

УДК 539.3

## ОСОБЕННОСТИ ТРАНСФОРМАЦИИ ЭНЕРГИИ В УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ СО ВСТАВКОЙ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

В. Т. ГРИНЧЕНКО, Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 01.07.2005 ◊ Пересмотрено 17.11.2005*

На основе метода суперпозиции проводится расчет передачи энергии в упругом волноводе из области вставки в полуслой. Волновод образован двумя полуслоями с одинаковой высотой и упругими свойствами, разделенными вставкой с другими физическими свойствами. Поле в волноводе создается силовой нагрузкой, приложенной ко вставке. Эффективность метода обеспечивается учетом локальной особенности по напряжениям, возникающей в угловой точке на линии контакта при определенном соотношении упругих характеристик сред. Проводится анализ зависимости энергии в дальнем поле от частоты и отношения длины вставки к высоте волновода.

На базі методу суперпозиції проведено розрахунок передачі енергії у пружному хвилеводі з області вставки у напівшар. Хвилевід утворено двома напівшарами з однаковою висотою і пружними властивостями, які розділені вставкою з іншими фізичними властивостями. Поле у хвилеводі створюється силовим навантаженням, яке діє на вставку. Ефективність методу забезпечується урахуванням локальної особливості по напруженнях, яка виникає у кутовій точці на лінії контакту при певному співвідношенні пружних характеристик середовищ. Проведено аналіз залежності енергії у дальньому полі від частоти та відношення довжини вставки до висоти хвилеводу.

Energy transfer in the elastic waveguide from the insert area to the halflayer is computed as based on superposition method. The waveguide is formed of two halflayers with identical elastic properties and insert with other physical properties. The field in the waveguide is induced by force loading acting on the insert. The method efficiency is provided by the allowance for stress singularity occurring in the angular point on the contact line at certain ratios of media's elastic properties. Far field energy dependence on frequency and the insertion length/waveguide height ratio is analyzed.

### ВВЕДЕНИЕ

Явление концентрации электромагнитной и механической энергии в ограниченных объемах неоднородных сред довольно широко распространено в физике. Его примером может служить структура электрического поля в плоском (осесимметричном) конденсаторе: оно фактически полностью сосредоточено в объеме, который заполнен диэлектрической средой с проницаемостью, существенно (на несколько порядков) превышающей проницаемость окружающей среды. Подобные же эффекты характерны как для статических, так и для динамических систем. Интересное волновое явление, связанное с высокой концентрацией энергии вблизи поверхности раздела областей с разными скоростями света, отмечено в неоднородном электромагнитном волноводе [1].

Когда речь идет о волновых полях, феномен концентрации энергии в ограниченном объеме имеет ряд специфических свойств. В частности, для возникновения локальных эффектов не обязательно наличие существенного различия в механических и электрических свойствах неоднородных структур. Моделью для рассмотрения такой “незначительной” неоднородности могут служить пьезоактивные материалы (пьезокерамики)

при различных условиях электрического нагружения.

Важным свойством пьезоактивных материалов является зависимость их механических свойств от характера электрического нагружения. Это дает возможность легко создать неоднородность в волноводной структуре. Покрытие части волновода электродами фактически формирует в ней материал с модулями упругости, определяемыми при постоянном значении напряженности электрического поля. В то же время, материал вне электродов имеет модули, определяемые при постоянном значении электрической индукции. Именно это обусловило относительную простоту эксперимента по регистрации явления захвата энергии в волноводе.

Концентрация энергии в области под электродами в частично электродированной пьезоэлектрической кристаллической пластине, получившая название захвата энергии, известна достаточно давно и обнаружена экспериментально [2,3]. Это явление наблюдается в достаточно узком частотном диапазоне и служит основой для создания пьезоактивных линий задержек и резонаторов, применяемых в современных акустоэлектронных и ультразвуковых устройствах.

Связанность механических и электрических по-

лей в процессе распространения волн в пьезоактивных волноводах, а также существенная анизотропия физических свойств этих материалов приводят к тому, что задачи электроупругости математически значительно сложнее аналогичных задач теории упругости. Указанные обстоятельства приводят к необходимости вводить ряд упрощающих гипотез геометрического и физического характера. К настоящему времени строгое решение связанных граничных задач для пьезоактивных волноводов получено только для их простейших конфигураций типа цилиндра и слоя. Одними из первых таких работ являются [4, 5].

