

УДК 534.2

ЗАДАЧА СТОКСА ОБ ОБТЕКАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

А. М. ГОМИЛКО, А. Н. ГОРОВОЙ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.06.99 ◊ Пересмотрено 16.02.2000

Рассматривается течение Стокса вязкой несжимаемой жидкости вне тонкой прямоугольной пластинки. На основании теории гармонических потенциалов соответствующая граничная задача для системы уравнений Стокса сведена к двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода на поверхности пластинки. При численном решении интегрального уравнения использовалось разложение неизвестной плотности по ортогональной системе тригонометрических функций. Проиллюстрированы особенности линий тока течения жидкости в зависимости от геометрического соотношения размеров пластинки.

Розглядається течія Стокса в'язкої нестислої рідини зовні тонкої прямокутної пластинки. На основі теорії гармонічних потенціалів відповідна гранична задача для системи рівнянь Стокса зведена до двовимірного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду на поверхні пластинки. При чисельному розв'язанні інтегрального рівняння використовувався розклад невідомої густини по ортогональній системі тригонометричних функцій. Проілюстровано особливості ліній току течії рідини в залежності від геометричних розмірів пластинки.

The Stokes flow of viscous incompressible fluid outside a rectangular plate is considered. The boundary problem is reduced to a two-dimensional Fredholm equation of the first kind on surface of the plate by harmonic potential theory. Solving the integral equation by numerical methods the unknown density has been presented by means of orthogonal system of trigonometrical functions. The features of streamlines of the flow depend upon geometrical ratio of plate's parameters have been illustrated.

ВВЕДЕНИЕ

В рамках теории течений при малых числах Рейнольдса [1] рассматривается задача об установившемся обтекании тонкой прямоугольной пластинки набегающим из бесконечности потоком вязкой несжимаемой жидкости. Такого рода пластинки используются в виде вставок в ограниченных резервуарах в качестве механизмов перемешивания жидкости [2]. Одним из физически интересных результатов в подобных задачах является вычисление силы сопротивления тел, препятствующих течению жидкости, так как сопротивление Стокса представляет собой важный механизм в процессе ламинарного перемешивания. Представляет интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения исследование линий тока стационарного течения и динамики частиц жидкости.

В данной статье при численном решении соответствующей граничной задачи для уравнений Стокса используется теория гармонических потенциалов с последующим разложением неизвестной плотности по двукратной ортогональной системе тригонометрических функций. Процесс ортогонализации интегрального уравнения, вытекающего из условия прилипания жидкости к поверхностям пластинки, приводит к линейной системе алгебраических уравнений с коэффициентами, выражаемыми четырехкратными интегралами.

Проведенный в данной статье анализ показал, что эти коэффициенты можно свести к однократным интегралам. На основании численного анализа в статье показана достаточная эффективность предложенного подхода и проанализированы особенности линий тока течения жидкости в зависимости от геометрического соотношения размеров пластинки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в приближении Стокса обтекание прямоугольной пластинки набегающим из бесконечности равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что пластинка с линейными размерами $2a_1$ и $2a_2$ расположена перпендикулярно к направлению течения. Введем в рассмотрение систему прямоугольных декартовых координат $Ox_1x_2x_3$, где O – начало координат, совпадающее с центром пластинки, а оси Ox_1 и Ox_2 лежат в ее плоскости. Рассматриваемая задача описывается уравнениями Стокса вместе с уравнением неразрывности среды [1]:

$$\mu\Delta V_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \mu\Delta V_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad \mu\Delta V_3 = \frac{\partial p}{\partial x_3}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \quad (2)$$

где V_1, V_2, V_3 – компоненты вектора скорости параллельные координатным осям x_1, x_2, x_3 со-

ответственно; p – гидродинамическое давление; μ – гидродинамический коэффициент вязкости ($\mu = \text{const}$). В условиях прилипания жидкости на поверхности пластинки должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2, \pm 0) = V_2(x_1, x_2, \pm 0) = 0, \\ V_3(x_1, x_2, \pm 0) = 0, \quad |x_1| \leq a_1, \quad |x_2| \leq a_2, \end{aligned} \quad (3)$$

а условие набегания равномерного потока из бесконечности приводит к требованию

$$(V_1, V_2, V_3) \rightarrow (0, 0, -1), \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Система уравнений (1), (2), рассмотренная вместе с граничными условиями (3) и условием на бесконечности (4), составляет граничную задачу для определения течения жидкости вне пластинки.

