

УДК 533.6.013.2:533.693+532.58.001.24:518.12

МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В СМЕШАННОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНО–ВИХРЕВОЙ ОБЛАСТИ, ПРИЛЕГАЮЩЕЙ К ВРАЩАЮЩЕМУСЯ КРЫЛУ

А. В. ШЕХОВЦОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 24.11.99

Показано, что используя усовершенствованный метод дискретных вихрей и интеграл Коши–Лагранжа, можно рассчитывать поле давления в области завихренности при наличии в ней вращающегося крыла. Получены расчетные формулы для случаев движения крыла в безграничной и ограниченной средах, а также при наличии и отсутствии внешнего потока. Апробация метода для случаев вращательного движения тонкого крыла (генератора завихренности) в безграничной среде и вблизи экрана показала, что он весьма экономичен и позволяет с высокой степенью точности рассчитывать поля с большими градиентами коэффициента давления.

Показано, що використовуючи удосконалений метод дискретних вихорів та інтеграл Коші–Лагранжа, можна обчислювати поле тиску в області завихреності при наявності у ній крила, що обертається. Отримано розрахункові формули для випадків руху крила у безмежному та обмеженому середовищах, а також при наявності та відсутності зовнішнього потоку. Апробація методу для випадків обертового руху тонкого крила (генератора завихреності) у безмежному середовищі та поблизу екрану показала, що він досить економічний та дозволяє з високим ступенем точності обчислювати поля з великими градієнтами коефіцієнту тиску.

It is shown, that using the improved method of discrete vortices and Cauchy–Lagrange integral, it is possible to compute a field of pressure in area of a vorticity at presence rotating wing in it. The calculation formulas for cases of wing movement in unlimited and limited medium, and also at presence and absence of an external flow are obtained. Approbation of a method for cases of thin wing rotation (vorticity generator) in unlimited medium and close to the screen has shown, that it is very economic and allows with high degree of accuracy to compute fields with the large gradients of pressure coefficient.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет нестационарного поля давления для потенциальной идеальной среды не представляет трудности и основывается на использовании интеграла Коши–Лагранжа.

Если же в некоторой области Ψ идеальной среды Ω ($\Psi \in \Omega$) присутствует завихренность, то в точках, принадлежащих Ψ , скорость не имеет потенциала, и непосредственное использование указанного интеграла становится невозможным.

Для расчета нестационарного поля давления в точках, принадлежащих Ψ , Дворак и Хлапов [1] предложили численно интегрировать уравнения Эйлера, моделируя поле завихренности методом дискретных вихрей [2].

Программная реализация алгоритма, построенного в [1], показала, что он требует много времени для вычислений и, кроме того, не способен удовлетворительно описывать области с большими градиентами давления.

Наличие в области Ψ или вблизи нее подвижных твердых границ приводит к необходимости менять пути интегрирования на каждом расчетном промежутке времени, что также существенно снижает практическую ценность этого метода.

Покажем, что совместное использование усовершенствованного метода дискретных вихрей (УМДВ) [3] и интеграла Коши–Лагранжа для решения задач указанного типа дает возможность успешно преодолевать имеющиеся трудности.

Интересно отметить, что Сарпкаяй [4] в своей обзорной Фримановской лекции 1988 года весьма сомнительно отзывался о способностях вычислительных методов вихрей удовлетворительно решать задачи такого уровня сложности.

1. СЛУЧАЙ ВРАЩЕНИЯ КРЫЛА В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Пусть в некоторой области Ψ идеальной несжимаемой невесомой среды Ω , покоящейся в бесконечно удаленной точке, находится завихренность, которая приближенно представлена конечной совокупностью M двумерных дискретных вихревых шнуров (рассматривается плоский случай). Кроме этого, пусть в области Ψ находится тело S – генератор завихренности. Для простоты предположим, что тело S является абсолютно жестким, непроницаемым и прямолинейным.

В соответствии с гипотезой Жуковского о жидком крыле, которая используется в УМДВ, тело

S также представим конечной совокупностью N присоединенных дискретных вихрей.

В силу оговоренных свойств среды Ω , для ее потенциальных областей $\Omega \setminus \Psi$ будет справедливо уравнение Лапласа и имеет место интеграл Коши–Лагранжа.

Вследствие линейности уравнения Лапласа, потенциал возмущенного движения в произвольной точке $(x, y) \in \Omega \setminus \Psi$ можно представить в виде суммы потенциалов скоростей, индуцированных N присоединенными и M свободными дискретными вихрями:

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i^*(x, y, t) + \sum_{i=1}^M \Phi_i(x, y, t), \quad (1)$$

где Φ_i^* – потенциал присоединенного дискретного вихря; Φ_i – потенциал свободного дискретного вихря.

Согласно “О–принципу” УМДВ (принципу минимального искажения траекторий движения свободных вихрей), закон Био–Савара нужно выполнять всюду, за исключением кругов вокруг дискретных вихрей с радиусами, равными половине меры дискретности:

$$R_s = \Delta/2 = 1/(2N). \quad (2)$$

Внутри каждого из этих кругов (аналогов ядер конечномерных вихрей), во избежание эффектов сингулярности, будем задавать линейное убывание индуцированной скорости.

