УДК 519.87: (62.50 + 519.718)

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ ПЛАНУВАННЯ СТОХАСТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ В ЗАДАЧАХ НАЙСКОРІШОГО ВИЯВЛЕННЯ НЕПОЛАДКИ

М.В. АНДРЄЄВ

Досліджено керовану стохастичну модель найскорішого виявлення моменту неполадки та слабкокеровану стохастичну модель керування процесом неполадки.

ВСТУП

У деяких розділах математики вживається термін «біфуркація» щодо ситуації, коли розглядається об’єкт або розв’язок нелінійного диференціального рівняння, залежний від параметра, і в будь-якому околі деякого значення цього параметра досліджувані якісні властивості об’єкта або розв’язку не є однаковими для всіх значень параметра. Тобто при цьому значенні параметра, яке називають «біфуркаційним значенням» або «точкою біфуркації», відбуваються якісні зміни в поведінці об’єкта або розв’язку рівняння, і саме тому виникає задача своєчасного виявлення моменту появи певних особливостей поведінки об’єктів різної природи. Зокрема, в іноземній літературі з питань теорії особливостей замість «біфуркації» вживають термін «катастрофи». У цій статті розглядається задача найскорішого виявлення так званого «моменту неполадки», — терміну, що в науковій літературі різного профілю часто вживається замість «біфуркація» та «катастрофа».

Задача неполадки (a problem of disorder) часто виникає в різних сферах людської діяльності, скажімо, в технічній, економічній та інших галузях народного господарства; у страховій, соціальній сферах, включаючи, наприклад, проблематику діагностики та передбачень тощо. Розв’язання такої задачі може бути успішним лише при чіткому з’ясуванні суті проблеми, що забезпечує оптимальний вибір математичної моделі в умовах невизначеності та введення критерію оптимізації, на основі якого побудована стратегія буде оптимальною.

Під терміном «неполадка», як правило, розуміють вихід із ладу або режиму нормального функціонування живого організму, технічного пристрою, економіки тощо. Для лікаря, інженера, менеджера, економіста виникає задача виявлення моменту неполадки на основі спостережень відповідно за станом здоров’я, точності технічного пристрою, якості продукції виробничого процесу в економіці, причому в момент неполадки відбувається зміна якості процесу відповідно здоров'я — хвороба, точність — хибність, якість — брак. Таким чином виникає задача виявлення моменту неполадки [1].

КЕРОВАНА МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ВИЯВЛЕННЯ МОМЕНТУ НЕПОЛАДКИ

Момент неполадки $\zeta > 0$, заданий на ймовірносному просторі (Ω, F, P), тобто $\zeta > 0 \pmod P$, $M\zeta < \infty$. Позначимо: $R^+ = [0, +\infty)$ — числова множина невід'ємних дійсних чисел; $X = \{X_n,\ n = 1,2,...\}$ — процес спостережень; $U = \{u_n(X_n),\ n = 1,2,...\}$ — стратегія керування, причому $u_n(X_n) = u_n,\ u_n \in R^+$. Рівняння моделі керованого стохастичного експерименту задано у вигляді

$$X_{n+1} = X_n + u_n, \quad n = 1,2,\ldots \tag{1}$$

Послідовність $U = \{u_n,\ \ n \geq 1\}$ є стратегією керування, а також контролю за виявленням моменту неполадки, яку необхідно побудувати або синтезувати, оскільки u_n в (1) як рішення в момент n приймається у стані X_n, а u_n як n-й інтервал контролю визначає X_{n+1}.

Функція

$$\varphi(x,u) = M\{a + c\max(0, x + u - \zeta \mid \zeta > x)\}, \quad a, c > 0 \tag{2}$$

характеризує середні втрати, якщо у стані $x > 0$ приймається рішення u, де a — вартість кожного рішення u_n, $n \geq 1$; c — штраф за невиявлення неполадки при цьому рішенні.