Ряд важных свойств волноводов из пьезоактивных материалов может быть изучен в рамках модели, не учитывающей наличия электромеханической связи. Решение чисто упругой задачи позволяет затем вычислить характеристики электрического поля с использованием полных уравнений состояния. Таким образом, для анализа особенностей захвата энергии нет необходимости решать сложную задачу определения характеристик нормальных волн и процесса отражения в пьезокерамическом волноводе. Основные черты этого явления должны проявляться и в чисто упругих геометрически или физически неоднородных волноводах. Основой для такого предположения может служить большой объем информации о передаче энергии через поверхность контакта в волноводе участков с различными свойствами [6, 8–10].

В данной работе рассматриваются идеально упругие неоднородные волноводы без учета электромеханической связи. Бесконечный волновод содержит конечную вставку из упругого материала с отличными от остальной его части механическими свойствами. На поверхности вставки заданы периодические нормальные нагрузки, симметричные относительно срединной плоскости волновода. Однако даже в этом случае граничная задача остается довольно сложной из-за наличия конечного участка контакта различных сред. Кроме конечности размеров границы, важным фактором, оказывающим значительное влияние на структуру волнового поля и построение решения, является наличие угловых точек в пересечении гладких частей границы. Известно, что в случае жесткого контакта двух упругих сред в угловой точке на линии контакта могут возникать локальные особенности в поле напряжений. Наличие таких особенностей и их характер (логарифмический или степенной) определяются механическими характеристиками контактирующих сред и не зависят от частоты [11].

Во многих исследованиях отмечалось, что игно-

рирование локальных особенностей по напряжениям в волновых полях приводит к невозможности адекватного описания волнового поля вблизи границы раздела сред [6–9, 12, 13]. Используемый в данной работе метод решения граничной задачи позволяет адекватно описать волновое поле с учетом сингулярностей. Попытка использовать упрощенную процедуру расчета, основанную на использовании аппроксимирующих выражений с конечным числом параметров (такие представления не позволяют учесть сингулярность) привела к возникновению погрешностей, качественно искажающих структуру волнового поля.

На основе алгоритма, адекватно описывающего особенности волнового поля, особое внимание уделено анализу его интегральных энергетических характеристик. Выделены области частот, в которых энергия колебаний концентрируется в неоднородной вставке. Вне таких областей наблюдается слабое влияние неоднородности на энергетические характеристики волнового поля.

Полученные результаты количественно удовлетворительно согласовываются с некоторыми известными данными других авторов [14, 15]. Однако предложенная этими исследователями трактовка физических причин возникновения явления захвата энергии представляется неполной. Нами установлено, что основную роль в формировании этого явления играют неоднородные нормальные волны, возбуждаемые в окрестности контактных площадок.

В данной работе показано, что запираание волновода обусловлено резонансом на неоднородных волнах. При этом частота резонанса изменяется в зависимости от отношения длины вставки к высоте волновода  $L$ . Появление бегущих волн высших порядков не может полностью объяснить это явление, поскольку нами указаны случаи, когда захват энергии реализуется в области частот, для которых распространяющимися будут лишь низшие нормальные волны.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается стационарное волновое поле в упругом волноводе постоянной высоты  $2h$ , образованном двумя полуслоями с одинаковыми физическими характеристиками и вставкой, имеющей другие физические свойства. Геометрия задачи показана на рис. 1:  $|Y| \leq H$ ,  $-\infty < Z < \infty$ . Ширина вставки составляет  $2a$ . Свойства изотропных сред характеризуются модулями сдвига  $\mu_v$ ,  $\mu_s$ , коэффициентами Пуассона  $\nu_v$ ,  $\nu_s$  и плотностями  $\rho_v$ ,  $\rho_s$ . При этом индекс “ $v$ ” присвоен вставке, а индекс

