

Про багатовимірність чимало написано Ж. Лагранжем в його роботі «Аналітична механіка» (1788 р.). А про чотиривимірний простір, який, як пише автор — «уявити собі не можливо», пише в 1827 р. А. Мебіус в «Барицентричному численні» [9].

Цікавість до багатовимірності безпосередньо супроводжувалася розвитком алгебраїчних ідей побудови багатовимірних числових систем. Так У. Гамільтон у роботі «Теорія спряжених функцій» (1835 р.) зробив спробу побудови тривимірного аналога комплексних чисел [6]. Він у цій праці строго обґрунтував комплексну числову систему і представлення цих чисел у вигляді пар дійсних чисел або, що рівнозначно, як векторів на площині. Далі він пробував в 1837–1838 рр. побудувати аналітичну теорію для трійок дійсних чисел. Проте всі ці системи мали дільники нуля: $A \neq 0,\ B \neq 0$, але $A \cdot B = 0$.

А. Морган у роботі «Про основу алгебри» (1847 р.) також розглянув тривимірні числа виду: $ae_1 + be_2 + ce_3$ з таблицею множення

e_1	e_2	e_3
e_2	$-e_3$	e_1
e_3	e_1	$-e_2$

Алгебраїчною або числовою системою з елементами наведеного виду працював Ч. Гревс. У статті «Про алгебраїчні триплети» (1847 р.) він показав, що триплет $ae_1 + be_2 + ce_3$ можна представити у вигляді точки тривимірного простору і що триплет за певних умов можна представити у вигляді суми дійсного і комплексного чисел. З цього виходить, що алгебру триплетів можна представити прямою сумою поля дійсних і поля комплексних чисел, що було підтверджено дослідженнями авторів книги по множинності комутативних ГЧС третьої розмірності.

У. Гамільтон встановив наявність дільників нуля в усіх розглянутих алгебр третьої розмірності. Тому він почав шукати серед алгебр четвертої розмірності таку алгебру, яка не мала б дільників нуля. І він знайшов таку алгебру, яка має, як і поля дійсних і комплексних чисел, усі властивості поля за винятком комутативності. Результати цих досліджень опубліковані в роботі «Про кватерніони або про нову систему уявностей в алгебрі» (1850 р.), і в «Лекціях про кватерніони» (1853 р.).

Елемент системи кватерніонів має вигляд: $a+ib+jc+kd$, для них додавання покомпонентне, а множення виконується з урахуванням таблиці

1	*i*	*j*	*k*
i	–1	*k*	–*j*
j	–*k*	–1	*i*
k	*j*	–*i*	–1

Слідом за кватерніонами А. Келі ввів їхнє узагальнення — так звані числа Келі або октави. Про них він вперше написав у роботі «Про еліптичні функції Якобі і про кватерніони». Елемент гіперкомплексної системи октав представляється у вигляді: $a+ib+jc+kd+lx+py+qz+rt.$ Додавання октав виконується так само, як і кватерніонів, а множення відповідно до таблиці

1	*i*	*j*	*k*	*l*	*p*	*q*	*r*
i	–1	*k*	–*j*	–*p*	–*l*	*r*	–*q*
j	–*k*	–1	*i*	-*q*	–*r*	*l*	*p*
k	*j*	–*i*	–1	–*r*	*q*	–*p*	*l*
l	–*p*	*q*	*r*	–1	–*i*	–*j*	–*k*
p	–*l*	*r*	–*q*	–*i*	–1	*r*	–*q*
q	–*r*	–*l*	*p*	*j*	–*r*	–1	*l*
r	*q*	–*p*	–*l*	*r*	*q*	–*l*	–1

Значний вплив на розвиток теорії гіперкомплексних числових систем мала робота А. Келі «Мемуари про теорію матриць» (1858 р.), де обґрунтовано матричне представлення ГЧС.

Істотний внесок у розвиток теорії комплексної числової системи вніс Ж. Арган. Він значною мірою відомий як математик, що дав геометричну інтерпретацію комплексних чисел і вивчав модуль комплексних чисел.

К. Гаусс вніс величезний вклад в алгебру і теорію чисел, що значно вплинуло на розвиток теорії гіперкомплексних числових систем. Його праці з теорії чисел дали світу фундаментальну теорему про ізоморфізми в класах лишків комплексних і дійсних чисел.

