УДК 518.9

ЗАДАЧА УДЕРЖАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

С. Н. АМИРГАЛИЕВА, В. В. ОСТАПЕНКО, И. Н. ТЕРЕЩЕНКО

Рассмотрены дифференциальные игры убегания, в которых цель догоняющего игрока удержать траекторию управляемого дифференциального уравнения в заданном замкнутом подмножестве евклидового пространства. Изучены случаи простого движения, движения с простой матрицей. В общем линейном случае применен метод H- выпуклых множеств.

ВВЕДЕНИЕ

Современная теория дифференциальных игр рассматривает либо отдельно задачу преследования и задачу убегания (при этом используются совершенно разные методы решения), либо объединенную задачу сближения-уклонения [1–5].

Задача сближения-уклонения может изучаться на фиксированном интервале времени $[0,\theta]$. При этом существует две постановки: 1 — время окончания игры фиксировано и равно θ; 2 — игра может закончиться раньше θ.

Игру ведут два игрока: P (догоняющий) и E (убегающий). Цель игрока P — попасть (в конце игры) на терминальное множество M. При этом он должен удержать траекторию во множестве фазовых ограничений N. Естественно предположить, что $M \subset N$.

Рассмотрим игру с фиксированным временем окончания при условии $M = N$. В этом случае цель игрока P — удержать траекторию динамической системы во множестве M на всем интервале $[0,\theta]$. Такая задача удержания является частным случаем задачи сближения-уклонения с фиксированным временем окончания.

В данной статье рассматривается более сложный случай, когда цель игрока P — удержать траекторию во множестве M на всей полуоси $[0,+\infty]$.

Исследование дифференциальной игры удержания актуально, поскольку моделирует процесс удержания в заданных пределах параметров функционирующего во времени объекта при наличии неопределенных помех.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую динамикой

$$\dot{z} = f(z,u,v),$$

где $z \in E^n$; $u \in U$; $v \in V$; E^n — n-мерное евклидово пространство; U и V — компакты в евклидовых пространствах.

Функция f удовлетворяет условиям [1], которые обеспечивают существование, продолжаемость, единственность траектории и компактность пучка траекторий:

1) $f(z,u,v)$ — непрерывна по совокупности переменных и локально Липшицева по z;

2) существует константа C такая, что $\|f(z,u,v)\| \le C\|z\|$ для всех $z \in E^n$, $u \in U$, $v \in V$;

3) множество $f(z,u,v)$ выпукло для всех $z \in E^n$, $v \in V$.

Допустимыми управлениями игроков P и E являются измеримые функции со значениями соответственно U и V.

Игра ведется в ε-стратегиях или в вольтерровских отображениях [1]. При ε-стратегиях игрок E выбирает в начальный момент t_0 разбиение

$$\omega = \{t_0 = 0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_k = \theta\}$$

отрезка $[0,\theta]$. В каждый момент t_i игрок E, зная $z(t_i)$, выбирает допустимое управление $v_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$. Игрок P в каждый момент времени t_i, зная $z(t_i)$ и управление $v_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, выбирает свое управление $u_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Когда игрок P строит свое управление с помощью вольтерровских отображений, то он для выбора $u(t)$ использует информацию о $z_0 = z(0)$ и обо всей предыстории $v(s)$, $0 \le s \le t$.

Пусть $M \subset E^n$ — замкнутое множество, которое будем называть терминальным. Цель игрока P добиться включения $z(t) \in M$, $t \in [0,+\infty)$, используя те или иные стратегии. Цель игрока E — противоположная.

2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Задача сближения-уклонения с фиксированным временем окончания описывается следующими операторами: $P_{N,\varepsilon}M$, $P_N{}^{\omega}M$, $\widetilde{P}_{N,\theta}M$, которые ставят в соответствие множеству M некоторое множество начальных позиций.

Множество $P_{N,\varepsilon}M$ является множеством начальных позиций $z_0 \in N$ таких, что для любого допустимого $v(t)$, $t \in [0,\varepsilon]$ существует допустимое $u(t)$, $t \in [0,\varepsilon]$ такое, что для соответствующей траектории $z(t)$ с началом в z_0 выполняется включение $z(\varepsilon) \in M$. Пусть ω — некоторое разбиение интервала $[0,\theta]$. Обозначим $\varepsilon_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1 \ldots k$. Положим

$$P_N{}^{\omega}M = P_{\varepsilon_1} P_{\varepsilon_2} \ldots P_{\varepsilon_k} M,$$

$$\widetilde{P}_{N,\theta}M = \bigcap_{\omega} P_N{}^{\omega}M,$$

где пересечение берется по всем разбиениям ω.