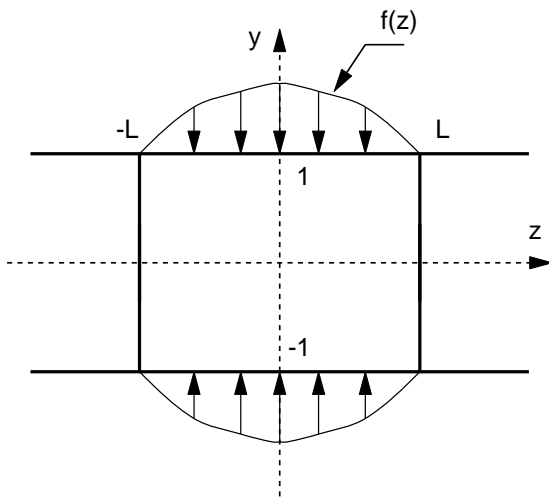


Рис. 1. Геометрия задачи

“s” – правому и левому полуслоям. Математическая постановка задачи и решение осуществляются в безразмерных координатах  $y = Y/h$ ,  $z = Z/h$ ,  $L = a/h$ . Зависимость кинематических и силовых характеристик поля от времени задается множителем  $e^{-i\omega t}$ , который в последующих выкладках опускается. Частота  $\omega$  считается положительной вещественной величиной. Рассматривается симметричное относительно плоскости  $Y = 0$  волновое поле.

Волновое поле возбуждается нагрузкой, приложенной ко вставке ( $\sigma_y^{(v)} = 2\mu_v f(z)$ ,  $\tau_{yz}^{(v)} = 0$ ). Граничные условия для рассматриваемого волновода имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(s)}(z \geq L, y = \pm 1) &= 0, \\ \sigma_y^{(s)}(z \leq -L, y = \pm 1) &= 0, \\ \sigma_y^{(v)}(|z| < L, y = \pm 1) &= f(z). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $f(z)$  задает нагрузку, приложенную ко вставке.

В зоне контакта условия сопряжения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(v)}(y, z = \pm L) &= \sigma_z^{(s)}(y, z = \pm L), \\ \tau_{zy}^{(v)}(y, z = \pm L) &= \tau_{zy}^{(s)}(y, z = \pm L), \\ u_y^{(v)}(y, z = \pm L) &= u_y^{(s)}(y, z = \pm L), \\ u_z^{(v)}(y, z = \pm L) &= u_z^{(s)}(y, z = \pm L). \end{aligned} \quad (2)$$

Необходимо найти векторы смещений в обоих полуслоях и вставке, удовлетворяющие однородной системе уравнений Ламе:

$$\begin{aligned} \Delta u_y^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y} \right) + \\ + \Omega_2^{(i)2} u_y = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_z^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y} \right) + \\ + \Omega_2^{(i)2} u_z = 0, \end{aligned}$$

где  $\Omega_2^{(i)} = \omega h / c_2^{(i)}$  – безразмерная частота; индексы  $i = v, s$  относятся ко вставке и слою соответственно;  $c_2^{(i)}$  – скорости поперечных волн.

Дополнительно к условиям сопряжения (2) должны выполняться условия излучения на бесконечности, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна в левом и правом полуслое уносит энергию от границы раздела на бесконечность.

Рассматриваемая задача симметрична относительно оси  $z = 0$ , поэтому достаточно найти решения граничной задачи для  $z \geq 0$ .

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В данной работе для решения поставленной задачи рассматривались два подхода. В рамках первого из них поле в области полуслоя записывалось в виде бесконечной суммы нормальных волн, которые могут существовать на заданной частоте, т. е. применялся метод однородных решений. В рамках второго подхода решение для волнового поля в полуслое представлялось согласно методу суперпозиции. В обоих случаях для построения решения в области вставки использовался метод суперпозиции. При организации алгоритма вычислений при применении метода суперпозиции для представления поля как в области вставки, так и для полуслоя использовались его преимущества, основанные на знании асимптотического поведения неизвестных. Это позволило применять методы улучшенной редукции рядов.

Следуя общей схеме метода суперпозиции [16], компоненты вектора смещений во вставке ( $0 \leq z \leq$

