МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

УДК 517.925.51

ОПТИМАЛЬНІ ОЦІНКИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПРАВИХ ЧАСТИН ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, В.В. ПІЧКУР

Досліджується задача оцінки практичної стійкості правої частини диференціального включення. На основі властивостей максимальної за включенням множини проведено аналіз оптимальних оцінок. Для лінійних диференціальних включень обґрунтовано критерії та отримано оцінки в окремих класах правих частин та опуклих фазових обмежень.

При дослідженні математичних моделей реальних процесів необхідно враховувати невизначеність, що впливає на параметри системи. Як правило, процес досліджується на скінченному інтервалі часу, фазові координати і збурення є обмеженими. В математичному плані такі постановки є типовими для задач практичної стійкості динамічних систем. Відправною точкою теорії практичної стійкості стали роботи Н.Г. Четаєва [1]. В подальшому ця галузь розвивалась на основі другого методу Ляпунова, зокрема, завдяки працям [2–7]. Виявляється, що значна кількість задач практичної стійкості пов'язана з визначенням всієї множини початкових умов, при яких не порушуються обмеження на заданому інтервалі часу. В роботах [8, 9] досліджувались властивості максимальної за включенням множини початкових умов, були побудовані алгоритми їх знаходження [8–10]. Невизначеність формує у кожній точці фазового простору множину напрямків поля системи [11]. Таким чином, приходимо до задачі аналізу практичної стійкості диференціального включення [12]. Оцінка діючих на систему збурюючих впливів пов'язана з оцінюванням правої частини включення. Така постановка є важливою для аналізу технічних систем. Так, на етапі проектування постає задача розрахунку допустимих збурень і керуючих впливів, при яких система функціонує в допустимому режимі [2, 13].

В даній роботі досліджується задача оцінки практичної стійкості правої частини диференціального включення. На основі властивостей оптимальної за включенням множини проводиться аналіз оптимальних оцінок, при яких забезпечується практична стійкість незбуреного розв'язку диференціального включення. Для лінійних диференціальних включень обґрунтовано критерій та оцінки в окремих класах правих частин та опуклих фазових обмежень.

Постановка задачі. В даній статті будемо використовувати наступні позначення: $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ — друга норма n-вимірного евклідового простору, $x = (x_1\, x_2 \ldots x_n)^T$; S — одинична сфера; $\operatorname{int} A$, ∂A, $A^{\varepsilon} = \{x : \|x - a\| \le \varepsilon, a \in A\}$ — відповідно множина внутрішніх точок, границя і ε-розширення множини $A \subset R^n$; $\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|$ — напівметрика Хаусдорфа; $\alpha(A, B) = \min\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ — метрика Хаусдорфа; $\rho(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \|a - b\|$ — метрика Евкліда; $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ [14,15].

Нехай $x \in R^n$, $(x, t) \in D$, D — замкнена область у R^{n+1}. Розглянемо багатозначне відображення $F : (x, t) \mapsto F(x, t)$, $0 \in F(0, t)$, $t \in [t_0, T]$, що задовольняє основні умови [16], тобто, є строгим компактозначним опуклозначним напівнеперервним зверху на D відображенням. Крім того, припустимо, що існує абсолютно неперервна додатна функція $L(t)$, для якої $\alpha(F(u, t),$ $F(v, t)) \le L(t)\|u - v\|$, $(u, t) \in D$, $(v, t) \in D$. Множину багатозначних відображень $F : (x, t) \mapsto F(x, t)$, що задовольняють зазначеним умовам, позначимо Ω.

Нехай задане напівнеперервне зверху компактозначне відображення $\Phi : t \mapsto \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$ і його графік $\Gamma(\Phi)$ належать області D, $0 \in \operatorname{int} \Phi(t)$, множина $G_0 \subseteq \Phi(t_0)$ — компакт, $\Delta(\Phi)$ — трубка відображення Φ [12]. Розглянемо клас

$$\Sigma = \{F \in \Omega : F(x, t) = B(x, t, p), p \in [0, \infty)\},$$

для якого виконуються такі умови:

1.1) $B(x, t, 0) = \{0\}$; 1.2) $0 \in B(0, t, p)$, $p \in [0, \infty)$; 1.3) при $p_1 < p_2$ існує $r > 0$ таке, що $(B(x, t, p_1))^r \subset B(x, t, p_2)$, $(x, t) \in D$; 1.4) відображення $\Psi : p \mapsto B(x, t, p)$ є неперервним; 1.5) існує число $h > 0$ таке, що для кожного $p > 0$ можна вказати $q > p$, для якого $(B(x, t, p))^h \subset B(x, t, q)$.