Таким образом, для скорости, индуцированной вихрем с циркуляцией $\vec{\Gamma}$ в точке, расположенной на расстоянии $|\vec{R}|$, имеем:

$$\vec{W}(\vec{\Gamma}, \vec{R}) = \begin{cases} \frac{\vec{\Gamma} \times \vec{R}}{2\pi|\vec{R}|^2}, & \text{при } |\vec{R}| \geq R_s, \\ \frac{\vec{\Gamma} \times \vec{R}}{2\pi R_s^2}, & \text{при } |\vec{R}| < R_s. \end{cases} \quad (3)$$

Отметим, что выбор закона сглаживания индуцированной скорости внутри вихревых ядер для большинства задач несущественно влияет на результаты расчетов, так как погрешность, вносимая при этом, не превышает величину погрешности дискретизации вихревого слоя и вихревой области. Выполнение всех остальных необходимых условий сходимости УМДВ обеспечивает, при $N \rightarrow \infty$, выполнение закона Био–Савара всюду, за исключением бесконечно малой окрестности вокруг каждого из дискретных вихрей.

Проанализируем теперь возможность и целесообразность применения интеграла Коши–Лагранжа для решения поставленной задачи.

Будем рассматривать абсолютное движение точек среды Ω . Так как тело S является подвижным, удобно все расчеты производить в некоторой системе координат, связанной с телом S . Для этого случая интеграл Коши–Лагранжа имеет следующий вид [5]:

$$\frac{\partial' \Phi(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\vec{W}_a^2(x, y, t)}{2} - \vec{W}_a(x, y, t) \cdot \vec{W}^*(x, y, t) + V(x, y, t) + \int \frac{dp(x, y, t)}{\rho(x, y, t)} = F(t), \quad (4)$$

где \vec{W}_a – абсолютная скорость; \vec{W}^* – переносная скорость; V – потенциал внешних массовых сил; p – давление; ρ – плотность. Штрих при частной производной означает, что дифференцирование совершается в подвижной системе координат.

В силу свойств среды Ω для $F(t)$ получим:

$$F(t) = p_\infty / \rho,$$

где p_∞ – давление в бесконечно удаленной точке.

Полагая, что рассматриваемые силы приложены к единице массы среды Ω , число независимых размерностей сократится до двух – длины и времени.

В качестве характерного линейного размера возьмем длину тела b , а в качестве характерной скорости – максимальную линейную переносную скорость \vec{W}_M^* тела S за расчетный промежуток времени.

Тогда в безразмерном виде можно записать: координаты $\bar{x} = x/b$, $\bar{y} = y/b$; время $\tau = t|\vec{W}_M^*|/b$; линейную скорость $\vec{w} = \vec{W}/|\vec{W}_M^*|$; угловую скорость $\vec{\omega} = \vec{\Omega}/|\vec{W}_M^*|$; потенциал $\varphi = \Phi/(|\vec{W}_M^*|b)$, циркуляцию $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}/(|\vec{W}_M^*|b)$. (Черточки в дальнейшем будем опускать).

Таким образом, вводя в рассмотрение коэффициент давления как $C_P = 2(p - p_\infty)/(\rho|\vec{W}_M^*|^2)$, в безразмерном виде имеем:

$$C_P(x, y, \tau) = 2\vec{w}_a(x, y, \tau) \cdot \vec{w}^*(x, y, \tau) - \vec{w}_a^2(x, y, \tau) - 2 \frac{\partial' \varphi(x, y, \tau)}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Пусть в начальный момент времени $\tau = 0$ система координат $O'X'Y'$, связанная с телом S , была совмещена с неподвижной системой OXY , после чего начала двигаться с переносной скоростью \vec{w}^* (см. рис. 1).

Это движение можно представить как сумму поступательного и вращательного движения:

$$\vec{w}^*(x, y, \tau) = \vec{w}_0(\tau) + \vec{\omega}(\tau) \times (\vec{r}(x, y) - \vec{r}_0(\tau)), \quad (6)$$