Для моделі $X = \{X_n,\ \ n = 1,2,\ldots\}$, керованою стратегією $U = \{u_n,\ n = 1,2,\ldots\}$, за умови $X_1 = x$ визначимо марковський момент

$$\tau = \tau(\omega) = \inf\{k : X_{k-1} < \zeta(\omega) \leq X_k\} \tag{3}$$

попадання моделі в область $G = [\zeta, +\infty)$. Позначимо через

$$\psi_x(U) = M_x^U\left\{\sum_{n=1}^{\tau-1}\varphi(X_n, u_n)\right\} = M_x^U\{a(\tau-1) + c(X_\tau + u_\tau - \zeta)\} \tag{4}$$

очікувані усереднені втрати, пов'язані зі стратегією U, де M_x^U — символ математичного сподівання, взятого за мірою, що відповідає моделі спостережень X, керованою стратегією U, з початковим станом x. Функціонал $\psi_x(U)$ називається критерієм оптимальності стратегії U.

Постає задача: за умови $P\{\zeta > x\} > 0$ знайти мінімальний ризик

$$\rho(x) = \inf_U \psi_x(U) \quad \forall\, x. \tag{5}$$

Мінімальний ризик $\rho(x)$ можна трактувати як мінімальні очікувані усереднені втрати, пов'язані з оптимальною стратегією контролю функціонування моделі від початку, коли вона знаходиться в стані x, і до настання моменту неполадки ζ.

Стратегія U^* називається оптимальною, якщо $\psi_x(U^*) = \rho(x) \quad \forall x$.

Розглянемо умови, за яких існує оптимальна стратегія контролю.

Простір R^+ являється локально компактним. Позначимо $\overline{R}^+ = R^+ \bigcup \{+\infty\}$. Очевидно $\overline{R}^+$ — компактний простір.

Оскільки $\varphi(X_n, +\infty) = +\infty$, $n < \tau$, а отже $\psi_x(U) = +\infty$, то оптимальне рішення можна вибрати так, щоб $U(X_n) = u_n \in R^+ \quad \forall n$. А тому в подальшому можна вважати, що простір допустимих рішень є компактним.

Нехай $U = \{u_n, \ n = 1, 2, \ldots\}$ — довільна стратегія, така, що $u_m = 0$, $m < \tau$. Побудуємо відповідно нову стратегію $\overline{U} = \{\overline{u}_n, \ n = 1, 2, \ldots\}$ таким чином:

$$\overline{u}_n = u_n, \quad n < m,$$

$$\overline{u}_n = u_{n+1}, \quad n \geq m.$$

Тоді одержимо

$$\psi_x(\overline{U}) < \psi_x(U) \quad \forall x. \tag{6}$$

Тому в подальшому можна розглядати тільки такі стратегії $U = \{u_n, \ n \geq 1\}$, коли $u_n > 0 \quad \forall n$.

За цих умов справедливі такі твердження.

Лема. Мінімальний ризик $\rho(x)$ (5) є обмеженою, монотонно неспадною та неперервною функцією.

Доведення. Розглянемо стратегію $U = \{u_n \equiv 1, \ n = 1, 2, \ldots\}$. Тоді для всіх $x \geq 0$ маємо

$$\psi_x(U) \leq a[M(\zeta - x) - 1] + c \leq a(M\zeta - 1) + c < \infty.$$

Тому

$$\rho(x) = \inf_U \psi_x(U) \leq a(M\zeta - 1) + c \quad \forall x \geq 0.$$

Отже, обмеженість $\rho(x)$ обґрунтована.

Позначимо через $M(z)$ множину всіх допустимих стратегій для початкового стану z. Нехай $0 \leq x < y$. За кожної довільної стратегії $U^{(y)} = \left\{u_n^{(y)}, \ n = 1, 2, \ldots\right\} \in M(y)$ побудуємо відповідну стратегію $U^{(x)} = \left\{u_n^{(x)}, \ n = 1, 2, \ldots\right\} \in M(x)$ таким чином: $u_1^{(x)} = u_1^{(y)} + (y - x)$, $u_n^{(x)} = u_n^{(y)}$, $\forall n \geq 2$ і позначимо множину таких стратегій через $\overline{M}(x)$. Видно, що $\overline{M}(x) \subset M(x)$. З іншого боку, за побудовою $\psi_x(U^{(x)}) = \psi_y(U^{(y)})$, $\forall U^{(y)} \in M(y)$. Тому

$$\rho(x) = \inf_{U \in M(x)} \psi_x(U) \leq \inf_{U \in \overline{M}(x)} \psi_x(U) = \inf_{U \in M(y)} \psi_x(U) = \rho(y),$$

тобто $\rho(x) \le \rho(y), \quad x < y$.