В работе [1] показано, что если $z_0 \in \widetilde{P}_{N,\theta}M$, то игрок P, пользуясь ε-стратегиями (или вольтерровскими отображениями), может добиться того, что для соответствующей траектории $z(t)$ выполняются включения

$z(\theta) \in M$, $z(t) \in N$ для всех $t \in [0,\theta]$. Если $z_0 \notin \widetilde{P}_{N,\theta}M$, то либо $z(\theta) \notin M$, либо $z(t) \notin N$ для некоторого $t \in [0,\theta]$.

Положим $N = M$. Множество $\widetilde{P}_{M,\theta}M$ описывает множество всех начальных позиций, из которых игрок P может удержать траекторию $z(t)$ во множестве M на всем интервале $[0,\theta]$.

Выше определялись ε-стратегии на конечном отрезке $[0,\theta]$. Их нетрудно обобщить на полуось $[0,+\infty)$, считая, что $\omega = \{t_0 = 0 \le t_1 \le t_2 \le \le \ldots \le t_k \le t_{k+1} \ldots\}$ является разбиением полуоси $[0,+\infty)$, которое не имеет точек сгущения.

Положим $\widetilde{P}M = \bigcap\limits_{t \ge 0} \widetilde{P}_{M,t}M$. Множество $\widetilde{P}M$ — множество всех начальных позиций, из которых игрок P может удержать траекторию $z(t)$ во множестве M на всей полуоси $[0,+\infty)$.

Если $\widetilde{P}M = \varnothing$, то представляет интерес задача нахождения максимального $t_* \in [0,\infty)$ такого, что $\widetilde{P}_{M,t}M \ne 0$ для всех $t \in [0,t_*]$.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ИГРЫ С ПРОСТОЙ МАТРИЦЕЙ

В данном случае динамика игры описывается уравнением

$$\dot{z} = az - u + v,$$

где a — число.

Рассмотрим случай, когда M — выпуклое компактное множество, $0 \in M$, $U = \alpha M$, $V = \beta M$, $\beta \ge \alpha$, $\beta - \alpha = r$, $a < 0$.

В этом случае получаем [1]

$$\widetilde{P}_{M,t}M = \bigcap_{v \in \beta M} \bigcup_{u \in \alpha M} \left\{ z_0 \in M : e^{at} z_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} d\tau(-u+v) \in M \right\}.$$

Отсюда

$$\widetilde{P}_{M,t}M = \left\{ \left[e^{-at}M + \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \alpha M \right] \overset{*}{-} \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \beta M \right\} \bigcap M .$$

Для t, для которых функция $f(t) = e^{-at} - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})r \ge 0$, множество $\widetilde{P}_{M,t}M$ имеет вид

$$\widetilde{P}_{M,t}M = \left\{ \left[e^{-at} - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})r \right] M \right\} \bigcap M .$$

Напомним, что $\widetilde{P}M = \bigcap\limits_{t \ge 0} \widetilde{P}_{M,t}M$. Так как $0 \in M$, то множества $\widetilde{P}_{M,t}M$, $t \ge 0$ вложены друг в друга. Поэтому для получения $\widetilde{P}M$ надо найти минимум функции $f(t)$. Возьмем производную $f'(t) = (-a - r)e^{-at}$.

Если $-a \geq r$, то функция $f(t)$ не убывает. Поэтому ее минимум находится в точке $t = 0$. Поскольку $f(0) = 1$, то получаем $\widetilde{P}M = M$.

Если $-a < r$, то функция $f(t)$ убывает. Поскольку $-a > 0$, а функцию $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = -\frac{1}{a}r + e^{-at}\left[1 - \frac{r}{-a}\right],$$

то, учитывая, что $-a < r$, получаем $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = -\infty$.

Поэтому в таком случае можно рассмотреть задачу нахождения максимального t, при котором $\widetilde{P}_{M,t}M \neq 0$, для чего достаточно найти корень уравнения $f(t) = 0$. Очевидно, он равен

$$t_* = \frac{1}{-a}\ln\left[\frac{a}{2} + 1\right]^{-1}.$$

Теперь остановимся на случае $\alpha \geq \beta$, $r = \alpha - \beta$, $a > 0$. Здесь

$$\widetilde{P}_{M,t}M = \left\{\left[e^{-at} + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})r\right]M\right\}\bigcap M.$$

Для решения поставленных задач нужно найти минимум функции

$$g(t) = e^{-at} + \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).$$

Возьмем производную

$$g'(t) = (-a + r)e^{-at}.$$

Если $a > r$, то функция $g(t)$ убывает. При этом

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 1 + \frac{r}{a}.$$

Но поскольку $\widetilde{P}M \subset M$, то получаем $\widetilde{P}M = M$.

Если $a \leq r$, то функция не убывает. Поэтому минимум достигается при $t = 0$. При этом $g(0) = 1$ и, следовательно, $\widetilde{P}M = M$.

4. МЕТОД H - ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИГР

Напомним определение понятия H-выпуклых множеств [1].