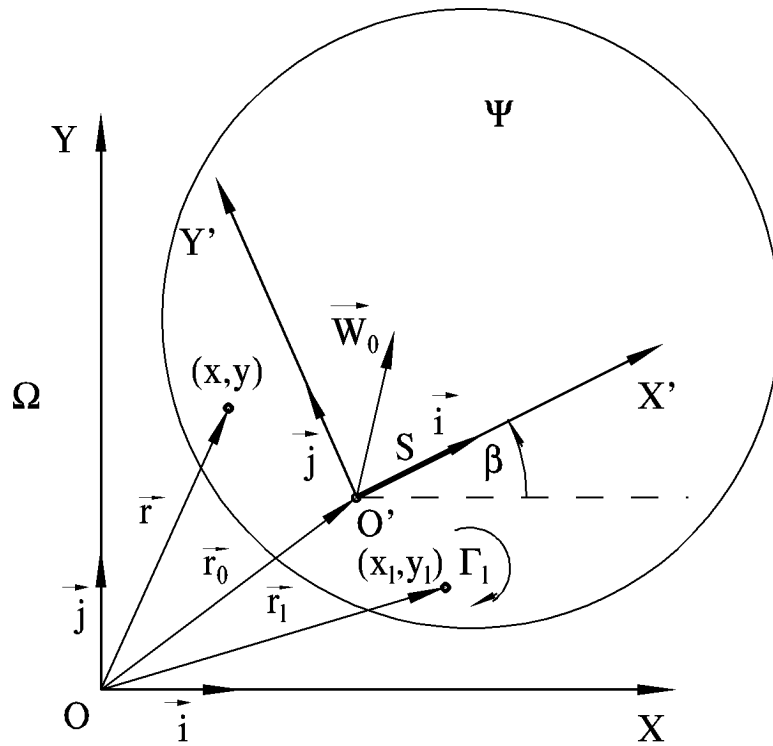


Рис. 1. Системы координат

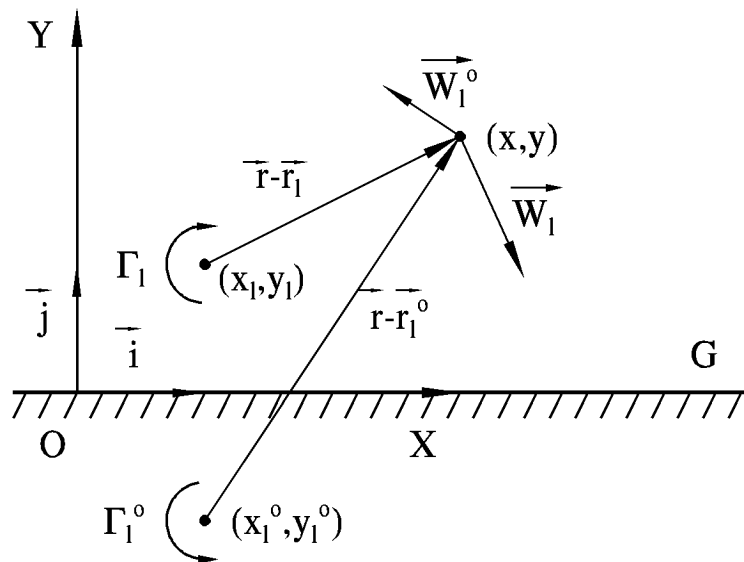


Рис. 2. Индуктивные скорости от вихря вблизи экрана

где \vec{w}_0 – поступательная скорость начала O' ; $\vec{\omega}$ – угловая скорость системы координат $O'X'Y'$; \vec{r} – радиус-вектор точки (x, y) в системе координат OXY ; \vec{r}_0 – радиус-вектор начала O' .

В случае, если точка (x, y) не принадлежит телу S , скорость \vec{w}^* нужно понимать, как скорость такой точки подвижной плоскости $O'X'Y'$, жестко связанной с телом S , которая в момент времени τ совпала с точкой (x, y) неподвижной плоскости OXY .

Тогда формула (5) для коэффициента давления примет вид:

$$C_P(x, y, \tau) = 2\vec{w}_a(x, y, \tau) \cdot \vec{w}_0(\tau) + 2\vec{\omega}(\tau) \times (\vec{r}(x, y) - \vec{r}_0(\tau)) \cdot \vec{w}_a(x, y, \tau) - 2 \frac{\partial' \varphi(x, y, \tau)}{\partial \tau}. \quad (7)$$

Так как вычисление скоростей \vec{w}_a в пределах сингулярных радиусов вихрей r_S можно производить, используя закон сглаживания (3), то для выяснения возможности применения выражения (7) в области Ψ найдем частную производную от φ в подвижной системе координат.

Пусть в точке (x_ℓ, y_ℓ) области Ψ среды Ω находится дискретный вихрь с циркуляцией $\vec{\Gamma}_\ell(\tau) = \Gamma_\ell(\tau)(-\vec{k})$ (рис. 2). Найдем потенциал φ_ℓ скорости \vec{w}_ℓ , индуцированной этим вихрем в точке (x, y) .

Построенная модель области Ψ всюду вне бесконечно малых кругов вокруг каждого из $N + M$ дискретных вихрей является потенциальной. Поэтому, учитывая что $\text{grad } \varphi_\ell$ является инвариантом, имеет место равенство

$$\vec{w}_\ell(x', y', \tau) = \text{grad } \varphi_\ell(x', y', \tau), \quad (8)$$

где (x', y') – координаты точки (x, y) в системе координат $O'X'Y'$.

Умножая обе части выражения (8) скалярно на вектор $d\vec{r}'$ и интегрируя по некоторому криволинейному контуру от произвольной фиксированной точки (\tilde{x}', \tilde{y}') до точки (x', y') , получаем:

$$\varphi_\ell(x', y', \tau) = \int_{(\tilde{x}', \tilde{y}')}^{(x', y')} \vec{w}_\ell(x', y', \tau) \cdot d\vec{r}'(x, y, \tau) + C_1, \quad (9)$$

где C_1 – произвольная константа.

Замена области завихренности Ψ на совокупность $N + M$ бесконечно малых кругов, содержащих завихренность и одну внешнюю потенциальную область, привело к тому, что двусвязная потенциальная область $\Omega \setminus \Psi$ преобразовалась в $N + M + 1$ -связную. Поэтому интеграл в выражении (9) является многозначным, то есть зависит

от выбора пути интегрирования. Однако, так как потенциал φ_ℓ определяется с точностью до константы, в качестве контура интегрирования можно взять любую.