Розв'язок диференціального включення $\frac{dx}{dt} \in B(x, t, p)$, що відповідає початковій умові $x(t_0) = 0$, назвемо незбуреним. Позначимо $X(t, x_0, t_0, p)$ множину розв'язків задачі Коші $\frac{dx}{dt} \in B(x, t, p)$, $x(t_0) = x_0$. Якщо умова 1.1, яка накладається на клас Σ, не справджується і елементи множини Σ допускають представлення $B(x, t, p) = B_1(x, t) + B_2(x, t, p)$, $B_1(x, t) \ne \varnothing$, $B_2(x, t, p) \ne \varnothing$, $(x, t) \in D$, то клас Σ доцільно визначити у такий спосіб:

2.1) незбурений розв'язок диференціального включення $\frac{dx}{dt} \in B_1(x, t) +$ $+ B_2(x, t, 0)$ є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким [12]; 2.2) $0 \in B_1(0, t)$, $0 \in B_2(0, t, p)$,

$p \in [0, \infty)$; 2.3) при $p_1 < p_2$ існує $r > 0$ таке, що $(B_2(x,t,p_1))^r \subset B_2(x,t,p_2)$, $(x,t) \in D$; 2.4) багатозначне відображення $\Psi : p \mapsto B_2(x,t,p)$ є неперервним; 2.5) знайдеться $h > 0$ таке, що для довільного $p > 0$ існує $q > p$, для якого виконується включення $(B_2(x,t,p))^h \subset B_2(x,t,q)$.

Означення. Значення p_* параметра p називається оптимальною оцінкою правої частини диференціального включення в класі Σ відносно $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійкості незбуреного розв'язку, якщо для $p \in [0, p_*]$ незбурений розв'язок диференціального включення $\dfrac{dx}{dt} \in B(x,t,p)$ є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким і при $p > p_*$ зазначена якість практичної стійкості не має місця.

Дослідимо властивості оптимальних оцінок правих частин диференціальних включень у класі Σ.

Допоміжні твердження. Нехай права частина диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t) \tag{1}$$

є багатозначним відображенням, визначеним в області D. Позначимо як $X(t, x_0, t_0)$ множину розв'язків задачі Коші (1), $x(t_0) = x_0$, $x = x(t, x_0, t_0)$ — деякий розв'язок (1) за умови, що $x(t_0) = x_0$, $X_\varepsilon(t, x_0, t_0)$ — сукупність розв'язків задачі Коші $\dfrac{dx}{dt} \in (F(x,t))^\varepsilon$, $x(t_0) = x_0$ і введемо відображення $X = X(x_0) : t \mapsto X(t, x_0, t_0)$, $X(t) : x_0 \mapsto X(t, x_0, t_0)$, $X_\varepsilon(x_0) : t \mapsto X_\varepsilon(t, x_0, t_0)$, $(X(x_0))^\varepsilon : t \mapsto (X(t, x_0, t_0))^\varepsilon$, $t \in [t_0, T]$.

Лема 1. Якщо права частина диференціального включення (1) задовольняє основні умови і $\Gamma(X(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi)$, $\Delta(X(x_0)) \cap \Delta(\Phi) = \varnothing$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\Gamma(X_\varepsilon(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi)$, $\Delta(X_\varepsilon(x_0)) \cap \Delta(\Phi) = \varnothing$.

Доведення. Згідно з властивостями трубки багатозначного відображення існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\Gamma\left((X(x_0))^\varepsilon\right) \subseteq \Gamma(\Phi)$, $\Delta\left((X(x_0))^\varepsilon\right) \cap \Delta(\Phi) = \varnothing$. З теореми про неперервну залежність розв'язків диференціального включення від правої частини випливає, що для будь-якого розв'язку $x_\varepsilon(t, x_0, t_0)$ задачі $\dfrac{dx}{dt} \in (F(x,t))^\varepsilon$, $x(t_0) = x_0$ існує розв'язок $x(t, x_0, t_0)$, що відрізняється в рівномірній метриці від $x_\varepsilon(t, x_0, t_0)$ не більше, ніж на $\varepsilon > 0$ [16]. Таким чином, $X_\varepsilon(t, x_0, t_0) \subseteq (X(t, x_0, t_0))^\varepsilon$, $t \in [t_0, T]$. Тому $\Gamma(X_\varepsilon(x_0)) \subset \Gamma\left((X(x_0))^\varepsilon\right) \subseteq \Gamma(\Phi)$ і $\Delta(X_\varepsilon(x_0)) \cap \Delta(\Phi) = \varnothing$. Лему доведено.