Сформулированная граничная задача для системы уравнений Стокса может быть сведена к решению уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле [3]. Действительно, пусть U – произвольная гармоническая функция, запишем компоненты вектора скорости \vec{V} в виде

$$\begin{aligned} V_1 &= -x_3 \frac{\partial U}{\partial x_1}, \\ V_2 &= -x_3 \frac{\partial U}{\partial x_2}, \\ V_3 &= U - x_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} - 1, \end{aligned} \quad (5)$$

так что выполняются уравнения неразрывности среды (2). Тогда, подставляя компоненты (5) в уравнения (1) и полагая давление

$$p = -2\mu \frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad (6)$$

убеждаемся в том, что система (5), (6) является решением уравнений Стокса (1), (2). При этом граничные условия (3) и условия на бесконечности (5) легко переформулируются в виде соответствующих условий для гармонической функции U .

Таким образом, проводя обезразмеривание исходной задачи и используя представление (5), приходим к рассмотрению следующей граничной задачи Дирихле для уравнения Лапласа вне прямоугольника $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq a$:

$$\begin{cases} \Delta U(x_1, x_2, x_3) = 0, & |x_1| > 1, \quad |x_2| > a, \\ U(x_1, x_2, \pm 0) = 1, & |x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq a, \\ U(x_1, x_2, x_3) \rightarrow 0, & |\vec{x}| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (7)$$

где безразмерный параметр $a = a_2/a_1$.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Применение теории потенциала [4] для построения решения граничной задачи (7) позволяет свести ее к двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Представим U поверхностным потенциалом простого слоя

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-1}^1 \frac{l(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2}}, \quad (8)$$

где $l(y_1, y_2)$ – неизвестная плотность, распределенная по поверхности пластинки. Потенциал простого слоя $U(\vec{x})$ представляет собой непрерывную во всем пространстве функцию, стремящуюся к нулю на бесконечности. Тогда, удовлетворяя граничным условиям задачи (7), приходим к интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-1}^1 \frac{l(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} = 1, \quad (9)$$

где $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq a$.

Учитывая четность ядра и правой части уравнения (9), ищем $l(y_1, y_2)$ в виде разложения в ряд Фурье по четным тригонометрическим функциям:

$$l(y_1, y_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} l_{ms} \cos \alpha_m y_1 \cos \beta_s y_2, \quad (10)$$

где l_{ms} – неизвестные коэффициенты и

$$\alpha_m = \pi m, \quad \beta_s = \pi s/a, \quad m, s = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя представление (10) в уравнение (8) и проводя стандартным образом алгебраизацию полученного соотношения, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных l_{ms} :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} l_{ms} L_{ms}^{nk} = \frac{4}{a} \delta_{00}, \quad (11)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, и коэффициенты

$$\begin{aligned} L_{ms}^{nk} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos \alpha_n x_1 \cos \alpha_k x_2 \times \\ &\times \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\cos \alpha_m y_1 \cos \alpha_s y_2 dy_1 dy_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + a^2(x_2 - y_2)^2}} \right\} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Элементы матрицы (12) выражаются четырехкратными интегралами, что представляет собой определенные трудности при численном анализе. Покажем, что возможно значительно упростить выражения для коэффициентов L_{ms}^{nk} , а именно представить их в виде однократных интегралов.

Проведем замену переменных $y_1 = x_1 + t$, $y_2 = x_2 + \tau$, где t и τ – новые переменные, тогда получим

$$L_{ms}^{nk} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos \alpha_n x_1 \cos \alpha_k x_2 \times \left\{ \int_{-1-x_1}^{1-x_1} \int_{-1-x_2}^{1-x_2} \frac{\cos(\alpha_m(x_1+t)) \cos(\alpha_s(x_2+\tau))}{\sqrt{t^2+a^2\tau^2}} \times d\tau dt \right\} dx_1 dx_2. \quad (13)$$

После несложных преобразований имеем выражение для двойных интегралов:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1-x_1}^{1-x_1} \frac{\cos \alpha_n x_1 \cos(\alpha_m(x_1+t))}{\sqrt{t^2+a^2\tau^2}} dt dx_1 = \int_0^2 \frac{I_{nm}(t)}{\sqrt{t^2+a^2\tau^2}} dt, \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1-x_2}^{1-x_2} \cos \alpha_k x_2 \cos(\alpha_s(x_2+\tau)) d\tau dx_2 = \int_0^2 I_{ks}(\tau) d\tau, \quad (15)$$