Учитывая, что тело S и область Ψ моделируются конечным числом вихрей бесконечно малого сечения, в качестве контура интегрирования возьмем произвольный луч, например расположенный в полуплоскости $y' > 0$ и параллельный подвижной оси $O'Y'$. Тем самым, из бесконечного множества значений рассматриваемого криволинейного интеграла будут отбираться только принадлежащие одному и тому же однозначному участку. То есть все коэффициенты k_ℓ при циклических постоянных Γ_ℓ' (циркуляциях дискретных вихрей) в выражении

$$\int_{(\tilde{x}', \tilde{y}')}^{(x', y')} \vec{w}_\ell(x', y', \tau) \cdot d\vec{r}'(x', y', \tau) = \varphi_{\ell 0}(x', y', \tau) + \sum_{\ell=1}^{N+M} \Gamma_\ell'(\tau) k_\ell, \quad (10)$$

где $\varphi_{\ell 0}$ – полный однозначный участок φ_ℓ , будут равными нулю.

Таким образом, скалярно умножая обе части равенства (8) на орт $\vec{j}'(\tau)$ подвижной оси $O'Y'$, получаем:

$$w_{ly'}(x', y', \tau) = \frac{\partial' \varphi_\ell(x', y', \tau)}{\partial y'} \quad (11)$$

откуда для потенциала φ_ℓ имеем

$$\varphi_\ell(x', y', \tau) = - \int_{y'}^{\infty} w_{ly'}(x', y', \tau) dy' + C_1. \quad (12)$$

Найдем $w_{ly'}$ – компоненту скорости \vec{w}_ℓ в подвижной системе координат $O'X'Y'$. В соответствии с законом Био-Савара,

$$w_{ly'}(x', y', \tau) = \frac{(\vec{\Gamma}_\ell'(\tau) \times (\vec{r}(x', y') - \vec{r}_\ell(x_\ell'(\tau), y_\ell'(\tau)))) \cdot \vec{j}'(\tau)}{2\pi |(\vec{r}(x', y') - \vec{r}_\ell(x_\ell'(\tau), y_\ell'(\tau)))|^2}, \quad (13)$$

откуда

$$w_{ly'}(x', y', \tau) = - \frac{\Gamma_\ell'(\tau)(x' - x_\ell'(\tau))}{2\pi((x' - x_\ell'(\tau))^2 + (y' - y_\ell'(\tau))^2)}. \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в (12), после интегрирования получаем:

$$\varphi_\ell(x', y', \tau) = \frac{\Gamma_\ell'(\tau)}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{y' - y_\ell'(\tau)}{x' - x_\ell'(\tau)} \right) + C_1. \quad (15)$$

Отсюда формула для потенциала скорости, индуцированной вихрем с координатами (x_ℓ, y_ℓ) в точке (x, y) при абсолютном движении среды Ω в подвижной системе координат $O'X'Y'$, записанная через переменные неподвижной системы координат OXY , будет иметь вид

$$\varphi_\ell(x, y, \tau) = -\frac{\Gamma_\ell(\tau)}{2\pi} \arctg \frac{(y - y_\ell(\tau)) \cos \beta(\tau) - (x - x_\ell(\tau)) \sin \beta(\tau)}{(x - x_\ell(\tau)) \cos \beta(\tau) + (y - y_\ell(\tau)) \sin \beta(\tau)} + C. \quad (16)$$

(В дальнейшем будем полагать $C = 0$).

Необходимо подчеркнуть, что в уравнении (16) арктангенс необходимо вычислять как функцию двух аргументов – знаменателя \hat{x} и числителя \hat{y} , значения которых зависят от расположения точки (x, y) по отношению к ℓ -тому вихрю в системе координат $O'X'Y'$. Такая функция $Z(\hat{x}, \hat{y})$ на всем множестве своих значений представляет собой один виток спиралевидной поверхности, образованной при одновременном повороте на 360° против часовой стрелки и поступательном перемещении в направлении вектора \vec{k} луча, выходящего из вихря и параллельного плоскости $O'X'Y'$.

Теперь можно взять производную $\partial' \varphi_\ell / \partial \tau$ в подвижной системе координат $O'X'Y'$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \varphi_\ell(x, y, \tau)}{\partial \tau} = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial' \Gamma_\ell(\tau)}{\partial \tau} \times \\ & \times \arctg \frac{(y - y_\ell(\tau)) \cos \beta(\tau) - (x - x_\ell(\tau)) \sin \beta(\tau)}{(x - x_\ell(\tau)) \cos \beta(\tau) + (y - y_\ell(\tau)) \sin \beta(\tau)} + \\ & + \frac{\Gamma_\ell'(\tau)}{2\pi} \left(\frac{\partial' \beta(\tau)}{\partial \tau} - \right. \\ & \left. - \frac{(y - y_\ell(\tau)) \frac{\partial' x_\ell(\tau)}{\partial \tau} - (x - x_\ell(\tau)) \frac{\partial' y_\ell(\tau)}{\partial \tau}}{(x - x_\ell(\tau))^2 + (y - y_\ell(\tau))^2} \right). \quad (17) \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в этом выражении и анализируя физический смысл слагаемых, можно заметить, что среди них присутствует потенциал вихря φ_ℓ , частота вращения $\nu(\tau) = \omega(\tau)/(2\pi)$, компоненты скорости \vec{w}_ℓ , индуцированной ℓ -тым вихрем в точке (x, y) и компоненты относительной скорости $\vec{w}_{\ell o} = \vec{w}_{\ell a} - \vec{w}_\ell^*$ этого вихря.

