УДК 620.179.15:004.421.2

М. В. Синьков, А. І. Закидальський, Є. О. Цибульська
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Алгоритм обчислення одновимірної згортки з використанням гіперкомплексних чисел

Представлено алгоритм обчислення одновимірної дійсної згортки з переходом до двовимірного перетворення Фур'є і використанням гіперкомплексних чисел. Проведено аналіз обчислювальної складності розробленого алгоритму при використанні різних гіперкомплексних числових систем.

***Ключові слова:** згортка, дискретне перетворення Фур'є, швидке перетворення Фур'є, гіперкомплексні числові системи.*

Вступ

Останнім часом усе більш поширеним стає представлення інформації з використанням гіперкомплексних числових систем (ГЧС), зокрема, в теорії цифрової обробки сигналів. У роботах [1–3] представлені алгоритми обчислення двовимірного дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) і двовимірної згортки за допомогою гіперкомплексних числових систем кватерніонів (***H***) і квадриплексних чисел (***K***). Основна ідея цих алгоритмів полягає в наступному. У випадку одновимірної згортки дійсність вхідної послідовності $x(n)$ дозволяє переходити при перетворенні Фур'є до допоміжної $\frac{N}{2}$-періодичної комплексної послідовності $x_1(n) = x(2k) + ix(2k+1)$, $k = 0,...,\frac{n}{2}$, що вдвічі скорочує кількість операцій при обчисленні ДПФ. При згортці двовимірних послідовностей аналогічна ідея реалізується за допомогою використання чотиривимірних гіперкомплексних числових систем. У цьому випадку множення на повертаючі коефіцієнти при перетворенні Фур'є виконується тільки для чверті відліків послідовностей, що вдвічі скорочує кількість операцій порівняно з комплексним ДПФ.

Метою роботи було створити алгоритми, які дозволяють використовувати гіперкомплексні числа для обчислення одновимірної згортки, а також розглянути можливість використання інших гіперкомплексних числових систем.

Застосування алгоритмів двовимірного дискретного перетворення Фур'є до одновимірних числових послідовностей

Гіперкомплексне перетворення Фур'є двовимірної послідовності $x(n,m)$ розмірності $N \times M$ при використанні комутативних систем квадриплексних і бікомплексних чисел задається формулою:

$$Y(u,v) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} y(n,m) e^{\frac{-2\pi un}{N} i} e^{\frac{-2\pi vm}{M} j} . \qquad (1)$$

Розглянемо одновимірну послідовність довжини $T = N \cdot M$. Її можна перетворити на двовимірний масив з N стовпчиків і M рядків [5]. Візьмемо деякий відлік $x(n,m)$. Якщо у вхідної одномірної послідовності він мав номер l, то $l = Nm + n$.

Знайдемо ДПФ отриманого двовимірного масиву. Нехай n і m — змінні початкового сигналу, r і s — змінні двовимірного ДПФ по стовпчикам і рядкам, які перетворюються в одну змінну $k = Mr + s$. Тоді коефіцієнти одновимірного ДПФ $X_p(k) = X_p(s,r)$ можна визначити через перетворення масиву $x(l) = x(m,n)$, використовуючи формули перерахунку індексів:

$$X_p(k) = X_p(s,r) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x_p(m,n) W^{(Nl+m)(Mr+s)} . \qquad (2)$$

Розкладемо $W^{(Nl+m)(Mr+s)}$ на множники з урахуванням того, що $W^{NMlr} = W^{Tlr} = 1$. Тоді (2) можна записати як

$$X_p(s,r) = \sum_{n=0}^{N-1} W^{Mnr} W^{ns} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n,m) W^{Nsm}}_{q(n,s)} . \qquad (3)$$

Внутрішня сума — це ДПФ *n*-го стовпчика з ядром перетворення W^N, зовнішня сума — ДПФ *m*-го рядка з ядром перетворення W^M.

У результаті перетворення номери рядків і стовпчиків міняються місцями. Це відбувається тому, що при збільшенні n на 1 номер відліку вхідного масиву $Nm + n$ також збільшується на 1, а при збільшенні на 1 номеру стовпчика перетвореного масиву *r* аргумент $X(s,r)$ зростає на M.

Таким чином, для обчислення швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) з переходом до двовимірних масивів потрібно виконати такі дії:

1) перетворити одновимірну послідовність у двовимірний масив;
2) виконати ДПФ стовпчиків масиву;
3) помножити всі елементи на додатковий повертаючий коефіцієнт;
4) виконати ДПФ рядків масиву;
5) виконати перестановку «рядок↔стовпчик».