L) представим в виде

$$u_y^{(v)} = H_0 \sin \Omega_1^{(v)} y - \sum_{k=1}^{\infty} \left( E_k \beta_k \frac{\text{ch } q_1^{(v)} z}{\text{sh } q_1^{(v)} L} + D_k q_2^{(v)} \frac{\text{ch } q_2^{(v)} z}{\text{sh } q_2^{(v)} L} \right) \times \sin \beta_k y + \sum_{m=1}^{\infty} \left( H_m \delta_1^{(v)} \frac{\text{sh } \delta_1^{(v)} y}{\text{sh } \delta_1^{(v)}} + G_m \xi_m \frac{\text{sh } \delta_2^{(v)} y}{\text{sh } \delta_2^{(v)}} \right) \times \cos \xi_m z,$$

$$u_z^{(v)} = E_0 \sin \Omega_1^{(v)} z + \sum_{k=1}^{\infty} \left( E_k q_1^{(v)} \frac{\text{sh } q_1^{(v)} z}{\text{sh } q_1^{(v)} L} + D_k \beta_k \frac{\text{sh } q_1^{(v)} z}{\text{sh } q_1^{(v)} L} \right) \times \cos \beta_k y - \sum_{k=1}^{\infty} \left( H_m \xi_m \frac{\text{ch } \delta_1^{(v)} y}{\text{sh } \delta_1^{(v)}} + G_m \delta_2^{(v)} \frac{\text{ch } \delta_2^{(v)} y}{\text{sh } \delta_2^{(v)}} \right) \times \sin \xi_m z$$

с неизвестными постоянными  $E_0, E_k, D_k, H_0, H_m, G_m$  ( $k, m = 1, 2, \dots$ ). Здесь

$$\xi_m = m\pi/L; \quad \beta_k = k\pi; \\ q_i^{(v)2} = \beta_k^2 - \Omega_i^{(v)2}; \quad \delta_i^{(v)2} = \xi_m^2 - \Omega_i^{(v)2}; \\ i = 1, 2.$$

В рамках первого подхода (метода однородных решений) компоненты вектора смещений в полуслое запишем как

$$u_y^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k U_y(\zeta, y) e^{-i\zeta_k(z-L)}, \\ u_z^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k i U_z(\zeta, y) e^{-i\zeta_k(z-L)}.$$

Здесь

$$U_y(\zeta, y) = p_1^2 \left( \zeta^2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{(\zeta^2 + p_2^2)}{2} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{sh } p_1} \right); \\ U_z(\zeta, y) = \zeta p_1 \left( p_1 p_2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{(\zeta^2 + p_2^2)}{2} \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{sh } p_1} \right);$$

$\zeta_k$  – действительные, мнимые и комплексные корни дисперсионного уравнения Рэлея–Лэмба:

$$\Delta(\zeta) = (2\zeta^2 - \Omega_2^{(s)})^2 p_1 \text{cth } p_1 - 4\zeta^2 p_1^2 p_2 \text{cth } p_2 = 0; \\ \begin{cases} \sqrt{\zeta^2 - \Omega_j^2}, & |\zeta| \geq \Omega_j; \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \zeta^2}, & |\zeta| < \Omega_j. \end{cases}$$

Дисперсионное уравнение (7) получено при выполнении граничных условий  $\sigma_{yy} = 0, \tau_{yz} = 0$  на поверхностях  $y = \pm 1, z \geq L$ .

При использовании метода суперпозиции компоненты вектора смещений в полуслое записываются несколько иначе:

$$u_y^{(s)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \beta_k e^{q_1^{(s)}(z-L)} + B_k q_2^{(s)} e^{q_2^{(s)}(z-L)} \right) \times \sin \beta_k y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y^*(\tau, y) e^{-i\tau(z-L)} d\tau,$$

$$u_z^{(s)} = i A_0 \Omega_1^{(s)} e^{i\Omega_1^{(s)}(z-L)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k q_1^{(s)} e^{q_1^{(s)}(z-L)} - B_k \beta_k e^{q_2^{(s)}(z-L)} \right) \times \cos \beta_k y - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_z^*(\tau, y) e^{-i\tau(z-L)} d\tau.$$

В соотношениях (8)  $U_y^*, U_z^*$  определяются уравнениями (6). Представление (8) выбиралось таким образом, что условие отсутствия касательных напряжений на поверхностях  $y = \pm 1, z \geq L$  выполнялось автоматически. Выполнение граничного условия по нормальным напряжениям  $\sigma_{yy}(y = \pm 1, z \geq L)$  приводит к уравнению:

$$x(\tau) \Delta(\tau) - A_0 \frac{2i\Omega_1 \Omega_0^2}{\tau^2 - \Omega_1^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \frac{2(\beta_k^2 + \Omega_0^2) q_1}{\tau^2 + q_1^2} + B_k \beta_k \frac{2q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) = 0.$$

Удовлетворение условий сопряжения при использовании метода однородных решений для

полуслоя приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений, которая решается методом простой редукции.