Учитывая это, а также, что β и Γ_ℓ являются инвариантами, выражение (17) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \varphi_\ell(x, y, \tau)}{\partial \tau} = & \frac{\varphi_\ell(x, y, \tau)}{\Gamma_\ell(\tau)} \frac{\partial \Gamma_\ell(\tau)}{\partial \tau} - \\ & - w_{\ell x}(x, y, \tau) (w_{\ell ax}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau) - \\ & - w_{\ell x}^*(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau)) - \\ & - w_{\ell y}(x, y, \tau) (w_{\ell ay}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau) - \\ & - w_{\ell y}^*(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau)) + \Gamma_\ell(\tau) \frac{\omega(\tau)}{2\pi}. \quad (18) \end{aligned}$$

Или, в векторной форме, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_\ell'(x, y, \tau)}{\partial \tau} = & \frac{\varphi_\ell(x, y, \tau)}{\Gamma_\ell(\tau)} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}_\ell(\tau)}{\partial \tau} - \frac{\vec{\Gamma}_\ell(\tau) \cdot \vec{\omega}(\tau)}{2\pi} - \\ & - \vec{w}_\ell(x, y, \tau) \cdot \vec{w}_{\ell o}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau). \quad (19) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что те части слагаемых, которые содержат сингулярность, представляют собой скорость, индуцированную дискретным вихрем. Вычисление ее в соответствии с правилом

$$\vec{w}_\ell(x, y, \tau) = \begin{cases} \frac{\vec{\Gamma}_\ell(\tau) \times \Delta \vec{r}}{2\pi |\Delta \vec{r}|^2}, & \text{при } |\Delta \vec{r}| \geq r_s, \\ \frac{\vec{\Gamma}_\ell(\tau) \times \Delta \vec{r}}{2\pi r_s^3}, & \text{при } |\Delta \vec{r}| < r_s, \end{cases} \quad (20)$$

где $\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}(x, y) - \vec{r}_\ell(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau))$, дает гладкое поведение \vec{w}_ℓ во всех точках области Ψ .

Таким образом, используя УМДВ, интеграл Коши–Лагранжа можно применять для вычисления поля давления в вихревой области при наличии в ней движущегося тела, не внося при этом погрешности больше той, которая закладывается при дискретизации вихревого слоя S , заменяющего поверхность тела, и вихревой области Ψ .

Используя $\partial' \varphi_\ell / \partial \tau$ в виде (19) и представляя переносную скорость в соответствии с выражением (6), для коэффициента давления в произвольной точке (x, y) из области завихренности Ψ , моделируемой M дискретными вихрями, при рассмотрении абсолютного движения среды Ω в подвижной системе координат $O'X'Y'$, связанной с телом S , моделируемым N дискретными вихрями, имеем:

$$\begin{aligned} C_P(x, y, \tau) = & 2 \sum_{\ell=1}^{N+M} \left(\vec{w}_\ell(x, y, \tau) \cdot (\vec{\omega}(\tau) \times (\vec{r}(x, y) - \right. \\ & \left. - \vec{r}_\ell(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau))) + \vec{w}_{\ell a}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau)) + \frac{\vec{\omega}(\tau)}{2\pi} \cdot \vec{\Gamma}_\ell(\tau) - \right. \\ & \left. - \frac{\varphi_\ell(x, y, \tau)}{\Gamma_\ell(\tau)} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}_\ell(\tau)}{\partial \tau} \right) - \left(\sum_{\ell=1}^{N+M} \vec{w}_\ell(x, y, \tau) \right)^2, \quad (21) \end{aligned}$$

где φ_ℓ вычисляется по формуле (16), а \vec{w}_ℓ – по формуле (20).

2. СЛУЧАЙ ВРАЩЕНИЯ КРЫЛА ВБЛИЗИ ЭКРАНА

Рассмотрим важный с прикладной точки зрения случай, когда рассматриваемая область завихренности Ψ и подвижное тело S находятся вблизи твердой непроницаемой поверхности G (экрана).

В этом случае, как известно, наличие экрана моделируется введением в область течения инверсивных вихрей (см. рис. 2), для которых справедливо:

$$\begin{aligned} x_\ell^\circ(\tau) &= x_\ell(\tau); & y_\ell^\circ(\tau) &= -y_\ell(\tau); \\ \vec{\Gamma}_\ell^\circ(\tau) &= -\vec{\Gamma}_\ell(\tau). \end{aligned} \quad (22)$$

Для скорости \vec{w} , индуцированной ℓ -тым вихрем в точке (x, y) при наличии экрана, получим:

$$\begin{aligned} \vec{w}_\ell(x, y, \tau) &= \vec{w}_\ell(x, y, \tau) + \vec{w}_\ell^\circ(x, y, \tau) = \\ &= \frac{\vec{\Gamma}_\ell(\tau) \times (\vec{r}(x, y) - \vec{r}_\ell(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau)))}{2\pi |\vec{r}(x, y) - \vec{r}_\ell(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau))|^2} + \\ &+ \frac{\vec{\Gamma}_\ell^\circ(\tau) \times (\vec{r}(x, y) - \vec{r}_\ell^\circ(x_\ell^\circ(\tau), y_\ell^\circ(\tau)))}{2\pi |\vec{r}(x, y) - \vec{r}_\ell^\circ(x_\ell^\circ(\tau), y_\ell^\circ(\tau))|^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь и далее верхние индексы “о” означают атрибут инверсивного вихря.