Лема 2. Нехай права частина диференціального включення (1) належить класу Ω і для усіх $x_0 \in G_0$ виконуються умови $\Gamma(X(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi)$, $\Delta(X(x_0)) \cap \Delta(\Phi) = \varnothing$. Тоді існує $\lambda > 0$ таке, що $\Gamma(X_\varepsilon(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi)$, $\Delta(X_\varepsilon(x_0)) \cap \Delta(\Phi) = \varnothing$ для будь-яких $x_0 \in G_0$ і $\varepsilon \in [0, \lambda)$.

Доведення. Розглянемо функцію виду

$$\sigma(\varepsilon)=\min_{x_0\in G_0}\rho\Big(\big(\Delta X(x_0)\big)^{\varepsilon},\Delta(\Phi)\Big).$$

Вона є неперервною, $\sigma(0)>0$ [8]. Тому існує $\lambda>0$ таке, що $\sigma(\varepsilon)>0$, $\varepsilon\in[0,\lambda)$. При цьому $\Gamma\Big(\big(X(x_0)\big)^{\varepsilon}\Big)\subseteq\Gamma(\Phi)$, $\varepsilon\in[0,\lambda)$. Оскільки $\Delta\Big(\big(X(x_0)\big)^{\varepsilon}\Big)\cap$ $\cap\,\Delta(\Phi)=\varnothing$ і $\Gamma\big(X_{\varepsilon}(x_0)\big)\subset\Gamma\Big(\big(X(x_0)\big)^{\varepsilon}\Big)$, то $\Delta\big(X_{\varepsilon}(x_0)\big)\cap\Delta(\Phi)=\varnothing$, $\varepsilon\in[0,\lambda)$. Лему доведено.

Властивості оптимальної оцінки правої частини. Позначимо $X(x_0,p):t\mapsto X(t,x_0,t_0,p)$, $X(t):x_0\mapsto X(t,x_0,t_0,p)$ багатозначні відображення, які визначені розв'язками диференціальних включень з правими частинами, що належать класу Σ, $t\in[t_0,T]$.

Теорема 1. У класі Σ оптимальна оцінка p_* є обмеженою.

Доведення. Позначимо $X_r(t,x_0,t_0,p)$ множину розв'язків задачі Коші $\dfrac{dx}{dt}\in\big(B(x,t,p)\big)^r$, $x(t_0)=x_0$. Має місце оцінка $\big(X(t,x_0,t_0,p)\big)^{h(t-t_0)}\subseteq$ $\subseteq X_h(t,x_0,t_0,p)$. З умови 1.5 існує послідовність $\{p_i\}$, $0=p_0<p_1<$ $<\ldots<p_i<\ldots$, для якої одержуємо ланцюжок включень

$$\big(X(t,x_0,t_0,0)\big)^{h(t-t_0)}\subseteq X_h(t,x_0,t_0,0)\subset X(t,x_0,t_0,p_1),$$

$$X(t,x_0,t_0,p_i)\subseteq\big(X(t,x_0,t_0,p_i)\big)^{h(t-t_0)}\subseteq X_h(t,x_0,t_0,p_i)\subset$$

$$\subset X(t,x_0,t_0,p_{i+1}),\ i=1,2,\ldots.$$

Для деякого номера k має місце співвідношення $0^{kh(t-t_0)}\subset X(t,x_0,t_0,p_k)$. Виберемо k настільки великим, щоб $\big(X(t,x_0,t_0,0)\big)^{kh(t-t_0)}/\Phi(t)\neq\varnothing$ хоча б для одного $t\in[t_0,T]$. Тоді $X(t,x_0,t_0,p_k)/\Phi(t)\neq\varnothing$. Таким чином, $p_k>p_*$. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо значення p_* є оптимальною оцінкою правої частини диференціального включення в класі Σ для $\{G_0,\Phi(t),t_0,T\}$-стійкості незбуреного розв'язку, то $\Gamma\big(X(x_0,p_*)\big)\subseteq\Gamma(\Phi)$ при всіх $x_0\in G_0$ і існує $u_0\in G_0$ таке, що $\Delta\big(X(u_0,p_*)\big)\cap\Delta(\Phi)\neq\varnothing$.

