УДК 004.942

Я. О. Каліновський, О. В. Федоренко
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Основи побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами

Розглянуто побудову передавальної функції цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами. Запропоновано метод зменшення кількості операцій, необхідних для функціонування цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами. Виконано порівняння кількості операцій, необхідних для роботи цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами до і після застосування даного методу.

***Ключові слова:** цифрові фільтри, гіперкомплексні числові системи, передавальна функція, обчислювальна складність.*

Вступ

Застосування гіперкомплексних числових систем [1, 2] в області цифрової обробки сигналів, а саме для побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами є досить цікавою і важливою темою. Особливо, враховуючи поширеність цифрових фільтрів сьогодні, які є невід'ємною частиною багатьох пристроїв. І будь-яке покращення характеристик таких фільтрів є актуальним.

У зарубіжних роботах різних авторів [3, 4] хоча й розглядається використання різних гіперкомплексних числових систем (ГЧС) для побудови цифрових фільтрів, загальний набір ГЧС, що використовується авторами, невеликий. Це не дає змоги говорити про зручність та ефективність тих чи інших гіперкомплексних числових систем для побудови цифрових фільтрів і будувати оптимальні структури цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами для вирішення поставлених задач. Крім того, в таких роботах не розглядається загальний підхід до побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами, натомість, розглядається спосіб побудови цифрового фільтра з використанням конкретної ГЧС.

Постановка задачі

Незважаючи на те, що способи побудови цифрових фільтрів із коефіцієнтами, що належать різним гіперкомплексним числовим системам і відрізняються між собою, можна окреслити узагальнений метод, за допомогою якого можна побудувати цифровий фільтр з використанням різних ГЧС для представлення коефіцієнтів.

Саме розробка такого методу і є однією із задач даної роботи. Іншою задачею є зменшення кількості операцій, необхідних для функціонування цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами завдяки використанню ізоморфного переходу між ГЧС.

Побудова передавальної функції цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами

Будь-який фільтр можна повністю описати за допомогою передавальної функції. Знаючи сигнал на вході системи та передавальну функцію, можна обчислити вихідний сигнал. Передавальна функція цифрового фільтра записується у вигляді:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \tag{1}$$

де $X(z)$ і $Y(z)$ — z-перетворення відповідно для вхідного і вихідного дискретного сигналів.

Зазвичай, поліноми $X(z)$ та $Y(z)$, при описі цифрового фільтра, матимуть дійсні коефіцієнти. Припустимо, що в нашому випадку ці коефіцієнти — гіперкомплексні числа, що належать деякій ГЧС вимірності m. Відношення гіперкомплексних поліномів з правої частини виразу (2) можна представити у формі гіперкомплексної функції.

Таку функцію можна отримати, якщо знаменник правої частини виразу (1) перетворити в поліном із дійсними коефіцієнтами відносно оператора z. Цього можна домогтись, якщо помножити чисельник і знаменник виразу $\frac{Y(z)}{X(z)}$ на вираз, спряжений до знаменника $X(z)$, тобто на $\overline{X(z)}$. Як було сказано раніше, добутком $X(z) \cdot \overline{X(z)}$ буде норма гіперкомплексного числа $X(z)$, що належить до області дійсних чисел. Норма гіперкомплексного числа є виразом степені m відносно компонентів гіперкомплексного числа, де m — вимірність гіперкомплексного числа. Нехай степінь полінома $X(z)$ відносно оператора z буде l, тоді норма $N(X(z)) = X(z) \cdot \overline{X(z)}$ буде поліномом степені $m \cdot l$ відносно оператора z.

Отже передавальна функція (1), але з гіперкомплексними коефіцієнтами, перетвориться на таку:

$$H(z) = \frac{Y(z) \cdot \overline{X(z)}}{N(X(z))}. \tag{2}$$

Вираз (2) можна записати у формі гіперкомплексної функції:

$$H(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(z)}{N(X(z))} \cdot e_i, \tag{3}$$

при цьому коефіцієнти при операторі z у виразах $\dfrac{f_i(z)}{N(X(z))}$, при $i=1,...,m$, належать області дійсних чисел. А самі вирази $\dfrac{f_i(z)}{N(X(z))}$, при $i=1,...,m$, будуть компонентами гіперкомплексного числа з базисом $e_1, e_2, ...e_m$. Крім того, поліном $f_i(z)$, так само як і $N(X(z))$, буде мати степінь $m \cdot l$ відносно оператора z.