Отже, неспадна монотонність $\rho(x)$ обгрунтована.

Нехай U — довільна стратегія; τ — момент першого попадання $X = \{X_n,\ n \ge 1\}$ в область G, який задається формулою (3).

Тоді, за будь-якого $\varepsilon > 0$ для $\psi_{x-\varepsilon}(U)$ маємо

$$\psi_{x-\varepsilon}(U) = P\{X_\tau - \varepsilon \ge \zeta\}[\psi_x(U) - \varepsilon c] +$$
$$+ P\{X_\tau - \varepsilon < \zeta\}[\psi_x(U) + a + c(X_{\tau+1} - X_\tau - \varepsilon)] =$$
$$= \psi_x(U) - \varepsilon c\, P\{X_\tau - \varepsilon \ge \zeta\} -$$
$$- [a + c(X_{\tau+1} - X_\tau - \varepsilon)]\, P\{X_\tau - \varepsilon < \zeta\} \ge \psi_x(U) - \varepsilon c, \tag{7}$$

а для $\psi_{x+\varepsilon}(U)$ отримуємо

$$\psi_{x+\varepsilon}(U) = P\{X_{\tau-1} + \varepsilon < \zeta\}[\psi_x(U) + \varepsilon c] +$$
$$+ P\{X_{\tau-1} + \varepsilon \ge \zeta\}[\psi_x(U) - a - c(X_\tau - X_{\tau-1} - \varepsilon)] =$$
$$= \psi_x(U) + \varepsilon c\, P\{X_{\tau-1} + \varepsilon < \zeta\} - [a + c(X_\tau - X_{\tau-1} - \varepsilon)] \times$$
$$\times P\{X_{\tau-1} + \varepsilon \ge \zeta\} \le \psi_x(U) + \varepsilon c\,. \tag{8}$$

Із (7), (8) випливає, що

$$\rho(x - \varepsilon) \ge \rho(x) - \varepsilon c\,, \tag{9}$$

$$\rho(x + \varepsilon) \le \rho(x) + \varepsilon c\,. \tag{10}$$

Із (9), (10) та неспадної монотонності випливає неперервність $\rho(x)$.■

Теорема 1. Мінімальний ризик $\rho(x)$ є розв'язком рівняння

$$\rho(x) = \inf_{u>0}\left\{\varphi(x,u) + \frac{P\{\zeta > x+u\}}{P\{\zeta > x\}}\rho(x+u)\right\}, \tag{11}$$

де

$$\varphi(x,u) = M\left[a + c\cdot\max(0, x+u-\zeta \mid \zeta > x)\right] =$$

$$= a + \frac{c}{P\{\zeta > x\}}\int_x^{x+u}(x+u-t)\,F_\zeta(dt)\,.$$

Існує оптимальна стаціонарна стратегія $u^* = u^*(x)$, яка реалізує infimum в правій частині рівняння оптимальності (11), тобто

$$\rho(x) = \varphi(x,u^*) + \frac{P\{\zeta > x+u^*\}}{P\{\zeta > x\}}\rho(x+u^*)\,, \tag{12}$$

де $0 < u^* < +\infty \ \ \forall x$.

Доведення. В силу адитивності критерію оптимальності (4) із виразу для мінімального ризику (5) при $x < \zeta$ маємо

$$\rho(x) = \inf_U \psi_x(U) = \inf_U M_x^U \left[\sum_{n=1}^{\tau-1} \varphi(X_n, u_n) \right] =$$

$$= \inf_U M_x^U \left[\varphi(x_1, u_1) + \frac{P\{\zeta > x_2\}}{P\{\zeta > x_1\}} \rho(x_2) \right] =$$

$$= \inf_{u>0} \left[\varphi(x, u) + \frac{P\{\zeta > x+u\}}{P\{\zeta > x\}} \rho(x+u) \right].$$

Оскільки $P\{\zeta > x + u\}$ є напівнеперервною за u функцією, то infimum в правій частині виразу для $\rho(x)$ досягається, а тому стратегія $u^* = u^*(x)$ існує.■

Теорема 2. Рівняння оптимальності (11) має єдиний розв'язок.

Доведення ґрунтується на методиці наближеного розв'язання рівняння (11) із застосуванням методу послідовних наближень.