Доведення. За означенням для $p\in[0,p_*]$ має місце співвідношення $\Gamma\big(X(x_0,p)\big)\subseteq\Gamma(\Phi)$ при всіх $x_0\in G_0$. Припустимо, що $\Delta\big(X(x_0,p_*)\big)\cap$ $\cap\,\Delta(\Phi)=\varnothing$, $x_0\in G_0$. За лемою 2 існує $\varepsilon>0$ таке, що $\Gamma\big(X_{\varepsilon}(x_0,p_*)\big)\subseteq$ $\subseteq\Gamma(\Phi)$. З неперервності відображення $\Psi:p\mapsto B(x,t,p)$ випливає, що можна вибрати $q>p_*$ таке, що для зазначеного ε виконується включення $B(x,t,q)\subset\big(B(x,t,p_*)\big)^{\varepsilon}$. Таким чином, $\Gamma\big(X(x_0,q)\big)\subseteq\Gamma(\Phi)$. А це суперечить визначенню оптимальної оцінки. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай при $p = p_*$ для всіх $x_0 \in G_0$ виконується включення $\Gamma\left(X(x_0, p_*)\right) \subseteq \Gamma(\Phi)$ і існує $u_0 \in G_0$ таке, що $\Delta\left(X(u_0, p_*)\right) \cap \Delta(\Phi) \neq \varnothing$, причому $(u_0, t_0) \notin \Delta(\Phi)$. Тоді p_* є оптимальною оцінкою правої частини диференціального включення в класі Σ для $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійкості незбуреного розв'язку.

Доведення. З умов теореми випливає, що існує пара $(z,t) \in \Delta\left(X(u_0, p_*)\right) \cap \Delta(\Phi)$, причому $t \neq t_0$. Оскільки $\Gamma\left(X(u_0, p)\right) \subseteq \Gamma(\Phi)$, то можна побудувати послідовність $(z_k, t_k) \to (u_0, t)$, $(z_k, t_k) \notin \Gamma(\Phi)$, $k = 1,2,...$. Зафіксуємо довільне $p > p_*$. Так як знайдеться $r > 0$ таке, що $\left(B(x,t,p_*)\right)^r \subset B(x,t,p)$, то має місце включення $X_r(t, u_0, t_0, p_*) \supseteq \left(X(t, u_0, t_0, p_*)\right)^{r(t-t_0)}$. При цьому $X_r(t, u_0, t_0, p_*) \supset z^{r(t-t_0)}$. Виберемо додатне $\delta < |t - t_0|$. Тоді

$$\Gamma\left(X(u_0, p)\right) \supset \Gamma\left(X_r(u_0, p_*)\right) \supset \left\{\left(z^{r(s-t_0)}, s\right) : s \in [t-\delta, t+\delta]\right\} \supset$$

$$\supset z^{r(t-\delta-t_0)} \times [t-\delta, t+\delta] \supset I ,$$

де $I \subset R^{n+1}$ — брус, що має вигляд

$$I = \left\{ (v,s) : v \in R^n, |v_i - z_i| \leq \frac{r}{\sqrt{n}}, i = 1,2,...,n, s \in [t-\delta, t+\delta] \right\}, \tag{2}$$

$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$. Множина (2) є околом точки z. Тому існує номер $K > 0$ такий, що $(z_k, t_k) \in I$ при $k > K$. Звідси випливає справедливість співвідношення $\Gamma\left(X(u_0, p)\right) \not\subset \Gamma(\Phi)$ для довільного $p > p_*$. Теорему доведено.