где

$$I_{nm}(t) = 2 \int_{-1}^{1-t} \cos \alpha_k x \cos(\alpha_s(x+t)) dx.$$

При этом интегралы $I_{nm}(t)$ определяются через элементарные функции:

$$I_{nm}(t) = \begin{cases} 2(2-t), & n = m = 0, \\ (2-t) \cos \alpha_n t - \frac{\sin \alpha_n t}{\alpha_n}, & n = m \neq 0, \\ \frac{2(-1)^{n+m}}{\alpha_n^2 - \alpha_m^2} (\alpha_m \sin \alpha_m t - \alpha_n \sin \alpha_n t), & n \neq m. \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, согласно уравнениям (13) – (16), L_{ms}^{nk} можно записать в виде

$$L_{ms}^{nk} = \frac{1}{4\pi} \int_0^2 \int_0^2 \frac{I_{nm}(t) I_{ks}(\tau)}{\sqrt{t^2+a^2\tau^2}} dt d\tau. \quad (17)$$

Отметим, что полученные соотношения для элементов матрицы системы линейных уравнений по определению неизвестных коэффициентов l_{ms} отличаются своей простотой от более сложных выражений, полученных в [5] при решении аналогичной задачи. В заключительном разделе статьи отмечены основные свойства матрицы L_{ms}^{nk} , а также приведены формулы для ее коэффициентов в виде однократных интегралов.

Так как искомый потенциал $U(\vec{x})$ является четной по переменной x_3 функцией, то согласно формулам (6), (8) и граничным свойствам нормальной производной потенциала простого слоя [4], для давления на пластинке получаем выражение

$$p(x_1, x_2, \pm 0)/\mu = \pm l(x_1, x_2), \quad |x_1| < 1, \quad |x_2| < a. \quad (18)$$

В то же время, явное решение осесимметричной задачи об обтекании круглой пластинки $r^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 < r_0^2$, $x_3 = 0$ (см. [6], с. 280) показывает, что давление на круглой пластинке при приближении к ее границе имеет корневую особенность:

$$p(r, \pm 0) = \pm \frac{c}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} + O(1), \quad r \rightarrow r_0, \quad r < r_0, \quad (19)$$

где c – некоторая постоянная. Этот же вывод следует из анализа решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внешности круговой области [7], гл. 2. Поскольку поведение решения эллиптического уравнения в окрестности границы рассматриваемой области определяется локальными свойствами границы и уравнения [8], то естественно считать, что и в случае квадратной пластинки для давления справедливы соотношения, аналогичные (19), т.е. при фиксированном $x_2 \in (-a, a)$

$$p(x_1, x_2, +0)/\mu = \frac{c_2(x_2)}{\sqrt{1-x_1^2}} + O(1), \quad x_1 \rightarrow \pm 1, \quad (20)$$

а при $x_1 \in (-1, 1)$

$$p(x_1, x_2, +0)/\mu = \frac{c_1(x_1)}{\sqrt{a^2-x_2^2}} + O(1), \quad x_2 \rightarrow \pm a. \quad (21)$$

Таким образом, из (18) и (20), (21) вытекает, что при фиксированном значении $y_2 \in (-a, a)$ поведение плотности $l(y_1, y_2)$ при $y_1 \rightarrow \pm 1$ определяется соотношением

$$l(y_1, y_2) \approx \frac{C_2(y_2)}{\sqrt{1-y_1^2}}, \quad (22)$$

где $C_2(y_2)$ – константа, зависящая от y_2 , а для фиксированного $y_1 \in (-1, 1)$ при $y_2 \rightarrow \pm a$ справедливо соотношение

$$l(y_1, y_2) \approx \frac{C_1(y_1)}{\sqrt{a^2 - y_2^2}}. \quad (23)$$

Выражения (22), (23) позволяют определить асимптотическое поведение коэффициентов l_{ms} из представления (10) при $m \rightarrow \infty$ (для фиксированного s) и при $s \rightarrow \infty$ (для фиксированного m). Действительно, из выражения (22), используя значение интеграла (см. [9], с. 389)