Різницею між (1) і (3) є множення на додатковий повертаючий коефіцієнт при виконанні двовимірного перетворення Фур'є.

Алгоритм обчислення одновимірної згортки

У даній статті представлено розроблені алгоритми обчислення одновимірної дійсної згортки за допомогою ДПФ із використанням гіперкомплексних числових систем квадриплексних чисел (***K***) і бікомплексних чисел (***C***⊗***C***) [4]. У цих алгоритмах факт необхідності розбиття на 4 частини аналогічний тому, що зроблено в інших алгоритмах, представлених у роботах [1–3], але при цьому в процесі розбиття запропоновано одночасно виконувати лінійне перетворення відліків послідовностей, що в подальшому приводить до зменшення сумарного обсягу обчислень.

Крім того, при переході від одновимірного до двовимірного перетворення Фур'є і подальших обчислень запропоновано використовувати бікомплексну ГЧС. Це дозволило скоротити кількість операцій за рахунок більш економічної таблиці множення бікомплексних чисел, яка містить значну кількість нулів.

Враховуючи сказане вище, алгоритм обчислення одновимірної згортки за допомогою двовимірних гіперкомплексних спектрів буде складатися з таких дій:

1) перетворити одновимірні послідовності довжини $T = N \cdot M$ у двовимірні масиви розмірності $N \times M$;

2) для переходу від дійсної числової системи до гіперкомплексної виконати поділ масиву ядра на 4 масиви за правилами:

для квадриплексних чисел — $$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i & j & ij \end{bmatrix},$$

для бікомплексних чисел — $$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i & 1 & j \end{bmatrix},$$

де $x_0 = x[2i, 2j]$; $x_1 = x[2i, 2j+1]$; $x_2 = x[2i+1, 2j]$; $x_3 = x[2i+1, 2j+1]$; $0 \le i \le \dfrac{N}{2}$; $0 \le j \le \dfrac{M}{2}$;

3) аналогічно виконати поділ масиву даних;

4) обчислити ДПФ стовпчиків масивів із урахуванням чотиримірності відліків;

5) помножити всі елементи на додатковий повертаючий коефіцієнт;

6) обчислити ДПФ рядків масивів з урахуванням чотиривимірності відліків;

7) виконати перетворення «рядок↔стовпчик»;

8) перемножити поелементно масиви даних із масивами ядра за правилами множення гіперкомплексних чисел;

9) обчислити обернене дискретне перетворення Фур'є (ОДПФ) стовпчиків масивів із урахуванням чотиривимірності відліків;

10) помножити всі елементи на повертаючий коефіцієнт, спряжений додатковому;

11) обчислити ОДПФ рядків масивів із урахуванням чотиривимірності відліків;

12) виконати перетворення «рядок↔стовпчик» масиву результату;

13) перетворити гіперкомплексний результат у дійсний за правилами:

для квадриплексних чисел — $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & -j & -ij \end{bmatrix}$,

для бікомплексних чисел — $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 + y_1 \\ y_0 - y_1 \\ y_2 + y_3 \\ y_2 - y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 & -j \end{bmatrix}$;

14) перетворити двовимірний масив результату в одновимірну послідовність.

Оцінка обсягу обчислень згортки за допомогою двовимірного гіперкомплексного швидкого перетворення Фур'є

Для оцінки обчислювальної складності підрахуємо кількість дійсних операцій множення і додавання, необхідних для обчислення згортки одновимірних послідовностей довжини $T = N \cdot M$.

У загальну кількість операцій увійдуть:

1) перетворення одновимірної дійсної послідовності в гіперкомплексну: $3T$ — для квадриплексної ГЧС і $2T$ — для бікомплексної ГЧС;

2) базова операція «метелик» алгоритму Кулі–Тьюки — $\frac{9}{4} \cdot \frac{T}{4} \log_2 T$ операцій для квадриплексної ГЧС і $\frac{7}{4} \cdot \frac{T}{4} \log_2 T$ операцій для бікомплексної ГЧС;

3) множення на додатковий повертаючий коефіцієнт — $12\frac{T}{4}$ операцій;

4) добуток двох гіперкомплексних послідовностей — $28\frac{T}{4} = 7T$ операцій для квадриплексної ГЧС і $12\frac{T}{4} = 3T$ операцій для бікомплексної ГЧС.

Тоді двовимірне гіперкомплексне перетворення Фур'є одновимірної послідовності довжини $T = N \cdot M$ потребує дійсних операцій:

з квадриплексними числами — $\frac{9}{4} \cdot \frac{T}{4} \log_2 T + 3T + 12\frac{T}{4}$;

з бікомплексними числами — $\frac{7}{4} \cdot \frac{T}{4} \log_2 T + 2T + 12\frac{T}{4}$.