Удовлетворение условий (2) при использовании метода суперпозиции приводит к системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_0, A_k, B_k, H_0, H_k, G_k, E_k, D_k, (k=1, 2, \dots)$  и функции  $x(\tau)$ .

Следует отметить, что при определенных соотношениях параметров контактирующих сред [11] в угловой точке на границе раздела двух сред возможно существование локальной особенности по напряжениям. В данной работе рассматриваются среды с такими физическими характеристиками, что в угловых точках ( $y = \pm 1, z = \pm L$ ) компоненты тензора напряжений имеют показательную особенность ( $\sigma \approx A(\theta)/\rho^{1-\epsilon}$ ). Здесь  $\rho$  и  $\theta$  – полярные координаты;  $(1-\epsilon)$  – показатель особенности ( $0.5 < \epsilon < 1$ ). Существование в угловой точке особенности по напряжениям приводит к тому, что в рамках метода суперпозиции интегралы и ряды для напряжений на линии контакта сходятся медленно. В этом случае в рамках метода однородных решений ряды по напряжениям расходятся на отрезке  $|1-2\epsilon| \leq y \leq h$  при  $z=0$  [12, 13].

Для построения эффективного алгоритма решения поставленной граничной задачи необходимо учитывать существование локальных особенностей по напряжениям. В рамках первого подхода (при представлении поля в полуслое по методу однородных решений) локальная особенность по напряжениям учитывалась только через асимптотические свойства неизвестных  $D_k, E_k, H_k, G_k$  (для области вставки), а асимптотическое поведение неизвестных  $C_k$  не исследовалось.

При использовании второго подхода (решения и в области вставки, и в области полуслоя представлены в рамках метода суперпозиции) локальная особенность по напряжениям учитывалась через асимптотические свойства неизвестных как для вставки ( $D_k, E_k, G_k, K_k$ ), так и для полуслоя ( $A_k, B_k, x(\tau)$ ).

Алгоритм решения системы уравнений, полученной в рамках второго подхода, и анализ асимптотических свойств неизвестных в соответствии с характером локальной особенности по напряжениям проведен аналогично [9] и здесь на нем останавливаться не будем. Отметим только, что порядок линейной системы определялся на основе анализа точности полученного численного решения. При этом использовался ряд критериев. При решении конечной системы анализировалась устойчивость решения, проявляющаяся в том, что при увеличении членов в рядах (4) значения первых

коэффициентов практически не изменяются. При проведении вычислений установлено, что, начиная с  $K=50$  членов в рядах (4), значения неизвестных  $A_0, H_0, E_0$  изменяются незначительно (сохраняются три значащие цифры). Также незначительно изменяются неизвестные  $A_k, B_k, D_k, E_k, H_k, G_k, k=1, 4$  – сохраняются две значащие цифры. Этим обеспечивается высокая точность оценок интегральных характеристик волновых полей. Кроме того, анализировались данные о скорости приближения неизвестных к их асимптотическим значениям. Для  $K=50$  невязка составляла не более  $10^{-5}$ .

При выполнении численных расчетов количество неизвестных, удерживаемых в суммах (4), (5) и (8), составляло  $K=50$ . Для больших величин  $k$  в случае представления решения методом суперпозиции использовались асимптотические значения неизвестных. При представлении решения в полуслое методом однородных решений учитывались 50 пар комплексных корней дисперсионного уравнения (7).

Главным критерием правильности полученных результатов является контроль за точностью выполнения условий сопряжения. Ее анализ позволил установить следующие закономерности. Замена бесконечной системы конечной приводит к возникновению погрешности в выполнении условий сопряжения. При этом в случае использования метода однородных решений для представления поля в полуслое граничные условия на поверхностях ( $y = \pm 1, z \geq L$ ) удовлетворяются точно. Погрешность выполнения условий сопряжения по смещениям  $u_z, u_y$  для всех рассмотренных случаев не превышала 6 % от  $u_z^{(0)}(0, 0)$ . Погрешность по касательным напряжениям не превышала 3 % от  $\tau_{yz}(y=0, z=L)$  для всех  $|y| < 1$ , кроме малой окрестности угловой точки.