Роботи А. Коші є потужним базисом в теорії функцій дійсної і комплексної змінної. Ці дослідження мали суттєвий вплив на подальший розвиток теорії функцій гіперкомплексної змінної.

А. Морган запропонував подвійну алгебру і в своєму варіанті дав геометричну інтерпретацію комплексних чисел.

Векторне числення в 1844 р. запропонував Г. Грассман, який істотно просунув теорію гіперкомплексного представлення даних.

Значний розвиток отримала комплексна система чисел у працях Р. Рімана. Ним вивчено застосування комплексних змінних у теорії еліптичних функцій. Ріман наблизив свої роботи до побудови так званих ріманових поверхонь. Вважається, що Ріман побудував загальну теорію комплексних змінних.

Англійський математик Д. Сильвестр провів важливі дослідження з теорії матриць у розвиток робот А. Келі.

Величезний вклад в математику і розділи, що нас цікавлять, вніс К. Вейєрштрас, який ще в 1856 р. написав книгу по теорії аналітичних функцій. Цікавим є той факт, що Вейєрштрас вважав, що комплексне число — це єдине комутативне алгебраїчне розширення дійсних чисел.

Б. Пірс у США працював над асоціативними алгебрами та почав класифікацію комплексних асоціативних алгебр.

В. Кліффорд узагальнив кватерніони Гамільтона і ввів бікватерніони, які він використовував для вивчення руху в неевклідових просторах.

Велику роль у розвитку ГЧС зіграла знаменита теорема Ф. Фробеніуса, яка стверджує: «Поле дійсних чисел і поле комплексних чисел є єдиною скінченномірною асоціативно-комутативною алгеброю без дільників нуля, тіло кватерніонів є єдиною скінченномірною асоціативною, але не комутативною алгеброю без дільників нуля, алгебра Келі є єдиною скінченномірною альтернативною, але не асоціативною алгеброю без дільників нуля».

Подальший розвиток теорія кватерніонів і алгебри Кліффорда отримали в роботах Р. Ліфшиця. Вважається, що він незалежно сформулював і представив алгебри Кліффорда і застосував їх для вивчення груп обертання [2].

На можливість побудови числових систем, аналогічних комплексним числам, вказував також один з найбільших російських математиків XIX століття Є.І. Золотарьов, який в своїй докторській дисертації побудував теорію чисел, що є узагальненням комплексних чисел. Дослідження Є.І. Золотарьова належать до алгебраїчного напряму побудови гіперкомплексних чисел. Вони були продовжені Д.М. Волковим і М.М. Криловим, які розглядали комплексні числа вигляду $z = x_0 + x_1 e + ... + x_{n-1} e^{n-1}$, де e — корінь незведеного алгебраїчного рівняння n-го степеня: $e^n = p_0 + p_1 e + ... + p_{n-1} e^{n-1}$ в теорії комплексів Галуа. М.М. Крилов називає такі числа z комплексами Галуа. Окремий випадок таких чисел розглянуто В.О. Філіновим у роботах «Багатовимірне узагальнення комплексного числення», «Полінарна алгебра» і «Теорія функцій полінарного аргументу», де як визначальне алгебраїчне рівняння n-го ступеня вибрано рівняння $j^n = 1$.

Узагальнення комплексних чисел у формі Золотарьова–Крилова, виконане В.Є. Слівінським для матриць, є природним продовженням робіт М.М. Крилова, Є.І. Золотарьова, І.О. Лаппо-Данілевського. Важливість цього узагальнення диктується збереженням комутативності множення і однозначності ділення на число, що відмінне від нуля або дільника нуля. Подібний підхід застосував Е. Штуді, розглянувши побудову комутативних гіперкомплексних числових систем 2, 3 і 4-го порядку. При цьому він виходив з лінійної незалежності векторів $a^0, a^1, a^2, ..., a^{n-1}$, де $a = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$, а побудову уявних одиниць виконував залежно від розв’язання рівняння $a^n = \alpha_1 a^{n-1} + ... + \alpha_n a^0$.