Скорость \vec{w} в разложении по ортам неподвижной системы координат OXY будет иметь вид

$$\begin{aligned} \vec{w}_\ell(x, y, \tau) &= \frac{\Gamma_\ell(\tau)}{2\pi} \left(\frac{y - y_\ell(\tau)}{(x - x_\ell(\tau))^2 + (y - y_\ell(\tau))^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y + y_\ell(\tau)}{(x - x_\ell(\tau))^2 + (y + y_\ell(\tau))^2} \right) \vec{i} + \\ &+ \frac{\Gamma_\ell(\tau)}{2\pi} \left(\frac{x - x_\ell(\tau)}{(x - x_\ell(\tau))^2 + (y + y_\ell(\tau))^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x - x_\ell(\tau)}{(x - x_\ell(\tau))^2 + (y - y_\ell(\tau))^2} \right) \vec{j}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для потенциала φ_ℓ° от инверсивного ℓ -го вихря, в соответствии с формулой (16), учитывая (22), получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_\ell^\circ(x, y, \tau) &= \frac{\Gamma_\ell(\tau)}{2\pi} \arctg \frac{(y + y_\ell(\tau)) \cos \beta(\tau) -}{(x - x_\ell(\tau)) \cos \beta(\tau) +} \\ &\quad - \frac{(x - x_\ell(\tau)) \sin \beta(\tau)}{(y + y_\ell(\tau)) \sin \beta(\tau)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда, для потенциала $\hat{\varphi}_\ell$ скорости \vec{w}_ℓ , индуцируемой ℓ -тым вихрем вблизи экрана в точке (x, y) , при рассмотрении абсолютного движения среды Ω в подвижной системе координат, имеем

$$\hat{\varphi}_\ell(x, y, \tau) = \varphi_\ell(x, y, \tau) + \varphi_\ell^\circ(x, y, \tau), \quad (26)$$

где φ_ℓ вычисляется по формуле (16); φ_ℓ° – по формуле (25).

Учитывая выражения (23), (24) и (25), для производной от потенциала φ_ℓ° инверсивного вихря в подвижной системе координат $O'X'Y'$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \varphi_\ell^\circ(x, y, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\varphi_\ell^\circ(x, y, \tau)}{\vec{\Gamma}_\ell(\tau)} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}_\ell(\tau)}{\partial \tau} + \frac{\vec{\Gamma}_\ell(\tau) \cdot \vec{\omega}(\tau)}{2\pi} + \\ &+ w_{\ell y}^\circ(x, y, \tau) w_{\ell o y}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau)) - \\ &- w_{\ell x}^\circ(x, y, \tau) \cdot w_{\ell o x}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau)). \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда, с учетом уравнений (19) и (27), для производной от потенциала ℓ -го вихря, расположенного вблизи экрана, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \hat{\varphi}_\ell(x, y, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\varphi_\ell(x, y, \tau) + \varphi_\ell^\circ(x, y, \tau)}{\vec{\Gamma}_\ell(\tau)} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}_\ell}{\partial \tau} - \\ &- \vec{w}_\ell(x, y, \tau) \vec{w}_{\ell o}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau)) + \\ &+ w_{\ell y}^\circ(x, y, \tau) w_{\ell o y}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau)) - \\ &- w_{\ell o x}^\circ(x, y, \tau) w_{\ell o x}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau)). \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая формулы (6), (23) и (28), для коэффициента давления C_P в произвольной точке (x, y) из области завихренности Ψ , моделируемой M дискретными вихрями и расположенной вблизи экрана, при рассмотрении абсолютного движения среды Ω в подвижной системе координат $O'X'Y'$, связанной с телом S , моделируемым N дискретными вихрями, получаем:

$$\begin{aligned} C_P(x, y, \tau) &= 2 \sum_{\ell=1}^{N+M} \left(\vec{w}_\ell(x, y, \tau) \cdot (\vec{\omega}(\tau) \times (\vec{r}(x, y) - \right. \\ &\quad \left. - \vec{r}_\ell(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau))) + \vec{w}_{\ell a}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau)) + \right. \\ &+ \vec{w}_\ell^\circ(x, y, \tau) \cdot (\vec{w}_0(\tau) + \vec{\omega}(\tau) \times (\vec{r}(x, y) - \vec{r}_0(\tau))) + \\ &+ w_{\ell x}^\circ(x, y, \tau) \times (w_{\ell a x}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau) - \\ &\quad - w_{0x}(\tau) + \omega(\tau)(y_\ell(\tau) - y_0(\tau))) - \\ &- w_{\ell y}^\circ(x, y, \tau) (w_{\ell a y}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau) - \\ &\quad - w_{0y}(\tau) - \omega(\tau)(x_\ell(\tau) - x_0(\tau))) - \\ &- \frac{\varphi_\ell(x, y, \tau) + \varphi_\ell^\circ(x, y, \tau)}{\vec{\Gamma}_\ell(\tau)} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}_\ell(\tau)}{\partial \tau} \left. \right) - \\ &- \left(\sum_{\ell=1}^{N+M} (\vec{w}_\ell(x, y, \tau) + \vec{w}_\ell^\circ(x, y, \tau)) \right)^2. \end{aligned} \quad (29)$$