Для нормального напряжения  $\sigma_z$  ситуация оказалась иной. Точность выполнения условий сопряжения значительно падает вблизи малой окрестности угловой точки ( $y = \pm 1, z = 0$ ). Поскольку вблизи малой окрестности угловой точки главная часть нормального напряжения определяется как

$$\sigma_z(\pm 1, z) = \frac{\sigma_0}{(1-y^2)^{1-\epsilon}},$$

то даже самая малая величина разности  $\delta = \sigma_v - \sigma_s$  вблизи угла приводит к бесконечной погрешности  $\epsilon/(1-y^2)^{1-\epsilon}$ . Поэтому даже при учете асимптотических свойств неизвестных, которые отражают поведение волновых полей вблизи угловых точек, невозможно удовлетворить условия сопря-

жения по напряжениям вблизи угла с заданной точностью. В то же время, в проведенных расчетах для всех  $|y| < 0.98$  условия сопряжения по нормальным напряжениям выполнялись с погрешностью до 10 % от  $\sigma_{zz}(y=0, z=L)$  при использовании метода суперпозиции для представления решения в области полуслоя и до 25 % от  $\sigma_{zz}(y=0, z=L)$  при использовании метода однородных решений.

### 3. ЭНЕРГИЯ

Еще одним критерием достоверности решения был контроль за точностью выполнения закона сохранения энергии. Энергия, поступающая в волновод, в области вставки равна энергии, которую переносят распространяющиеся волны в области полуслоя. Эта энергия равна сумме энергий, переносимых каждой распространяющейся волной, которая может существовать на данной частоте, и определяется соотношением

$$W = \sum_{j=1}^J W_j, \quad (9)$$

$$W_j = |K_j|^2 \mu_s \omega (\xi_j^2 - \Omega_1^{(s)2}) \Omega_2^{(s)2} \Delta^{(s)'}(\xi_j).$$

Здесь  $J$  – число распространяющихся волн в полуслое;  $K_j$  – коэффициент возбуждения  $j$ -ой нормальной волны.

Коэффициенты возбуждения  $K_j$  для  $j$ -ой нормальной волны в полуслое находились из соотношения

$$K_j = \operatorname{Res}_{\tau=\xi_j} x(\tau), \quad (10)$$

где  $\operatorname{Res}$  обозначают вычеты функции  $x(\tau)$  при  $\tau = \xi_j$ . Выражения для коэффициентов возбуждения нормальных волн в полуслое через значения неизвестных, найденных в рамках метода суперпозиции с учетом особенности по напряжениям в угловой точке, приведены в [9].

Энергия, вносимая в систему, определяется соотношением

$$W_v = -\omega \mu_v \int_{-L}^L f(z) \operatorname{Im} u_y^{(v)} dz. \quad (11)$$

В работе рассматривались два вида нагрузки:  $f^{(1)}(z) = 1$  и  $f^{(2)}(z) = \cos \pi z / (2L)$ . Для  $f^{(1)}$  энергия имеет вид

$$W = -\omega \mu_v L \sin \Omega_1^{(v)} \operatorname{Im} H_0.$$

Для  $f^{(2)}$  энергия записывается как

$$W = -\omega \mu_v \frac{4L}{\pi} \left( \operatorname{Im} H_0 \sin \Omega_1^{(v)} - \frac{\Omega_2^{(v)2}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^2 - \Omega_1^{(v)2}) \operatorname{Im} G_k \frac{1}{4k^2 - 1} \right).$$

Следует подчеркнуть, что при вычислении энергии для  $f^{(2)}(z)$  для корректного усечения ряда использовались асимптотические свойства неизвестных  $G_k$ .

Для широкого диапазона изменения параметров среды при принятом количестве неизвестных в конечной системе закон сохранения энергии выполнялся с погрешностью до 1.5 % энергии, вносимой в волновод. Необходимо отметить, что учет особенности по напряжениям значительно сказывался на точности выполнения закона сохранения энергии для обоих типов нагрузки. При простой редукции системы (без учета асимптотических свойств неизвестных) погрешность выполнения закона сохранения энергии на определенных частотах возрастала до 15 %.

Следовательно, анализ не только локальных характеристик поля, но и интегральных (энергетических) особенностей процесса переноса энергии от вставки в дальнее поле не может быть проведен при использовании метода простой редукции по отношению к рядам в выражениях (4), (8) или (5).