Оптимальна оцінка правої частини для лінійних диференціальних включень. Припустимо, що відображення Φ є опуклозначним і неперервним; $G_0 \subset \operatorname{int} \Phi(t_0)$ — опуклий компакт. Позначимо $c(A, \psi)$ опорну функцію множини $A \subset R^n$, $\psi \in R^n$ [14]. Таким чином, з теорем 2, 3 випливає, що для того, щоб оцінка p_* була оптимальною в класі Σ, необхідно і достатньо, щоб

$$c\left(X(t, x_0, t_0, p_*), \psi\right) \leq c\left(\Phi(t), \psi\right) \tag{3}$$

при всіх $t \in [t_0, T]$, $x_0 \in G_0$, $\psi \in S$ та існували $y_0 \in G_0$, $\xi \in S$, $\tau \in [t_0, T]$ такі, що

$$c\left(X(\tau, y_0, t_0, p_*), \xi\right) = c\left(\Phi(\tau), \xi\right). \tag{4}$$

Розглянемо структурний клас вигляду

$$\overline{\Sigma} = \left\{ F(x,t) : F(x,t) = \{A(t)x\} + U(t,p), p \geq 0 \right\}, \tag{5}$$

де відображення $U : (t,p) \mapsto U(t,p)$ є компактозначним опуклозначним неперервним за $p \geq 0$ і напівнеперервним зверху за $t \in [t_0, T]$. Крім того, припустимо: 3.1) незбурений розв'язок диференціального включення $\frac{dx}{dt} \in \{A(t)x\} + U(t,0)$ є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким; 3.2) точка $0 \in U(t,p)$; 3.3) для $p < q$ можна вказати $r > 0$ таке, що $(U(t,p))^r \subset U(t,q)$, $t \in [t_0, T]$; 3.4) знайдеться $h > 0$ таке, що для довільного $p > 0$ існує $q > p$, при якому $(U(t,p))^h \subset U(t,q)$.

Тоді для класу $\overline{\Sigma}$ виконуються умови 2.1 – 2.5 визначення класу Σ. Для множини $X(t, x_0, t_0, p)$ справедлива формула

$$X(t, x_0, t_0, p) = \{\Theta(t,t_0)x_0\} + \int_{t_0}^{t} \Theta(t,s)U(s,p)ds,$$

де $\Theta(t,t_0)$ — фундаментальна матриця системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, нормована у точці $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$. Позначимо $Q(t,p) = \int_{t_0}^{t} \Theta(t,s)U(s,p)ds$. Відображення $Q(p): t \mapsto Q(t,p)$ є опуклозначним неперервним на відрізку $[t_0, T]$ [14]. Таким чином, $X(t, x_0, t_0, p) = \{\Theta(t,t_0)x_0\} + Q(t,p)$. Із співвідношень (3), (4) випливає, що оцінка p_* оптимальна в класі $\overline{\Sigma}$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $t \in [t_0, T]$, $x_0 \in G_0$, $\psi \in S$ має місце нерівність

$$\psi^T \Theta(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} c(U(s,p_*), \Theta^T(t,s)\psi)ds \le c(\Phi(t), \psi) \tag{6}$$

та існують $y_0 \in G_0$, $\xi \in S$, $\tau \in [t_0, T]$ такі, що

$$\xi^T \Theta(\tau,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{\tau} c(U(s,p_*), \Theta^T(\tau,s)\xi)ds = c(\Phi(\tau), \xi). \tag{7}$$

Припустимо, що справджується умова розділення

$$c(U(t,p), \psi) = pg(t,\psi) + h(t,\psi), \tag{8}$$

де $g(t,\psi)$, $h(t,\psi) = c(U(t,0), \psi)$ є неперервними скалярними функціями, $g(t,\psi) > 0$, $h(t,\psi) \ge 0$, $t \in [t_0, T]$, $\psi \in R^n$. Тоді з (6) – (8) випливає

$$p_* = \min_{x_0 \in G_0} \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T \Theta(t,t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t} h(s, \Theta^T(t,s)\psi)ds}{\int_{t_0}^{t} g(s, \Theta^T(t,s)\psi)ds}.$$

Оскільки $\min_{x_0 \in G_0}\left(-\psi^T \Theta(t,t_0)x_0\right) = -c\left(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\right)$, то

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in S} \frac{c\big(\Phi(t),\psi\big) - c\Big(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\Big) - \int_{t_0}^{t} h(s,\Theta^T(t,s)\psi)\,ds}{\int_{t_0}^{t} g(s,\Theta^T(t,s)\psi)\,ds}. \quad (9)$$

При цьому

$$\min_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in S}\left(c\big(\Phi(t),\psi\big) - c\Big(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\Big) - \int_{t_0}^{t} h(s,\Theta^T(t,s)\psi)ds \right) \ge 0 . \quad (10)$$

Умова (10) означає, що незбурений розв'язок диференціального включення $\frac{dx}{dt} \in \{A(t)x\} + U(t,0)$ є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким.