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos \alpha y}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \pi J_0(\alpha), \quad \alpha \geq 0,$$

где $J_0(\alpha)$ – функция Бесселя нулевого порядка, имеем

$$\sum_{s=0}^{\infty} l_{ms} \cos \alpha_s y_2 \approx C_2(y_2) \pi J_0(\alpha_m), \quad m \rightarrow \infty. \quad (24)$$

При этом, используя асимптотическую формулу [10]

$$J_0(\alpha_m) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_m}} \cos\left(\alpha_m - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^m}{\pi \sqrt{m}}, \quad m \rightarrow \infty,$$

закключаем, на основании (24), что

$$l_{ms} \approx \frac{(-1)^m C_s^{(2)}}{\sqrt{m}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (25)$$

с некоторой постоянной $C_s^{(2)}$. Аналогичным образом, из соотношения (23) получаем

$$l_{ms} \approx \frac{(-1)^s C_m^{(1)}}{\sqrt{s}}, \quad s \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Как следует из проведенных рассмотрений, асимптотическое поведение неизвестных l_{ms} по одному из стремящихся к бесконечности индексов определяется поведением искомой гармонической функции при стремлении \vec{x} к краям пластинки, исключая угловые точки. Более сложный вопрос об исследовании асимптотики l_{ms} при одновременном стремлении индексов m, s к бесконечности в данной работе не рассматривается. Такое исследование не является тривиальным, оно требует использования результатов [8], гл. 8 и [11], относящихся к поведению решений уравнения Лапласа в трехмерной области с пересекающимися ребрами на границе.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При численном решении бесконечной системы уравнений (11) можно воспользоваться методом редукции, то есть ограничиться решением конечной системы

$$\sum_{m=0}^p \sum_{s=0}^p l_{ms} L_m^k = \frac{4}{a} \delta_{00}, \quad n, k = 0, 1, \dots, p. \quad (27)$$

В то же время, наличие асимптотических формул (25), (26) позволяет применить метод улучшенной редукции [12]. Ограничимся использованием этих формул для индексов $s = 0$ в (25) и $m = 0$ в (26). Подставим в систему (27) представления

$$l_{0s} = \frac{(-1)^s C_0^{(1)}}{\sqrt{s}} + \hat{l}_{0s}, \quad l_{m0} = \frac{(-1)^m C_0^{(2)}}{\sqrt{m}} + \hat{l}_{m0},$$

$$\hat{l}_{00} = l_{00}, \quad \hat{l}_{ms} = l_{ms}, \quad m, s > 0, \quad (28)$$

тогда получим

$$\sum_{m=0}^p \sum_{s=0}^p \hat{l}_{ms} L_m^k + C_0^{(1)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\sqrt{s}} L_0^k +$$

$$+ C_0^{(2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}} L_m^k = \frac{4}{a} \delta_{00}, \quad (29)$$

причем для неизвестных \hat{l}_{0s} и \hat{l}_{m0} имеет место убывание

$$\sqrt{s} \hat{l}_{0s} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad \sqrt{m} \hat{l}_{m0} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (30)$$

При этом количество всех неизвестных в системе (29) превышает число уравнений, так как кроме \hat{l}_{ms} появляются новые неизвестные $C_0^{(1)}$ и $C_0^{(2)}$, поэтому для замыкания данной системы, в соответствии с (30) добавляются два уравнения. Бесконечные суммы в (29) заменяются на конечные с достаточно большим номером суммирования. Таким образом, система для определения коэффициентов плотности $l(y_1, y_2)$ принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=0}^p \sum_{s=0}^p \hat{l}_{ms} L_m^k + C_0^{(1)} \sum_{s=1}^q \frac{(-1)^s}{\sqrt{s}} L_0^k + \\ + C_0^{(2)} \sum_{m=1}^q \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}} L_m^k = \frac{4}{a} \delta_{00}, \\ \hat{l}_{0p} = 0, \\ \hat{l}_{p0} = 0, \end{array} \right. \quad (31)$$

где число q может быть взято сколь угодно большим по сравнению с p , поскольку коэффициенты

Табл. 1. Электрическая емкость прямоугольной пластики (нормированная сила сопротивления прямоугольной пластики $R/(8\pi\mu V_3)$)

Метод	1	2	4	8
Вариационный	0.734	1.065	1.619	2.570
Коллокации [5]	0.7337	1.0640	1.6189	2.5698
Предлагаемый	0.7334	1.0636	1.6183	2.5688

при неизвестных $C_0^{(1)}$ и $C_0^{(2)}$ представляют собой конечные ряды, суммы которых легко вычисляются после определения соответствующих коэффициентов L_{0s}^{nk} и L_{m0}^{nk} .