В случае, если $\vec{w}_\infty \neq 0$, формула (21) приобретает вид

$$C_P(x, y, \tau) = 2(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \cdot (\vec{w}_0(\tau) + \vec{\omega}(\tau) \times$$

$$\begin{aligned} & \times (\vec{r}(x, y) - \vec{r}_0(\tau)) + 2 \sum_{\ell=1}^{N+M} \left(\vec{w}_\ell(x, y, \tau) \cdot \vec{\omega}(\tau) \times \right. \\ & \times (\vec{r}(x, y) - \vec{r}_\ell(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau))) - (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) + \\ & \quad \left. + \vec{w}_{\ell a}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau) + \frac{\vec{\omega}(\tau)}{2\pi} \cdot \vec{\Gamma}_\ell(\tau) - \right. \\ & \left. - \frac{\varphi_\ell(x, y, \tau)}{\vec{\Gamma}_\ell(\tau)} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}_\ell(\tau)}{\partial \tau} \right) - \left(\sum_{\ell=1}^{N+M} \vec{w}_\ell(x, y, \tau) \right)^2, \quad (30) \end{aligned}$$

где α – угол между вектором \vec{w}_∞ и ортом \vec{i} . Формула (29) при $\alpha = 0$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} C_P(x, y, \tau) = & 2(w_{0x}(\tau) - \omega(\tau)(y - y_0(\tau))) + \\ & + 2 \sum_{\ell=1}^{N+M} \left(\vec{w}_\ell(x, y, \tau) \cdot \vec{\omega}(\tau) \times (\vec{r}(x, y) - \right. \\ & \left. - \vec{r}_\ell(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau))) + \vec{w}_\ell^\circ(x, y, \tau) \cdot (\vec{w}_0(\tau) + \vec{\omega}(\tau) \times \right. \\ & \times (\vec{r}(x, y) - \vec{r}_0(\tau))) + \vec{w}_\ell(x, y, \tau) \cdot \vec{w}_{\ell a}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau) + \\ & \quad \left. + w_{\ell x}^\circ(x, y, \tau)(w_{\ell a x}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau) - \right. \\ & \quad \left. - w_{0x}(\tau) + \omega(\tau)(y_\ell(\tau) - y_0(\tau)) - 1) - \right. \\ & \quad \left. - w_{\ell x}(x, y, \tau) - w_{\ell y}^\circ(x, y, \tau)(w_{\ell a y}(x_\ell(\tau), y_\ell(\tau), \tau) - \right. \\ & \quad \left. - w_{0y}(\tau) - \omega(\tau)(x_\ell(\tau) - x_0(\tau))) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\varphi_\ell(x, y, \tau) + \varphi_\ell^\circ(x, y, \tau)}{\vec{\Gamma}_\ell(\tau)} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}_\ell(\tau)}{\partial \tau} \right) - \\ & - \left(\sum_{\ell=1}^{N+M} (\vec{w}_\ell(x, y, \tau) + \vec{w}_\ell^\circ(x, y, \tau)) \right)^2. \quad (31) \end{aligned}$$

3. АПРОБАЦИЯ МЕТОДА

Предлагаемый метод расчета нестационарного поля давления в области завихренности апробирован для обоих случаев – движения тела в безграничной среде (применялась формула (21)); результаты представлены на рис. 3) и движения тела вблизи экрана (применялась формула (29)); результаты представлены на рис. 4). В обоих случаях в качестве тела S бралась бесконечно тонкая, абсолютно твердая, непроницаемая прямолинейная пластина.

В момент времени $\tau = 0$ предполагалось, что среда Ω покоится, вихри отсутствуют, а пластина расположена параллельно оси OY , после чего начинает мгновенный угловой старт с единичной угловой скоростью вращения $\vec{\omega}$ вокруг своей левой кромки против часовой стрелки.

При наличии экрана G , в момент $\tau = 0$ пластина располагалась от него на расстоянии 0.1 своей длины.

Условие Кутта–Жуковского–Чаплыгина выполнялось только на подвижной острой кромке.

Так как в процессе вращения пластины S образуется свободная вихревая пелена, форму которой необходимо определять в процессе решения, данные задачи являются нелинейными, а так как рассматривается мгновенный старт – и высоконестационарными.

Исследованию этих и подобных задач посвящены работы [6–22], однако поля давления в них не изучались.

На рис. 3 и 4 шаг между значениями соседних изобар равен 0.5. Сплошные линии соответствуют отрицательным значениям C_P , штриховые – положительным. В качестве дополнительной информации для анализа протекающих процессов, на представленных рисунках также показан главный вектор внешних сил, действующих на пластину. Его начало помещалось в точку центра давления на пластину, а длина для удобства представления результатов была уменьшена в десять раз.

На рис. 3,а и 4,а показаны картины изобар для первого расчетного момента времени, когда пластина совершила старт в потенциальной среде, то есть когда еще не сошел ни один дискретный вихрь; на рис. 3,б и 4,б – второй расчетный момент времени; две последующие картины были получены при значениях угла поворота 60° .

Из представленных результатов видно, что предложенный метод позволяет рассчитывать нестационарное поле давления в области завихренности при наличии подвижных границ с заданной степенью точности (мера дискретности в обоих случаях равнялась 0.0125).