На основі співвідношень (9), (10) можна запропонувати такий метод побудови оптимальної оцінки практичної стійкості правої частини диференціального включення у класі $\overline{\Sigma}$.

Алгоритм.

Введемо на $[t_0, T]$ розбиття $\alpha = \{t_i\}$, $t_0 < t_1 < \ldots t_N = T$ та апроксимуємо одиничну сферу сіткою $\omega \subset S$. Один із методів побудови ω наведено у роботах [8,10].

Крок 1. Обчислюємо фундаментальні матриці $\Theta(t,s)$ лінійної системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, $t\in\alpha$, $s\in\alpha$.

Крок 2. Визначаємо опорні функції $c\big(\Phi(t),\psi\big)$, $c\big(G_0,\psi\big)$, $c(U(t,p),\psi) = pg(t,\psi) + h(t,\psi)$, $t\in\alpha$, $\psi\in R^n$.

Крок 3. Перевіряємо умову

$$\min_{t\in\alpha} \min_{\psi\in\omega}\left(c\big(\Phi(t),\psi\big) - c\Big(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\Big) - \int_{t_0}^{t} h(s,\Theta^T(t,s)\psi)ds \right) \ge 0 .$$

Якщо остання нерівність не виконується, то переходимо до кроку 5.

Крок 4. Обчислюємо

$$\hat{p} = \min_{t\in\alpha} \min_{\psi\in\omega} \frac{c\big(\Phi(t),\psi\big) - c\Big(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\Big) - \int_{t_0}^{t} h(s,\Theta^T(t,s)\psi)\,ds}{\int_{t_0}^{t} g(s,\Theta^T(t,s)\psi)\,ds}.$$

Крок 5. Вихід.

В результаті роботи алгоритму отримаємо наближене значення оптимальної оцінки $\hat{p}$ практичної стійкості правої частини диференціального включення у класі (5).

Побудова оптимальних оцінок правих частин для деяких класів. Введемо позначення

$$\Sigma_i = \{F(x,t): F(x,t) = \{A(t)x\} + U_i(t,p), p \ge 0\},\ i = 1,2,...$$

для сукупності лінійних правих частин. Розглянемо окремі випадки побудови оптимальних оцінок для класів вигляду (5), що задовольняють умови 3.1 – 3.4 та співвідношення (8).

1. Нехай $U_1(t,p) = \{u \in R^n : u^T u \le p^2\}$. Оскільки $c(U_1(t,p),\psi) = p\|\psi\|$, то $g(t,\psi) = \|\psi\|$, $h(t,\psi) = 0$, $\psi \in R^n$, і оптимальна оцінка в класі Σ_1 має вигляд

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in S} \frac{c(\Phi(t),\psi) - c\left(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\right)}{\int\limits_{t_0}^{t} \left\| \Theta^T(t,s)\psi \right\| ds}. \tag{11}$$

При цьому із співвідношення (10) випливає, що $c(\Phi(t),\psi) - c\left(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\right) \ge 0$, $\psi \in S$, $t \in [t_0,T]$.

З формули (11) для конкретних видів фазових обмежень і множини початкових умов можна одержати оптимальні оцінки правої частини в класі Σ_1. Так, наприклад, якщо $\Phi(t) = \{x \in R^n : x^T x \le r^2(t)\}$, де $r(t)$ — неперервна додатна функція, $t \in [t_0,T]$, то $c(\Phi(t),\psi) = r(t)\|\psi\|$. У цьому випадку оптимальна оцінка в класі Σ_1 відповідно до співвідношення (11) має вигляд

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in S} \frac{r(t) - c\left(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\right)}{\int\limits_{t_0}^{t} \left\| \Theta^T(t,s)\psi \right\| ds}. \tag{12}$$