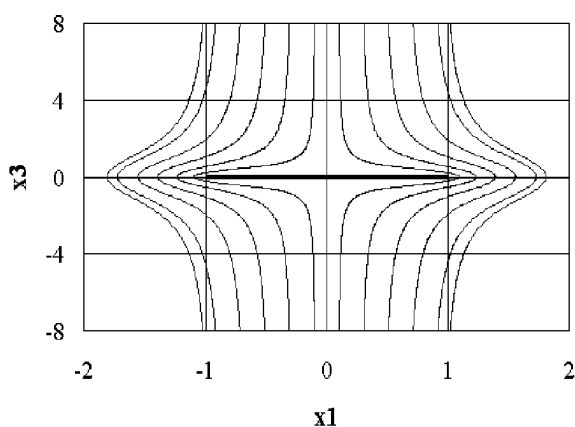


Рис. 1. Линии тока при обтекании тонкой квадратной пластики ($a = 1$)

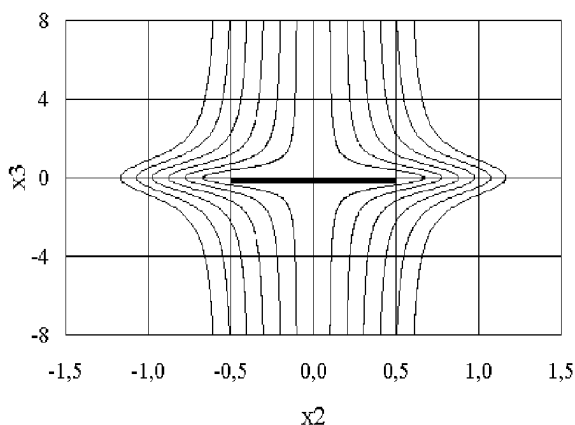


Рис. 2. Линии тока при обтекании тонкой прямоугольной пластики ($a = 0.5$)

Численные расчеты проводились для значений $p = 15$ и $q = 500$. Как показывают приведенные результаты (табл. 1 и графики линий тока рис. 1 –

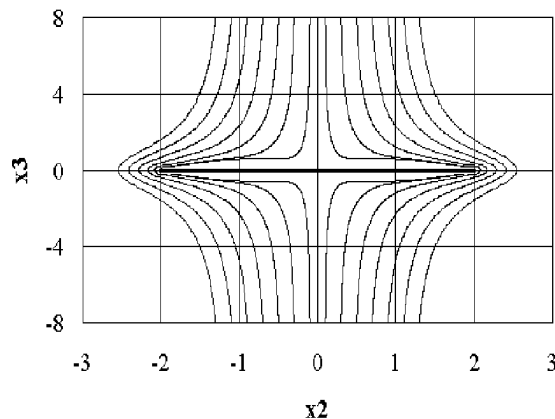


Рис. 3. Линии тока при обтекании тонкой прямоугольной пластики ($a = 2$)

3), предложенный алгоритм позволяет достичь высокой степени точности. Коэффициенты матрицы L_{ms}^{nk} вычислялись на основании квадратурных формул интегрирования Гаусса. При этом для решения конечной алгебраической системы уравнений использовался итерационный метод. Результаты, полученные при проверке граничного условия задачи (7), т. е. при вычислении значений потенциала U в области $\{(x_1, x_2, \pm 0) \mid |x_1| \leq 1 - \varepsilon, |x_2| \leq a - \varepsilon, \varepsilon \sim 0.01\}$, отличаются от истинного значения этой функции на пластинке не более чем на 1%.

Функцию U можно также интерпретировать как электрический потенциал проводящей пластики (см. соотношения (7)), так что рассматриваемая задача о медленном обтекании прямоугольной пластики вязкой несжимаемой жидкостью в математическом плане эквивалентна задаче по определению электростатического поля вокруг проводящей пластики. Одной из важных электростатических характеристик заряженной поверхности является ее электрическая емкость. По определению [13], электрическая емкость C поверхности S , находящейся в состоянии электростатического равновесия, есть такой заряд, при котором потенциал поверхности S равен

единице, так что для пластинки

$$C = \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-1}^1 l(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Учитывая выражение (10), находим

$$C = al_{00}/\pi. \quad (32)$$

Проведенные в данной статье вычисления электрической емкости C по формуле (32) показали хорошее согласование с данными приведенными в работах [3, 5]. Соответствующие результаты отображены в табл. 1.