При кожному n, $n = 1, 2, \dots$ за індукцією будуємо послідовність функцій $V_m^{(n)}(x)$, $m = 1, 2, \dots$,

покладаючи

$$V_{m+1}^{(n)}(x) = \inf_{u \geq \frac{1}{n}} \left[\varphi(x, u) + \frac{P\{\zeta > x+u\}}{P\{\zeta > x\}} V_m^{(n)}(x+u) \right],$$

де $V_1^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$ — довільна обмежена функція.

Тоді розв'язок $\rho(x)$ рівняння (11) має вигляд

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} V_m^{(n)}(x) \quad \forall x,$$

причому для множини допустимих стратегій

$$M_n = \left\{ u_k,\ k = 1, 2, \dots:\ u_k \geq \frac{1}{n} \ \ \forall k \right\}$$

на скінченному інтервалі збіжність рівномірна. ■

Теорема 3. Нехай ζ задовольняє умову, що при $x < \zeta$ залишок $(\zeta - x)$ має такий же розподіл, як і величина ζ (таку властивість має експоненціальний закон розподілу). Тоді мінімальний ризик $\rho(x)$ (11) не залежить від x, тобто $\rho(x) = \text{const} \ \ \forall x$.

Доведення. Позначимо через $\rho^{\zeta}(x)$ ризик, що відповідає випадковій величині ζ. Якщо в розглянутій задачі в якості вихідної випадкової величини взяти $\zeta' = \zeta - x$, то

$$\rho^{\zeta'}(t) = \rho^{\zeta}(t + x) \quad \forall t < \zeta'.$$

Зокрема,

$$\rho^{\zeta'}(0) \equiv \rho^{\zeta}(x) \quad \forall\, t < \zeta\,. \tag{13}$$

За теоремою 2 $\rho^{\zeta}(x)$ — єдиний розв'язок, який визначається в стані x розподілом ζ. Звідси з урахуванням умови щодо властивості розподілу ζ випливає

$$\rho^{\zeta'}(x) = \rho^{\zeta}(x) \quad \forall\, x\,.$$

Зокрема,

$$\rho^{\zeta'}(0) = \rho^{\zeta}(0)\,. \tag{14}$$

Із (13), (14) отримуємо

$$\rho^{\zeta}(x) = \rho^{\zeta}(0) = \text{const} \quad \forall\, x\,. \blacksquare$$

СЛАБКОКЕРОВАНА МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ НЕПОЛАДКИ

Розглядається слабкокерована стохастична модель [1], яка описується процесом марковського відновлення з фазовим простором станів (ФПС) $E_0 := E \bigcup \{0\}$, $E = \{1, 2, ..., N...\}$, вкладений ланцюг Маркова (ВЛМ) $X^{\varepsilon} = \left\{X_n^{\varepsilon},\ n = 1, 2, ...\right\}$ якого задається збуреною матрицею перехідних ймовірностей (МПЙ) $P_{\varepsilon}^f = P_0 - \varepsilon P_1^f$, де P_0 — МПЙ незбуреного ергодичного ланцюга Маркова зі стаціонарним розподілом $\rho = \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N, ...\}$; $f = \left\{f(x_n) = u_n,\ \ n = 1, 2, \ldots\right\}$ — стаціонарна стратегія керування; P_1^f — матриця збурень, керована стратегією f, $0 < \varepsilon < 1$; $(I - P_{\varepsilon}^f)$ — звідно-оборотна матриця (оператор) $\forall\, f$. Елементи матриці збурень $P_1^f = \left\{p_{kr}^{1, f(k)};\ k, r \in E\right\}$ залежать від керувань і задовольняють умовам

$$\exists\, k \in E:\ p_{k0}^{1, f(k)} > 0;\ p_{00}^{0} - \varepsilon p_{00}^{1, f(0)} = 1\,.$$

Момент неполадки ζ_{ε} визначається як момент першого досягнення ВЛМ нульового стану поглинання $x = 0$. Якщо у стані $x > 0$ прийнято рішення u, то очікуваний в середньому дохід за один період часу в цьому стані задається функцією $\varphi(x, u)$, обмеженою за сукупністю змінних x, u. Критерій якості або оптимальності стратегії f визначається функціоналом u_{ε}^f — оцінкою стратегії f у вигляді

$$u_{\varepsilon}^f(x) = M^f\left[L \,\middle|\, x_0 = x\right], \tag{15}$$

де $L = \sum_{n=0}^{\zeta_{\varepsilon}} \varphi_{x_n}(u_{n+1})$.