Тобто, передавальну функцію фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами у формі (3) можна записати у вигляді:

$$H(z) = \sum_{i=1}^{m} H_{H_i}(z) \cdot e_i ,$$

де кожен з виразів $H_{H_i}(z)$, при $i=1,...,m$ є компонентою гіперкомплексного числа вимірності m і може розглядатися як передавальна функція фільтра з дійсними коефіцієнтами порядку $m \cdot l$.

При цьому суть z-перетворення, АЧХ, ФЧХ, карта нулів і полюсів фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами повністю співпадатиме з відповідними характеристиками вихідного фільтра з дійсними коефіцієнтами.

Таким чином, передавальна функція $H(z)$ цифрового фільтра порядку l з гіперкомплексними коефіцієнтами вимірності m може бути представлена у вигляді гіперкомплексної функції, кожен з компонентів якої можна розглядати як передавальну функцію фільтра з дійсними коефіцієнтами порядку $m \cdot l$.

Для побудови конкретного зразка фільтра, що описується передавальною функцією з гіперкомплексними коефіцієнтами і задовольняв би вказаним до нього вимогам, зручно використовувати звичні методи побудови передавальної функції фільтра з дійсними коефіцієнтами.

Після того як маємо передавальну функцію-прототип з дійсними коефіцієнтами $H_R = \dfrac{Y_R(z)}{X_R(z)}$, можемо вибрати підходящу ГЧС і побудувати за її допомогою, описаним до цього способом, передавальну функцію з гіперкомплексними коефіцієнтами. Таку передавальну функцію потрібно привести до вигляду (3). Після цього, необхідно вибрати одну з m компонент $\dfrac{f_i(z)}{N(X(z))}$ гіперкомплексної функції (3), яка і буде реалізовувати передавальну функцію-прототип із дійсними коефіцієнтами. Нехай це буде компонента $\dfrac{f_1(z)}{N(X(z))}$.

Лишилося знайти такі гіперкомплексні коефіцієнти передавальної функції виду (1), при яких чисельник $f_1(z)$ вибраної компоненти дорівнював би чисельнику $Y_R(z)$ передавальної функції-прототипу з дійсними коефіцієнтами H_R, а знаменник $N(X(z))$ дорівнював би знаменнику $X_R(z)$ функції H_R.

Для цього необхідно скласти дві системи рівнянь. Одна система виходить при прирівнюванні коефіцієнтів при однакових степенях оператора z у виразах $f_1(z)$ та $Y_R(z)$. Іншу систему отримаємо, коли прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях оператора z поліномів $N(X(z))$ та $X_R(z)$.

Якщо така система має розв'язок, то в результаті її розв'язання отримуємо гіперкомплексні коефіцієнти передавальної функції $H_H = \frac{Y_H(z)}{X_H(z)}$ виду (1), компонента $\frac{f_1(z)}{N(X(z))}$ якої у вигляді (3) буде співпадати з передавальною функцією-прототипом із дійсними коефіцієнтами $H_R = \frac{Y_R(z)}{X_R(z)}$.

Причому, якщо передавальна функція H_R описує цифровий фільтр із дійсними коефіцієнтами порядку l, а вимірність вибраної ГЧС m, то порядок фільтра, який описується передавальною функцією з гіперкомплексними коефіцієнтами H_H, має бути не менший за $\frac{l}{m}$. І чим ближчий порядок такого фільтра до числа $\frac{l}{m}$, тим ефективнішим є фільтр з точки зору використання ним ресурсів.

Для побудови цифрових фільтрів можна використовувати багато гіперкомплексних числових систем. Але при цьому потрібно мати на увазі, що таблиці множення базисних елементів деяких ГЧС мають нульові елементи, і в деяких з них кількість нульових елементів досить велика. Через це, норма чисел, що належать таким ГЧС і функція $f_i(z)$ з виразу (3) будуть мати дуже простий вигляд. І може вийти так, що коефіцієнти при деяких степенях оператора z будуть нульовими. Тобто форма передавальної функції фільтра буде усіченою, а отже така передавальна функція буде мати обмежені можливості для використання. Тобто, в такому випадку системи рівнянь, описані раніше, не завжди будуть мати розв'язок, і значить, для деяких передавальних функцій фільтрів із дійсними коефіцієнтами буде неможливим побудувати передавальну функцію фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами такої ГЧС.