Знание значения емкости пластинки C позволяет определить нормальную силу, действующую на пластинку со стороны однородного потока, имеющего на бесконечности скорость V_3 [3]. Действительно, нормальное давление на поверхности пластинки, согласно (18), равняется $\mu l(x_1, x_2)$. Тогда общая нормальная сила, действующая на пластинку, дается выражением

$$R = 8\pi\mu CV_3. \quad (33)$$

Для определения линий тока течения жидкости рассматривалась задача Коши [2]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = V_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2(t) = V_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3(t) = V_3(x_1, x_2, x_3), \\ x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0, \end{cases} \quad (34)$$

где правые части в системе (34) выражаются через найденный потенциал U по формулам (5). Решая систему (34) методом Рунге–Кутты четвертого порядка при различных начальных условиях определяем семейство линий тока (рис. 1–3).

4. ПРИЛОЖЕНИЕ. СВОЙСТВА МАТРИЦЫ L_{ms}^{nk}

Отметим некоторые свойства матрицы коэффициентов L_{ms}^{nk} , следующие из анализа формул (16), (17). Матрица коэффициентов системы (11) является блочной, координаты блоков в матрице – (n, m) , где n – строка блоков в матрице, m – столбец блоков в матрице. Координаты элементов в блоке – (k, s) , где k – строка элементов в блоке, s – столбец элементов в блоке. Из формул (16) следует равенство $I_{nm}(t) = I_{mn}(t)$, которое свидетельствует о симметричности матрицы и ее блоков относительно диагонали. Свойство симметрии матрицы позволяет значительно уменьшить

количество элементов (17), которые необходимо вычислить при решении системы уравнений (11).

Следует отметить, что подынтегральные функции в формулах (17) имеют особенности в точке $t = 0, \tau = 0$. Для диагональных элементов матрицы подынтегральные функции стремятся к бесконечности при $t \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$, в то время как внедиагональные элементы имеют устранимые особенности в точке $(0, 0)$. Этот факт негативно влияет на точность вычисления интегралов, входящих в (17), а следовательно, и на точность решения самой системы (11), поскольку диагональные элементы являются наиболее существенными элементами матрицы. Можно показать, что для некоторых значений n, m, k, s коэффициенты могут быть выражены через однократные интегралы, подынтегральные функции которых имеют только устранимые особенности или вообще не имеют особенностей на интервале интегрирования. Ниже приведен ряд формул для вычисления коэффициентов L_{ms}^{nk} при частных значениях n, m, k, s :

а) $n = m = k = s = 0$ – коэффициент L_{00}^{00} допускает аналитическое выражение:

$$L_{00}^{00} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{3a} (a^{-1} - \sqrt{1+a^{-2}}) + \frac{1}{3} (a - \sqrt{1+a^2}) + \ln(a^{-1} + \sqrt{1+a^{-2}}) + a^{-1} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) \right); \quad (35)$$

б) $n = m = 0, k = s \neq 0$ – диагональные элементы блока с координатами $(0, 0)$:

$$L_{0k}^{0k} = \frac{1}{2\pi\alpha_k} \int_0^2 \frac{2-\tau}{\tau} \sqrt{a^2\tau^2 + 4} \sin \alpha_k \tau d\tau - \frac{a}{\pi\alpha_k^2}; \quad (36)$$

в) $n = m = 0, k \neq s, k \neq 0, s \neq 0$ – внедиагональные элементы блока с координатами $(0, 0)$:

$$L_{0s}^{0k} = \frac{(-1)^{k+s}}{\pi(\alpha_k^2 - \alpha_s^2)} \times \int_0^2 \frac{2 - \sqrt{a^2\tau^2 + 4} [\cos \alpha_s \tau - \cos \alpha_k \tau]}{\tau} d\tau; \quad (37)$$