Оцінку стратегії $u_\varepsilon^f(x)$ можна трактувати як очікуваний наробок, пов'язаний зі стратегією керування f моделлю з початковим станом x та моментом її неполадки ζ_ε^f. Стратегія керування f^* — оптимальна, якщо $u_\varepsilon^{f^*}(x) - u_\varepsilon^f(x) \ge 0 \;\; \forall\, f, x$.

Вектор очікуваного наробку для стаціонарної стратегії f із класу F допустимих стратегій задовольняє рівняння

$$u_\varepsilon^f = \varphi^f + (P_0 - \varepsilon P_1^f) u_\varepsilon^f , \tag{16}$$

в якому задані вектор

$$\varphi^f = \{\varphi_k(f(k));\; k \in E\}$$

і матриці

$$P_0 = \left\{p_{kr}^0;\;\; k, r \in E\right\};\;\; P_1^f = \left\{p_{kr}^{1,f(k)};\;\; k, r \in E\right\}.$$

Відповідне рівняння Беллмана для оптимального очікуваного наробку u_ε^* має вигляд

$$u_\varepsilon^* = \sup_{f \in F} \left\{\varphi^f + (P_0 - \varepsilon P_1^f) u_\varepsilon^*\right\}. \tag{17}$$

Розв'язок рівняння (17) шукаємо у вигляді степеневого ряду за степенями ε

$$u_\varepsilon^* = \sum_{m=-1}^{\infty} u_m^* \varepsilon^m , \tag{18}$$

коефіцієнти якого задовольняють систему рівнянь

$$(I - P_0) u_{-1}^* = 0 ,$$

$$(I - P_0) u_0^* = \sup_{f \in F} \left[\varphi^f - P_1^f u_{-1}^*\right],$$

$$(I - P_0) u_m^* = -\inf_{f \in F_m} P_1^f u_{m-1}^*, \;\; m \ge 1 , \tag{19}$$

де підкласи F_m, $m \ge 1$ допустимих стратегій визначаються рекурентно

$$F_1 = \left\{f \in F : (I - P_0) u_0^* = \varphi^f - P_1^f u_{-1}^*\right\},$$

$$F_m = \left\{f \in F_{m-1} : (I - P_0) u_m^* = -P_1^f u_{m-1}^*\right\}, \;\; m \ge 2 .$$

Застосовуючи до системи рівнянь (19) методику узагальненого обернення звідно-оборотного оператора $(I - P_0]$, маємо

$$u_{-1}^* = \hat{\varphi}^* / \hat{q}^* \mathbf{1} ,$$

$$u_m^* = R_0 \varphi_m^* + \hat{\psi}_m / \hat{q}^* \mathbf{1}, \quad m \geq 0, \tag{20}$$

де $R_0 = (I - P_0 + \Pi)^{-1} - \Pi$ — узагальнений обернений оператор для $(I - P_0)$; $\Pi = [\mathbf{1} \otimes \rho]$ — проектор, у виразі якого символ $\otimes$ означає операцію тензорного множення;

$$\hat{\varphi}^* / \hat{q}^* = \sup_{f \in F} \left[\hat{\varphi}^f / \hat{q}^f \right]; \quad \hat{\varphi}^f = \sum \rho_k \varphi_k (f(k));$$

$\hat{q}^f = \sum \rho_k P_{k0}^{1,f(k)}$; $\mathbf{1}$ — одиниця в E;

$$\varphi_0^* = \sup_{f \in F} \left[\varphi^f \hat{q}^* - q^f \hat{\varphi}^* \right] \Big/ \hat{q}^*,$$

$$\varphi_{m+1}^* = \inf_{f \in F} \left[\psi_m^f \hat{q}^* - \psi_m^* q^f \right] \Big/ \hat{q}^*, \quad m \geq 2,$$

$$\psi_m^f = P_1^f R_0 \varphi_m^*, \quad \hat{\psi}_m^f = \sum_{k \in E} \rho_k \psi_m (f(k)).$$

Оптимальна стратегія керування f^* процесом неполадки реалізує supremum та infimum в правих частинах рівнянь системи (19).