Згортка одновимірних послідовностей потребує дійсних операцій:

з квадриплексними числами — $\frac{9}{2} \cdot \frac{T}{4} \log_2 T + 19T$;

з бікомплексними числами — $\frac{7}{2} \cdot \frac{T}{4} \log_2 T + 13T$.

Порівняння обчислювальної складності алгоритмів згортки

Була розглянута обчислювальна складність алгоритмів згортки одновимірних послідовностей за допомогою ШПФ з основою 2, ШПФ зі змішаною основою, двовимірного ШПФ із ГЧС *К*, двовимірного ШПФ із ГЧС $C \otimes C$. Для прикладу розглядалися довжини послідовностей, що дорівнюють деякій степені 2.

Для сигналів різної довжини в табл. 1 наведена кількість дійсних операцій обчислення перетворення Фур'є — загальна та на 1 елемент.

Таблиця 1. Кількість операцій алгоритмів обчислення ШПФ

$N \times M$	**ШПФ із основою 2**		**ШПФ зі змішаною основою**		**2D ШПФ із ГЧС *K***		**2D ШПФ із ГЧС $C \oplus C$**	
	усього	на 1 ел.	усього	на 1 ел.	усього	на 1 ел.	усього	на 1 ел.
8×8	768	12	388	6,06	600	9,37	552	8,63
8×16	1792	14	1028	8,03	1272	9,49	1160	9,06
16×16	4096	16	2564	10,01	2688	10,5	2432	9,5
16×32	9216	18	6148	12	5664	11,06	5088	9,94

На рис. 1 зображені графіки, що характеризують кількість дійсних операцій на один відлік для різних алгоритмів обчислення ШПФ.

У табл. 2 наведена кількість дійсних операцій обчислення згортки — загальна та на 1 елемент.

Таблиця 2. Кількість операцій алгоритмів обчислення згортки

$N \times M$	**Згортка з ШПФ з основою 2**		**Згортка з ШПФ зі змішаною основою**		**Згортка з 2D ШПФ із ГЧС *K***		**Згортка з 2D ШПФ із ГЧС $C \oplus C$**	
	усього	на 1 ел.	усього	на 1 ел.	усього	на 1 ел.	усього	на 1 ел.
8×8	1920	30	1160	18,12	1648	25,75	1216	19
8×16	4352	34	2824	22,06	3440	26,85	2448	19,68
16×16	9728	38	6664	26,03	7168	28	5120	22
16×32	21504	42	15368	30,01	14912	28,12	10688	24,87

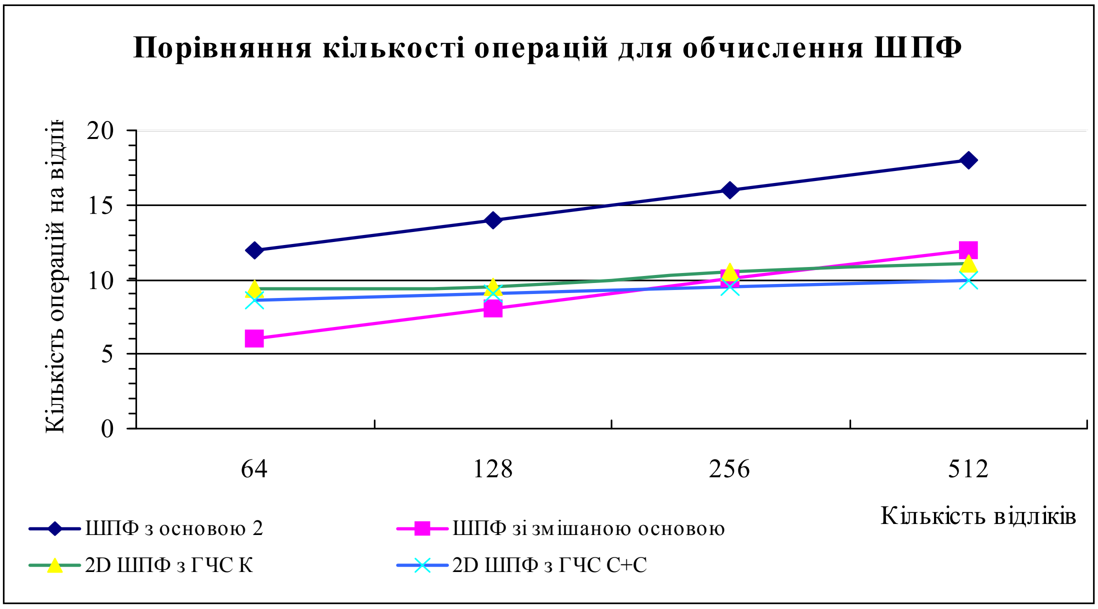

Рис. 1. Кількість операцій на один відлік різних алгоритмів обчислення ШПФ

На рис. 2 зображено графіки, що характеризують кількість дійсних операцій на один відлік для різних алгоритмів обчислення згортки.