г) $n = m = k = 0, s \neq 0$:

$$L_{0s}^{00} = -\frac{(-1)^s}{2\pi\alpha_s^2} \left(\sqrt{a^2 + 1} - \ln \frac{1 - \sqrt{a^2 + 1}}{2} - a - 1 + \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2 - \sqrt{a^2\tau^2 + 4} \cos \alpha_s \tau}{\tau} d\tau \right); \quad (38)$$

д) формулы для вычисления коэффициентов L_{n0}^{n0} , L_{m0}^{n0} и L_{m0}^{00} можно получить из выражений (36) – (38) соответственно, если заменить a на $1/a$ (это следует из формул (16), (17));

е) $n = m$, $k = s$ – диагональные элементы диагональных блоков. Используя (16), выражения для коэффициентов L_{ms}^{ms} можно записать в следующем виде:

$$L_{ms}^{ms} = \frac{1}{4\pi} \left(J_1(m, s) - \frac{1}{\alpha_s} J_2(m, s) - \frac{1}{\alpha_m} J_3(m, s) - \frac{1}{\alpha_m \alpha_s} J_4(m, s) \right), \quad (39)$$

где двойные интегралы

$$J_1(m, s) = \int_0^2 \int_0^2 \frac{(2-t)(2-\tau) \cos \alpha_m t \cos \alpha_s \tau}{\sqrt{t^2 + a^2 \tau^2}} dt d\tau, \quad (40)$$

$$J_2(m, s) = \int_0^2 \int_0^2 \frac{(2-t) \cos \alpha_m t \sin \alpha_s \tau}{\sqrt{t^2 + a^2 \tau^2}} dt d\tau, \quad (41)$$

$$J_3(m, s) = \int_0^2 \int_0^2 \frac{(2-\tau) \sin \alpha_m t \cos \alpha_s \tau}{\sqrt{t^2 + a^2 \tau^2}} dt d\tau, \quad (42)$$

$$J_4(m, s) = \int_0^2 \int_0^2 \frac{\sin \alpha_m t \sin \alpha_s \tau}{\sqrt{t^2 + a^2 \tau^2}} dt d\tau; \quad (43)$$

ж) $m = n$, $k \neq s$ – внедиагональные элементы диагональных блоков. Учитывая формулы (16), (17) и (40)–(43), имеем

$$L_{ms}^{mk} = \frac{(-1)^{k+s}}{2\pi(\alpha_k^2 - \alpha_s^2)} \left(\alpha_s J_2(m, s) - \frac{\alpha_s}{\alpha_m} J_4(m, s) - \alpha_k J_2(m, k) - \frac{\alpha_k}{\alpha_m} J_4(m, k) \right); \quad (44)$$

з) $m \neq n$, $k = s$ – диагональные элементы внедиагональных блоков:

$$L_{ms}^{ns} = \frac{(-1)^{n+m}}{2\pi(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)} \left(\alpha_m J_3(m, s) - \frac{\alpha_m}{\alpha_s} J_4(m, s) - \alpha_n J_3(n, s) - \frac{\alpha_n}{\alpha_s} J_4(n, s) \right); \quad (45)$$

и) $m \neq n$, $k \neq s$ – внедиагональные элементы

внедиагональных блоков:

$$L_{ms}^{nk} = \frac{(-1)^{n+m+k+s}}{\pi(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)(\alpha_k^2 - \alpha_s^2)} \times \left(\alpha_m \alpha_s J_4(m, s) - \alpha_m \alpha_k J_4(m, k) - \alpha_n \alpha_s J_4(n, s) + \alpha_n \alpha_k J_4(n, k) \right). \quad (46)$$

Путем замены переменных и несложных преобразований интегралы J_i могут быть приведены к следующим выражениям:

$$J_i(m, s) = q_{i1} \int_0^1 f_{i1}(t) dt + q_{i2} \int_0^1 f_{i2}(t) dt, \quad (47)$$