В.В. Люш у «Теорії універсальних чисел і застосування її до розв’язання алгебраїчних рівнянь», а також в «Теорії функцій триплексної змінної» запропонував будувати гіперкомплексні числа, виходячи з розв’язання задачі про представлення числами векторів в просторі трьох і більше вимірів. Автор вказав, що дана задача може бути розв’язана вибором одиниць — спочатку для простору 2^n вимірів, а потім для простору числа вимірів, що відрізняється від 2^n. Для представлення числами векторів у просторі 2^n вимірів в розгляд вводяться n незалежних між собою уявних одиниць, квадрат кожною з яких дорівнює –1. Оскільки кожна така одиниця виражає лише один вимір у просторі, то для представлення всіх 2^n вимірів слід розглядати окрім $(n+1)$ базисних одиниць $(1, i_1, ..., i_n)$ ще і всі добутки цих одиниць по дві, по три і т.д. У цьому випадку загальне число одиниць дорівнює 2^n. Для простору розмірності m число незалежних одиниць дорівнює m і за одиниці беруться елементарні симетричні функції від $i_1, i_2, ..., i_m$ відповідно нормовані.

У 1973 р. І.Л. Кантор і О.С. Солодовніков у роботі [10] навели основні відомості про теорію гіперкомплексних числових систем з позицій загальної алгебри. Книга отримала велику популярність, перекладена декількома мовами і є одним із першим посібником в цій області.

Узагальненням некомутативних розширень числових систем довільного порядку є числа Грассмана, альтерніони і числа Кліффорда. У загальному випадку числа Грассмана n-го порядку виходять некомутативним подвоєнням чисел Грассмана $(n-1)$-го порядку за допомогою дуальних чисел. Числа Кліффорда є узагальненням чисел Грассмана і альтерніонів.

М.В. Синьков і Н.М. Губарені [11] вивчають і доводять фундаментальні теореми Гауса про ізоморфізми і проводять побудову систем залишкових класів для алгебр другого порядку, вивчають комутативні і некомутативні подвоєння алгебр, побудови систем залишкових класів для квадриплексних, триплексних чисел, кватерніонів, октав, бікватерніонів, алгебр Грассмана і Кліффорда.

І.Я. Акушський, В.М. Амербаєв, І.Т. Пак [12] займаються дослідженнями з побудови машинної арифметики в комплексній області. Вони розглядають комплексне число (або плоский вектор) як елементарний неділимий об’єкт, що дає можливість створення нових методів чисельного розв’язання.

Висновки

Цей короткий огляд становлення теорії гіперкомплексних числових систем далеко не вичерпує весь матеріал за даною темою. Але з наведеного можна зробити висновок про велику роль гіперкомплексних числових систем для розвитку теоретичних досліджень і виявлення їхньої практичної спрямованості.

1. *Синьков М.В.* Гіперкомплексні числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія / М.В. Синьков, Я.О. Каліновський, Ю.Є. Боярінова, О.В. Федоренко, Т.В. Синькова. — К.: ІПРІ НАНУ , 2009. — 49 с. — (Препринт / НАНУ, Ін-т пробл. реєстр. інформації).

2. *Колмогоров А.Н.* Математика XIX века: математическая логика, алгебра, теория чисел, теория вероятностей / А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич. — М.: Наука, 1970. — Т. 1. —353 с.

3. *Смышляев В.К.* О математике и математиках / В.К. Смышляев. — Йошкар-Ола: Наука, 1977. — 224 с.

4. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. Сер. Библиотечка Квант / С.Г. Гиндикин. — М.: Наука, 1981. — 192 с.

5. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики/ Д.Я. Стройк. — М.: Наука, 1984. — 285 с.

6. *Вернадский В.И.* Труды по всеобщей истории науки / В.И. Вернадский — М.: Наука, 1988. — 380 с.

7. *Лейбниц Г.* Рассуждения о метафизике. — Соч. в 4-х томах / Лейбниц Г. — М.: Мысль, 1982. —Т. 1. — 356 с.

8. *История* механики с древнейших времен до конца XVIII в. — М.: Наука, 1972.

9. *Розенфельд А.Б.* История неевклидовой геометрии. Развитие понятия о геометрическом пространстве / А.Б. Розенфельд. — М.: Наука, 1976. — 408 с.

10. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

11.*Синьков М.В.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах / М.В. Синьков, Н.М. Губарени. — К.: Наук. думка, 1979. — 140 с.

12. *Акушский И.Я.* Основы машинной арифметики комплексных чисел / И.Я. Акушский, В.М. Амербаев, И.Т. Пак. — Алма-Ата: Наука, 1970. — 247 с.

Надійшла до редакції 08.12.2009