Іншим, незручним до застосування випадком, може бути випадок, коли норма гіперкомплексного числа або функція $f_i(z)$ з виразу (3) будуть мати малу кількість компонентів гіперкомплексного числа. В такому разі системи рівнянь, описані раніше, теж не завжди будуть мати розв'язок. І отже, за допомогою таких ГЧС не завжди буде можливим побудувати передавальну функцію фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами по деякій відомій передавальній функції фільтра з дійсними коефіцієнтами [5].

Нехай передавальна функція цифрового фільтра має вигляд:

$$H = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot z^{-i}}.$$

Роботу цифрових фільтрів з такою передавальною функцію можна описати наступним різницевим рекурентним рівнянням:

$$y[t] = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x[t-i] - \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot y[t-i]\,. \tag{4}$$

Причому, це рівняння буде справедливим і для передавальної функції фільтра з дійсними коефіцієнтами, і для передавальної функції фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами. Відмінність буде лише в тому, що для останнього випадку всі коефіцієнти рівняння будуть належати певній ГЧС вимірності m, і всі алгебраїчні операції над ними будуть виконуватися за законами даної ГЧС.

При розгляді роботи цифрового фільтра згідно з рівнянням (4), в якому коефіцієнтами a_i та b_i є гіперкомплексні числа, можна відмітити, що на вхід фільтра подається дійсний сигнал. Йому відповідає та компонента гіперкомплексного числа, вираз при якій у функції (3) реалізує передавальну функцію з дійсними коефіцієнтами (1). Після першого ж множення такого сигналу на коефіцієнт a_0 дійсне число перетворюється на гіперкомплексне, і далі у фільтрі циркулюють гіперкомплексні величини.

На виході з фільтра отримуємо гіперкомплексну величину вимірності m. Але дійсним сигналом виходу буде значення тої компоненти гіперкомплексного числа, яка слугувала входом для дійсного сигналу.

Застосування ізоморфного переходу між ГЧС для зменшення числа операцій, необхідних для роботи цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами

Важливу роль при побудові цифрових фільтрів, передавальна функція яких має гіперкомплексні коефіцієнти, відіграє поняття ізоморфізму ГЧС. Ізоморфний перехід від однієї ГЧС до іншої представляє собою однозначне лінійне перетворення базису першої системи, в результаті якого отримуємо базис другої системи, і навпаки. Ізоморфний перехід між різними ГЧС може застосовуватися для підвищення ефективності використання апаратних засобів, оскільки кількість арифметичних операцій над дійсними числами, які необхідні для виконання певної операції в деякій ГЧС може бути меншою ніж в ізоморфній їй системі, що пов'язано з простішими правилами виконання операцій у такій системі. На цій основі ізоморфний перехід можна використовувати для зменшення кількості операцій, необхідних для функціонування цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами.

Розглянемо використання ізоморфного переходу на прикладі фільтра з триплексними коефіцієнтами. Згідно з таблицею множення базисних одиниць триплексної системи, що має вигляд

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$\frac{e_3 - e_1}{2}$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

множення двох триплексних чисел X_T та Y_T представляє собою:

$$X_T \cdot Y_T = (x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2/2 + x_3 \cdot y_3) \cdot e_1 +$$
$$+ (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) \cdot e_2 + (x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_2/2 + x_3 \cdot y_1) \cdot e_3.$$

Множення ж двох чисел X_I та Y_I системи $R \oplus C$, що є ізоморфною до системи триплексних чисел і має таку таблицю множення базисних одиниць

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	e_3
e_3	0	e_3	$-e_2$

має вигляд: $X_I \cdot Y_I = x_1 \cdot y_1 \cdot e_1 + (x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3) \cdot e_2 + (x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2) \cdot e_3$.

Як видно, операція множення в системі $R \oplus C$ складається з меншої кількості операцій над дійсними числами ніж у системі триплексних чисел. Перехід між ізоморфними системами являє собою систему простих лінійних перетворень. Так, щоб перейти від триплексних чисел до системи $R \oplus C$ необхідно здійснити такі перетворення: $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_1 - x_3$, $y_3 = \pm x_2$. Для зворотного переходу необхідно виконати наступне: $x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $x_2 = \pm y_3$, $x_3 = \frac{y_1 - y_2}{2}$.

З причин, які вже згадувалися, система чисел $R \oplus C$ не прийнятна для прямого представлення коефіцієнтів передавальної функції цифрового фільтра. Разом із тим, при побудові цифрового фільтра з триплексними коефіцієнтами можна зменшити кількість операцій, необхідних для його роботи, шляхом ізоморфного переходу до числової системи $R \oplus C$, в якій виконання операцій є простішим ніж у системі триплексних чисел. Для цього необхідно перевести коефіцієнти передавальної функції із триплексної до системи чисел $R \oplus C$ та реалізувати блоки ізоморфного перетворення входу та виходу фільтра.