Крім того, з (10) випливає $\max\limits_{\psi\in S} c\left(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\right) \le r(t)$, $t \in [t_0,T]$. Якщо $G_0 = \{x \in R^n : x^T H x \le 1\}$, де H — симетрична додатновизначена матриця, то з (12) отримуємо оптимальну оцінку правої частини в класі Σ_1 у вигляді

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in S} \frac{r(t) - \sqrt{\psi^T \Theta(t,t_0) B^{-1} \Theta^T(t,t_0)\psi}}{\int\limits_{t_0}^{t} \left\| \Theta^T(t,s)\psi \right\| ds}.$$

2. Розглянемо випадок $U_2(t,p) = \{u \in R^n : u^T B(t) u \le p^2\}$, де $B(t)$ — неперервна додатновизначена симетрична матриця розмірності $n \times n$, $t \in [t_0,T]$. Оскільки $c(U_2(t,p),\psi) = p\sqrt{\psi^T B^{-1}(t)\psi}$, то виконується умова розділення і $g(t,\psi) = \sqrt{\psi^T B^{-1}(t)\psi}$, $h(t,\psi) = 0$, $\psi \in R^n$. Тому, якщо має місце нерівність $c(\Phi(t),\psi) - c\left(G_0, \Theta^T(t,t_0)\psi\right) \ge 0$, $\psi \in S$, $t \in [t_0,T]$, то значення

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]}\min_{\psi\in S}\frac{c\big(\Phi(t),\psi\big)-c\big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\psi\big)}{\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\psi^T\Theta(t,s)B^{-1}(t)\Theta^T(t,s)\psi}\,ds}$$

є оптимальною оцінкою в класі Σ_2.

3. Нехай $U_3(t,p)=\{u\in R^n : |u_i|\le p\cdot r_i(t),\ i=1,2,\dots,n\}$, де функції $r_i(t)>0$ є неперервними, $t\in[t_0,T]$, $i=1,2,\dots,n$. Тоді $c(U_3(t,p),\psi)= = p\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(s)|\psi_i|$, $g(t,\psi)=\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(t)|\psi_i|$, $h(t,\psi)=0$, $\psi\in R^n$. Таким чином, оптимальна оцінка в класі Σ_3 обчислюється за формулою

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]}\min_{\psi\in S}\frac{c\big(\Phi(t),\psi\big)-c\big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\psi\big)}{\int\limits_{t_0}^{t}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(s)\left|\Theta_i^T(t,s)\psi\right|ds},$$

де $c\big(\Phi(t),\psi\big)-c\big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\,\psi\big)\ge 0$, $\psi\in S$, $t\in[t_0,T]$, $\Theta(t,s)= =\big(\Theta_1(t,s)\,\Theta_2(t,s)\dots\Theta_n(t,s)\big)$, $\Theta_i(t,s)\in R^n$, $i=1,2,\dots,n$.

4. Виберемо деяку точку $u_0\in R^n$, $U_4(t,p)=\{u\in R^n : (u-u_0)^T\times \times B(t)(u-u_0)\le p^2\}$. У цьому випадку опорна функція $c(U_4(t,p),\psi)= = p\sqrt{\psi^T B^{-1}(t)\psi}+\psi^T u_0$. Виходячи з (8), (9) за умови, що $c\big(\Phi(t),\psi\big)- -c\big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\psi\big)-\int\limits_{t_0}^{t}\psi^T\Theta(t,s)u_0\,ds\ge 0$, $\psi\in S$, $t\in[t_0,T]$, отримуємо співвідношення

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]}\min_{\psi\in S}\frac{c\big(\Phi(t),\psi\big)-c\big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\psi\big)-\int\limits_{t_0}^{t}\psi^T\Theta(t,s)u_0\,ds}{\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\psi^T\Theta(t,s)B^{-1}(t)\Theta^T(t,s)\psi}\,ds}$$

для обчислення оптимальної оцінки в класі Σ_4 .