Полученные результаты соответствуют всем заложенным граничным условиям: вокруг неподвижной кромки пластины, где разрешаются бесконечные разрежения, сгустились отрицательные изобары, то есть имеются большие отрицательные градиенты; хорошо виден перепад давления на пластине, обусловленный ее непроницаемостью; направление главного вектора внешних сил соответствует общей картине распределения коэффициента давления вблизи пластины, хотя он рассчитан по другой методике; к подвижной кромке, на которой выполняется условие Кутта–Жуковского–Чаплыгина, в первый момент времени близко подходит нулевая изобара, а в последующие, когда пластина уже движется с постоянной угловой скоростью, линия нулевых значений C_P начинается от подвижной кромки пластины. В обоих случаях линия $C_P = 0$ уходит в бесконечность, однако в случае вращения пластины вблизи стенки, как и ожидалось, вокруг пластины возни-

кает гораздо большее разрежение, перераспределяющее изобары. Это хорошо заметно в окрестности неподвижной кромки и в ядре сходящего вихря, причем в случае присутствия стенки вихрь более приближен к пластине, что соответствует экспериментальным результатам [9, 13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод позволяет рассчитывать нестационарное поле давления в области завихренности, прилегающей к вращающемуся крылу, как в безграничной среде, так и при наличии подвижных границ, с высокой степенью точности.

1. Дворак А. В., Хлапов Н. В. Вычисление давлений и производных компонент скорости в областях завихренности двумерных течений // Численные методы решения интегральных уравнений и их приложения. – М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1988. – С. 135–152.
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
3. Довгий С. А., Шеховцов А. В. Усовершенствованный метод дискретных вихрей для нестационарных задач // Обчислювальна та прикладна математика. – 1997. – N2(82). – С. 30–44.
4. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture // J. of Fluid Eng. – 1989. – N1. – P. 5–56.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч.1. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 584 с.
6. Lighthill M. J. On the Weis–Fogh mechanism of lift generation // J. Fluid Mech. – 1973. – 60, N1. – P. 1–17.
7. Белоцерковский С. М., Гуляев В. В., Ништ М. И. К изучению полета насекомых и птиц // ДАН СССР. – 1974. – 219, N3. – С. 567–570.
8. Weis–Fogh T. Flapping flight and power in birds and insects, conventional and novel mechanisms // Swimming and Flying in Nature. – N.Y.–L.: Plenum Press. – 1975. – 2. – P. 729–762.
9. Maxworthy T. Experiments on the Weis–Fogh mechanism of lift generation by insects in hovering flight. Part I. Dynamics of the “fling” // J. Fluid Mech. – 1979. – 93, N1. – P. 47–63.
10. Haussling H. J. Boundary-fitted coordinates for accurate numerical solution of multibody flow problems // J. Comp. Phys. – 1979. – 30. – P. 107–124.
11. Edwards R. H., Cheng H. K. The separation vortex in the Weis–Fogh circulation generation mechanism // J. Fluid Mech. – 1982. – 120. – P. 463–473.
12. Ellington C. P. The aerodynamics of flapping animal flight // Amer. Zool. – 1984. – 24, N1. – P. 95–105.
13. Spedding G. R., Maxworthy T. The generation of circulation and lift in a rigid two-dimensional fling // J. Fluid Mech. – 1986. – 165. – P. 247–272.
14. Tsutahara M., Kimura T. Aerodynamic characteristics of the Weis–Fogh mechanism (II) Numerical Computations by the Discrete Vortex Method // Нихон коку утю гайккайси. J. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci. – 1987. – 35, N407. – P. 596–604.
15. Sohn M. H., Wu J. C. A numerical study of the Weis–Fogh mechanism // AIAA Pap. – 1987. – N238. – P. 1–11.
16. Довгий С. А., Шеховцов А. В. Моделирование этапов взлета и посадки насекомого при машущем полете // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики, ч.1. – Харьков. – 1989. – С. 98.
17. Довгий С. А., Шеховцов А. В. К вопросу о численном моделировании машущего полета в трехмерной постановке // Численные методы механики сплошной среды, ч.1. – Красноярск. – 1989. – С. 44–45.
18. Довгий С. А., Шеховцов А. В. Численное моделирование начального этапа раскрытия крыльев осы “Encarsia formosa” // Бионика. – Киев: Наук. думка. – 1992. – Вып. 25. – С. 17–24.
19. Довгий С. А., Шеховцов А. В. Об одном механизме образования высокой подъемной силы при трепещущем полете насекомых // Бионика. – Киев: Наук. думка. – 1993. – Вып. 26. – С. 74–83.
20. Шеховцов А. В. Модифицированный механизм “броска” для случая гибких крыльев // Бионика. – Киев: Наук. думка. – 1997. – Вып. 27. – С. 33–40.
21. Shekhovtsov A. V. Investigation of an initial stage of vortex formation near a surface // Effects of organized vortex motion on heat and mass transfer. – Kiev. – 1994. – P. 62.
22. Shekhovtsov A. V. Inertial-vortical principle of animal flight // BIONA-report 12. – Stuttgart, Jena, Lubeck: G. Fischer, Akad. Wiss. u. Lit., Mainz. – 1998. – P. 307–316.