где q_{ij} – некоторые константы, и функции $f_{ij}(t)$ имеют вид

$$f_{11}(t) = \frac{\alpha_s((t-1) \cos 2\alpha_s t + t + 1)(d_1^4 - t^4)}{(d_1^2 - t^2)^3 \sqrt{1 + a^2 t^2}} + \frac{t^2(3d_1^2 + t^2) \sin 2\alpha_s t}{(d_1^2 - t^2)^3 \sqrt{1 + a^2 t^2}}, \quad (48)$$

$$f_{12}(t) = \frac{\alpha_m((t-1) \cos 2\alpha_m t + t + 1)(t^4 - d_2^4)}{(t^2 - d_2^2)^3 \sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{t^2(3d_2^2 + t^2) \sin 2\alpha_m t}{(t^2 - d_2^2)^3 \sqrt{t^2 + a^2}}, \quad (49)$$

$$f_{21}(t) = \frac{2\alpha_s t(t^2 - d_1^2) - (t^2 + d_1^2) \sin 2\alpha_s t}{(t^2 - d_1^2)^2 \sqrt{1 + a^2 t^2}}, \quad (50)$$

$$f_{22}(t) = \frac{\alpha_m(d_2^2 - t^2)(1 - (1-t) \cos 2\alpha_m t) + t^2 \sin 2\alpha_m t}{(d_2^2 - t^2)^2 \sqrt{t^2 + a^2}}, \quad (51)$$

$$f_{31}(t) = \frac{\alpha_s(d_1^2 - t^2)(1 - (1-t) \cos 2\alpha_s t) + t^2 \sin 2\alpha_s t}{(d_1^2 - t^2)^2 \sqrt{1 + a^2 t^2}}, \quad (52)$$

$$f_{32}(t) = \frac{2\alpha_m t(t^2 - d_2^2) - (t^2 + d_2^2) \sin 2\alpha_m t}{(t^2 - d_2^2)^2 \sqrt{t^2 + a^2}}, \quad (53)$$

$$f_{41}(t) = \frac{\sin 2\alpha_s t}{(t^2 - d_1^2) \sqrt{1 + a^2 t^2}}, \quad (54)$$

$$f_{42}(t) = \frac{\sin 2\alpha_m t}{(t^2 - d_2^2) \sqrt{t^2 + a^2}}, \quad (55)$$

где использованы обозначения $d_1 = m/s$, $d_2 = 1/d_1$.

В пунктах а) – и) содержатся все возможные варианты выражений для коэффициентов L_{ms}^{nk} , которые необходимо вычислять при решении системы уравнений (11).

Из формул (39), (44) – (46) следует, что нет необходимости вычислять элементы, описанные в пунктах ж) – и) (это элементы L_{ms}^{mk} , L_{ms}^{ns} , L_{ms}^{nk}) с помощью численных методов интегрирования, а достаточно лишь вычислять элементы L_{ms}^{ms} (это диагональные элементы диагональных блоков, пункт е)) и запоминать функции J_i , а затем уже находить остальные элементы по указанным выше формулам. Такая процедура значительно ускоряет процесс вычисления элементов матрицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан эффективный численно-аналитический алгоритм решения задачи Стокса об обтекании прямоугольной тонкой пластинки набегающим из бесконечности равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Алгоритм основан на использовании теории гармонических потенциалов и разложении неизвестной плотности в двойной ряд Фурье, с последующим преобразованием четырехкратных интегралов по поверхности пластинки в однократные интегралы.

Численные расчеты показали хорошее совпадение полученных данных по вычислению силы сопротивления пластинки с результатами других авторов. Проиллюстрированы особенности линий тока течения жидкости в зависимости от геометрического соотношения сторон пластинки.

Предложенный алгоритм может быть распространен на более сложные течения (потоки, не являющиеся перпендикулярными к поверхности пластинки), если вместо гармонических потенциалов использовать гидродинамические потенциалы [14]. Такое обобщение является важным с точ-

ки зрения рассмотрения задачи перемешивания жидкости (в рамках теории Стокса) в цилиндрических резервуарах с прямоугольными вставками.

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
2. Ottino J.M. The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 364 p.
3. Roscoe R. The flow of viscous fluids round plane obstacles // Philos. Mag. – 1949. – 40. – P. 338–351.
4. Владимирова В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 527 с.
5. V.Noble Some applications of the numerical solution of integral equations to boundary value problem // Conference on Applications of Numerical Analysis (J.L.Morris, ed.). – Springer-Verlag, Berlin, 1971. – P. 137–154.
6. Белоносов С. М., Черноус К. А. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
8. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. – М.: Наука, 1991. – 336 с.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
11. Фикера Г. Асимптотическое поведение электрического поля и плотности электрического заряда в окрестности сингулярных точек проводящей поверхности // Успехи матем. наук. – 1975. – 30, N 3. – P. 103–124.
12. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – Киев: Наук. думка, 1986. – 240 с.
13. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.
14. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.