5. Розглянемо $U_5(t,p)=\{u\in R^n : (u-u_0)^T B(t)(u-u_0)\le p^2,\ u_0\in Z\}$, де $Z\subset R^n$ — деякий компакт. У цьому випадку опорна функція $c(U_5(t,p),\psi)= = p\sqrt{\psi^T B^{-1}(t)\psi}+c(Z,\psi)$. Якщо

$$c\big(\Phi(t),\psi\big)-c\big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\psi\big)-\int\limits_{t_0}^{t}c(Z,\Theta^T(t,s)\psi)\,ds\ge 0,\ \psi\in S,\ t\in[t_0,T],$$

то оптимальна оцінка в класі Σ_5 має вигляд

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]}\min_{\psi\in S}\frac{c\big(\Phi(t),\psi\big)-c\Big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\psi\Big)-\int\limits_{t_0}^{t}c(Z,\Theta^T(t,s)\psi)ds}{\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\psi^T\Theta(t,s)B^{-1}(t)\Theta^T(t,s)\psi}\,ds}.$$

6. Припустимо, що відображення $f: t\mapsto U(t)$ є опуклозначним і компактозначним, $U(t)\subset R^n$, $0\in U(t)$, $t\in[t_0,T]$. Задамо $U_6(t,p)=\big(U(t)\big)^p$. У цьому випадку $c(U_6(t,p),\psi)=p\|\psi\|+c(U(t),\psi)$, $\psi\in R^n$, і має місце умова (8). Нехай виконується нерівність $c\big(\Phi(t),\psi\big)-c\Big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\psi\Big)-$ $-\int\limits_{t_0}^{t}c(U(t),\Theta^T(t,s)\psi)ds\ge 0$, $\psi\in S$, $t\in[t_0,T]$, яка забезпечує $\{G_0,\Phi(t),t_0,T\}$-стійкість незбуреного розв'язку диференціального включення $\frac{dx}{dt}\in$ $\in A(t)x+U(t)$. Позначивши $g(t,\psi)=\|\psi\|$, $h(t,\psi)=c(U(t),\psi)$, з формули (9) отримуємо співвідношення

$$p_* = \min_{t\in[t_0,T]}\min_{\psi\in S}\frac{c\big(\Phi(t),\psi\big)-c\Big(G_0,\Theta^T(t,t_0)\psi\Big)-\int\limits_{t_0}^{t}c(U(s),\Theta^T(t,s)\psi)ds}{\int\limits_{t_0}^{t}\left\|\Theta^T(t,s)\psi\right\|ds}$$

для знаходження оптимальної оцінки в класі Σ_6.

ВИСНОВКИ

В статті досліджено властивості оптимальних оцінок практичної стійкості правої частини диференціального включення. Для лінійних диференціальних включень при опуклих фазових обмеженнях обґрунтовано критерій оптимальності оцінки. У випадку виконання умови розділення запропоновано формулу для визначення оптимальної оцінки та чисельний алгоритм. Наведено приклади побудови оптимальної оцінки для окремих класів правих частин. Результати дослідження можуть застосовуватись при побудові множин керувань, що забезпечують стабілізацію до практичної стійкості систем керування, а також при оцінці областей постійно діючих збурень на праву частину, які ще не порушують практичної стійкості розв'язків динамічної системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 535 с.

2. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — Киев: Наук. думка, 1985. — 304 с.
3. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. — М.: Высшая шк., 1973. — 271 с.
4. *Каменков Г.В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени // Прикладная математика и механика. — 1953. — **17**, вып.5. — С. 529–540.
5. *Карачаров К.А., Пилютик А.Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. — М.: Физматиздат, 1962. — 244 с.
6. *Кириченко Н.Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. — Киев: Выща шк., 1978. — 184 с.
7. *Мартынюк А.А.* Практическая устойчивость движения. — Киев: Наук. думка, 1983. — 248 с.
8. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. — Київ: Вид-во Київського ун-та ім. Т.Г. Шевченка, 2000. — 197 с.
9. *Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В.* Об оптимальных множествах практической устойчивости // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 5. — С. 5–18.
10. *Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Чисельні методи побудови оптимальних множин практичної стійкості динамічних систем // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ, Наук. рада НАНУ з проблеми «Кібернетика», 2001. — **2**. — С. 85–94.
11. *Kurzhanski A., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. — Boston: IIASA and Birkhäuser. — 1997. — 321 p.
12. *Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В.* Оптимальные множества практической устойчивости дифференциальных включений // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 2. — С. 10–19.
13. *Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И.* Управление квантомеханическими процессами. — М.: Наука, 1984. — 256 с.
14. *Благодатских В.И.* Теория дифференциальных включений. Часть I. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1979. — 89 с.
15. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наук. думка, 1999. — 630 с.
16. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 224 с.

Надійшла 19.05.2003