Аналогічним чином, з метою зменшення кількості операцій, необхідних для функціонування фільтра з квадриплексними коефіцієнтами, можна використовувати ізоморфний перехід від квадриплексних чисел до бікомплексних.

Порахувавши кількість операцій у дійсних числах, необхідних для функціонування фільтрів у прямій формі, передавальна функція яких має гіперкомплексні коефіцієнти, і фільтрів, отриманих у результаті ізоморфного переходу до системи з простішою таблицею множення базисних елементів, можна оцінити ефективність використання ізоморфних переходів для зменшення складності цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами.

Цифрові фільтри, передавальні функції яких мають бікомплексні коефіцієнти або коефіцієнти, що належать системі чисел $R \oplus C$, отримано в результаті застосування запропонованого підходу до зменшення кількості операцій, необхідних для роботи, відповідно, фільтрів із квадриплексними і триплексними коефіцієнтами. З таблиці видно, що навіть з урахуванням операцій прямого та зворотного ізоморфного переходу, в обох прикладах застосування запропонованого підходу число операцій над дійсними числами, необхідних для функціонування таких цифрових фільтрів, зменшується приблизно вдвічі.

Кількість операцій, які виконуються цифровими фільтрами
з гіперкомплексними коефіцієнтами

Система чисел	**Порядок фільтра**	**Використано ізоморфний перехід від системи**	**Кількість множень дійсних чисел**	**Кількість додавань і віднімань дійсних чисел**	**Кількість елементів затримки дійсних чисел**
Триплексні числа	1		36	27	4
$R \oplus C$ числа	1	триплексних чисел	16	13	4
Квадриплексні числа	1		48	44	5
Бікомплексні числа	1	квадриплексних чисел	25	21	5

Моделювання роботи цифрових фільтрів 1-го порядку з гіперкомплексними коефіцієнтами та відповідних зразків фільтрів 3-го і 4-го порядків із дійсними коефіцієнтами в САПР Quartus II показало, що максимально допустима тактова частота для фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами виявилася вдвічі більша аналогічного параметру відповідних фільтрів із дійсними коефіцієнтами. Тобто досліджувані фільтри з гіперкомплексними коефіцієнтами можуть обробляти вдвічі більше відліків вхідного сигналу за один проміжок часу ніж відповідні фільтри з дійсними коефіцієнтами.

Результати досліджень деяких властивостей цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами

Дослідження сумарної параметричної чутливості модуля передавальної функції цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами до зміни цих коефіцієнтів показали, що для таких фільтрів існує можливість зменшення сумарної параметричної чутливості на заданій смузі частот, що є дуже важливим при побудові ефективних цифрових фільтрів. Це можливо завдяки особливостям побудови передавальної функції з гіперкомплексними коефіцієнтами, які будуть розглянуті в окремій статті, присвяченій параметричній чутливості цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами.

Висновки

Запропонований у статті метод побудови передавальної функції цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами дозволяє будувати такі фільтри з використанням широкого класу ГЧС різних вимірностей. Такі фільтри відзначаються низькою сумарною параметричною чутливістю та високою швидкодією. Запропонований у роботі метод дозволяє зменшити обчислювальну складність фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами. Наведені приклади та порівняльна таблиця кількості операцій, необхідних для функціонування таких цифрових фільтрів до і після застосування даного методу, свідчать про його дієвість.

1. *Синьков М.В.* Гиперкомплексные числовые системы, их структуры, особенности и возможности применения для моделирования / Синьков М.В., Калиновский Я.А., Ковалевская И.Л., Изык Л.Б. // Теория и применение моделирующих систем. — К.: Наук. думка, 1986. — С. 27–35.

2. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / Кантор И.Л., Солодовников А.С. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

3. *Schutte H.D.* Hypercomplex Numbers in Digital Signal Processing / Schutte H.D., Wessel. J. // Proc. Int. Conf. On Circuits and Systems. — New Orleans, Louisiana, 1990. — P. 1557–1560.

4. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters / Toyoshima H. // IEICE Trans. Fundamentals. — 2002. — E85-A, 8. — P. 1870–1876.

5. *Каліновський Я.О.* Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: дис. … доктора техн. наук : 01.05.02 / Каліновський Яків Олександрович. — К., 2007. — 417 с.

Надійшла до редакції 27.02.2009