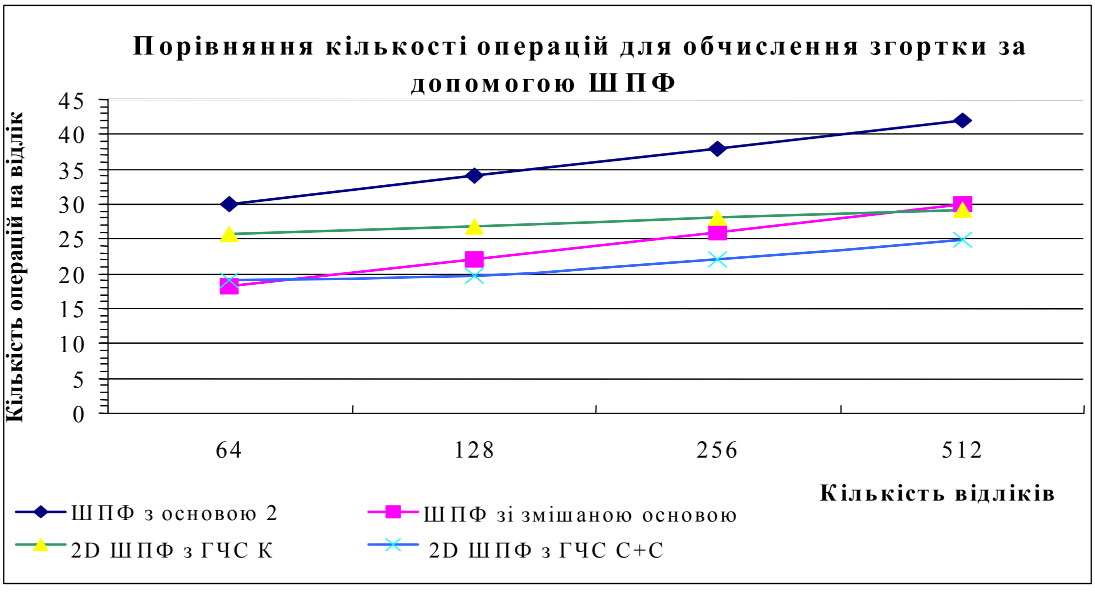

Рис. 2. Кількість операцій на один відлік різних алгоритмів обчислення згортки

Висновки

Як видно з таблиць і графіків, найкращі показники за кількістю операцій має алгоритм обчислення згортки з двовимірним швидким перетворенням Фур’є з використанням бікомплексної ГЧС. При довжині послідовностей, більшій ніж 128 відліків, він має меншу обчислювальну складність, ніж алгоритм обчислення згортки із ШПФ зі змішаною основою, який є одним з найпродуктивніших. Також представляється, що для обчислення згорток великої довжини доцільно буде розглянути використання ГЧС більш високих порядків, що буде зроблено в подальших роботах.

1. *Chicheva M.A.* On Various Schemes of 2D-DFT Decomposition with Data Representation in the Quaternion Algebra / M.A.Chicheva, M.V.Pershina // Image Processing & Communications. — 2004. — Vol. 2, N.1. — P. 13–20. — Published by the Institute of Telecommunications Bydgoszcz, Poland.

2. *Алиев М.В.* Алгоритмы двумерного ДПФ с представлением данных в алгебре гиперкомплексных чисел / М.В. Алиев, М.А. Чичева // кн. Алгебра и линейная оптимизация: Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова.— Екатеринбург: УрО РАН, 2002. — С. 18–26.

3. *Felsberg M.* Fast Algorithms of Hypercomplex Fourier Transform / M. Felsberg, T. Bulov, G. Sommer, V.M. Chernov // The Art of Scientific Computing. — 2006. — P. 232–254.

4. *Каліновський Я.О.* Методи комп’ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: дис. ... доктора техн. наук: 01.05.02 / Я.О.Каліновський; НТУУ «КПІ» — К., 2007. — 417 с.

5. *Рабинер Л.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. — М.: Мир, 1978. — 848 с.

Надійшла до редакції 04.03.2009