У випадку, коли параметр ε достатньо малий або наближається до нуля, значення оцінки оптимальної стратегії $\varepsilon u_\varepsilon^*$ достатньо близьке або наближається до коефіцієнта u_{-1}^* розкладу ряду (18). Тоді говорять про асимптотично оптимальну стратегію f^a, що реалізує supremum в правій частині другого рівняння відносно u_0^* системи (19).

Зазначимо, що в основі подання розв'язку рівняння оптимальності (17) у вигляді (18), (19) лежить плідна ідея методу ланцюжків М.М. Боголюбова сукупно з ідеєю методу послідовної оптимізації стохастичних моделей або у нашому випадку марковських процесів рішень.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ КОНТРОЛЮ ТА КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ НЕПОЛАДКИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

До цих пір вважалося, що ми повністю спостерігаємо траєкторію керованого експерименту

$$x_m \xrightarrow{u_m} x_{m+1} \xrightarrow{u_{m+1}} \ldots x_{t-1} \xrightarrow{u_{t-1}} x_t \rightarrow \ldots, \tag{21}$$

де стани x_t — це елементи множин X_t. Припустимо зараз, що стан експерименту в момент t описується парою $x_t y_t$, причому перша компонента стає нам відомою, а друга — ні. Таким чином, дійсна еволюція експерименту задається траєкторією — частково спостережуваною випадковою керованою послідовністю

$$x_m\,y_m \xrightarrow{u_m} x_{m+1}\,y_{m+1} \xrightarrow{u_{m+1}} \ldots\, x_{t-1}y_{t-1} \xrightarrow{u_{t-1}} x_t\,y_t \rightarrow \ldots\ , \qquad (22)$$

а спостерігаємо, як і раніше, траєкторію (21).

Неспостережувані стани y_t — це елементи якихось множин Y_t. Вони впливають як на механізм переходу до чергового стану, так і на одержуваний прибуток.

Щоб визначити міру у просторі траєкторій, необхідно задати початковий розподіл μ і стратегію керування π. У математичній статистиці розглядається байєсів підхід, при якому для невідомого стану y_m вводиться апріорний розподіл ймовірностей.

Стратегія π не може залежати від значень неспостережуваних станів $y_m, y_{m+1}, \ldots$. Оскільки значення x_t стає нам відомим, то для вибору керування u_t суттєвим є апостеріорний розподіл v_t для y_t за спостереженим x_t. Ми включаємо розподіл v_t в історію спостережень, від якої залежить вибір чергового керування. При цьому x_t — будь-яка точка X_t, а v_t — умовна ймовірносна міра на Y_t. Зазначимо: якщо всі простори неспостережуваних станів Y_t складаються лише з однієї точки, то ми одержуємо модель експерименту з повною інформацією. Задачу зведення моделі з неповною інформацією до моделі з повною інформацією у загальному випадку розглянуто у роботі [2].

У роботі [3] розглянуто задачу оптимальної зупинки випадкових процесів в дискретному часі за неповними даними та їх редукцію до задачі оптимальної зупинки випадкових процесів в дискретному часі за повними даними. Основний результат роботи полягає у тому, що за деяких умов щодо критерію оптимальності та динаміки кожної із компонент частково спостережуваної двохкомпонентної випадкової послідовності отримано швидкість збіжності порядку ε ціни оптимальної зупинки неспостережуваної компоненти до гранично ідеальної ціни за умови, що точність спостережень стає ідеальною, тобто неточність спостережень характеризується малим параметром ε, який збігається до нуля.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Андрєєв М.В.* Синтез оптимальних стратегій контролю та керування в задачах неполадки // Теорія еволюційних рівнянь. Міжнар. конф. «П'яті Боголюбовські читання». — 22–24 травня 2002 р. Кам'янець-Подільський. Тези доп. — С. 20–21.
2. *Андрєєв М.В.* Адаптивні слабкокеровані марковські та напівмарковські процеси в дискретному часі // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 2. — С. 92–107.
3. *Ферманн Х.* Сходимость цен при оптимальной остановке частично наблюдаемых случайных последовательностей относительно квадратичного критерия // Теория вероятностей и ее применение. — 1981. — **26**. Вып. 2. — С. 364–369.

Надійшла 02.06.2003