Определение 1. Пусть $H \subset \left\{x \in E^n : \|x\| = 1\right\}$. Множество M называется H-выпуклым, если оно представимо в виде

$$M = \bigcap_{x^* \in H} \left\{x \in E^n : \left\langle x, x^*\right\rangle \leq c\left(x^*\right)\right\},$$

где $c(x^*)$ может принимать значение $+\infty$. В качестве числа $c(x^*)$ можно взять значение опорной функции множества M , т. е.

$$c(x^*) = W_M(x^*) = \sup_{x \in M} \left\langle x, x^* \right\rangle .$$

Рассмотрим игру с динамикой

$$\dot{z} = Az - u + v ,$$

где $A : E^n \to E^n$ — линейный оператор; $u \in U$; $v \in V$, где U и V — компакты.

В качестве H выберем множество собственных вещественных векторов оператора A^*. Считаем, что множества M , U и V — H -выпуклы.

Тогда

$$M = \bigcap_{x^* \in H} \left\{ x \in E^n : \left\langle x, x^* \right\rangle \le W_M\left(x^*\right) \right\},$$

$$U = \bigcap_{x^* \in H} \left\{ x \in E^n : \left\langle x, x^* \right\rangle \le W_U\left(x^*\right) \right\},$$

$$V = \bigcap_{x^* \in H} \left\{ x \in E^n : \left\langle x, x^* \right\rangle \le W_V\left(x^*\right) \right\},$$

из [1]

$$\widetilde{P}_{M,t} M = \bigcap_{v \in V} \bigcup_{u \in U} \left\{ z_0 \in M : e^{At} z_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau (-u + v) \in M \right\} =$$

$$= \left\{ \left[e^{-At} M + \int_0^t e^{-A\tau} d\tau U \right] \overset{*}{-} \int_0^t e^{-A\tau} d\tau V \right\} \bigcap M .$$

Предположим, что имеет место полное выметание множества $\int_0^t e^{-A\tau} d\tau V$ из множества $\left[e^{-At} M + \int_0^t e^{-A\tau} d\tau U \right]$, т. е., если обозначить через D множество

$$D = \left[e^{-At} M + \int_0^t e^{-A\tau} d\tau U \right] \overset{*}{-} \int_0^t e^{-A\tau} d\tau V \text{ , то}$$

$$\left[e^{-At} M + \int_0^t e^{-A\tau} d\tau U \right] = \int_0^t e^{-A\tau} d\tau V + D .$$

В этом случае $x \in \widetilde{P}_{M,t} M$ тогда и только тогда, когда для любого $x^* \in H$

$$\left\langle x, x^* \right\rangle \le W_M\left(e^{-A^* t} x^* \right) + W_U\left(\int_0^t e^{-A^* \tau} d\tau x^* \right) - W_V\left(\int_0^t e^{-A^* \tau} d\tau x^* \right) =$$

$$= e^{-\lambda(x^*)t} W_M(x^*) + \int_0^t e^{-\lambda(x^*)\tau} d\tau W_U(x^*) - \int_0^t e^{-\lambda(x^*)\tau} d\tau W_V(x^*),$$

где $\lambda(x^*)$ — собственное число оператора A^*, соответствующее собственному вектору x^*, и правая часть в данной формуле неотрицательна для всех $x^* \in H$.

Так же, как и в п. 3, рассмотрим различные случаи. Обозначим через H_- множество всех собственных единичных векторов A^*, для которых соответствующие собственные числа меньше нуля; H_+ — множество всех собственных векторов A^*, для которых соответствующие собственные числа не меньше нуля.

Если для всех $x^* \in H_-$ выполняется $W_V(x^*) \geq W_U(x^*)$ и $-\lambda(x^*) W_M(x^*) \geq \geq W_V(x^*) - W_U(x^*)$, то $\widetilde{P}M = M$.

Если $-\lambda(x^*) W_M(x^*) < W_V(x^*) - W_U(x^*)$ для некоторых x^*, то $\widetilde{P}M = 0$, и максимальное t_*, при котором $\widetilde{P}_{M,t} \neq 0$, ищется как минимальное решение уравнения

$$e^{-\lambda(x^*)t} W_M + \int_0^t e^{-\lambda(x^*)\tau} d\tau \left[W_U(x^*) - W_V(x^*)\right] = 0,$$

где минимум берется по указанным x^*.

ВЫВОДЫ

Поставлена новая задача удержания в дифференциальных играх.

Рассмотрен общий случай, когда игроки играют в ε-стратегиях, и структура игры описывается операторными конструкциями Б. Н. Пшеничного.

Изучен линейный случай с простой и произвольной матрицами. В последнем случае используется метод H-выпуклых множеств.

В перспективе разработка достаточно конструктивных приближенных методов решения задач удержания в нелинейных дифференциальных играх.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
2. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. — 1980. — **112**, № 3. — С. 307–330.
3. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры убегания // Тр. МИ АН СССР. — 1971. — **112**. — С. 30–63.
4. *Красовский Н.Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
5. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 382 с.

Поступила 02.06.2003