### 4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Проанализируем особенности процесса передачи энергии, поступающей в волновод из области вставки, в дальнее поле. Рассматривается только частотный диапазон ниже первого толщинносдвигового резонанса в полуслое, т. е.  $(\Omega_2^{(s)} \leq \pi)$ .

Конкретные вычисления выполнялись для волновода со следующими характеристиками:  $\mu_s / \mu_v = 8.5$ ,  $\rho_s / \rho_v = 6.54$ ,  $\nu_s = 0.29$ ,  $\nu_v = 0.3$ . В этом случае возникает особенность по напряжениям в угловой точке, причем ее показатель равен  $\epsilon = 0.8376$ .

Остановимся на анализе энергетических характеристик волнового поля в зависимости от частоты для различных отношений высоты волновода к ширине вставки  $L$ . На рис. 2 представлена частотная зависимость поступающей в волновод энергии для различных значений  $L$  при возбуждении волнового поля нагрузкой  $f^{(1)}(z) = 1$ . Через  $\Omega^*$  обозначена частота, на которой в полуслое появляются распространяющиеся волны высших порядков.

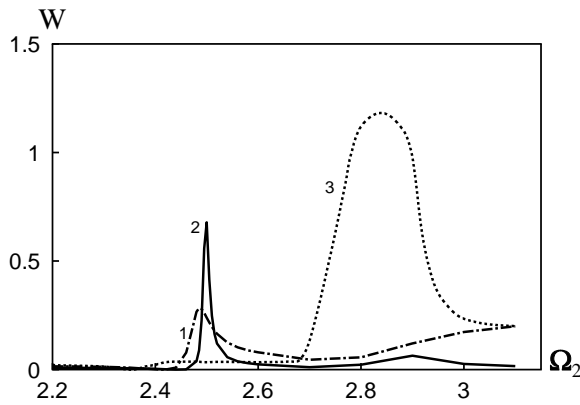


Рис. 2. Зависимость энергии от частоты:  
1 –  $L=0.5$ , 2 –  $L=1.0$ , 3 –  $L=2.0$

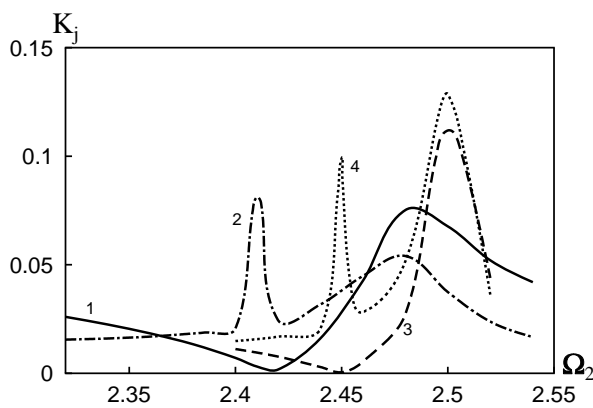


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды нормальной волны от частоты:  
сплошные – распространяющиеся волны,  
штриховые – неоднородные волны;  
1, 2 –  $L=1$ ; 3, 4 –  $L=0.5$

Прежде всего отметим, что энергия в дальнем поле существенно зависит от величины  $L$ . При этом для каждого конкретного значения  $L$  существуют как диапазоны частот, на которых волновод практически заперт, так и частоты, на которых происходит существенное увеличение энергии, проходящей в дальнее поле.

В области очень низких частот для всех рассмотренных значений  $L$  энергия, поступающая в волновод, практически постоянна и определяется шириной вставки. При этом с увеличением  $L$  поступающая в волновод энергия увеличивается. С ростом частоты ситуация меняется. Энергия постепенно уменьшается и на определенной частоте полуслоем оказывается практически запертым. Наблюдается следующая закономерность: чем больше  $L$ , тем ниже частота, на которой полуслоем заперт. Так, при  $L=0.5$  полуслоем заперт на частоте

$\Omega_2 = 2.44$ , при  $L=1$  – на частоте  $\Omega_2 = 2.41$ , а при  $L=2$  – на частоте  $\Omega_2 = 2.36$ .

Характерной особенностью волнового поля в области частот, на которых волновод практически заперт, является локальный максимум амплитуд возбуждения первой неоднородной волны в полуслоем. На рис. 3 представлена зависимость амплитуд возбуждения первой нормальной волны в слое (бегущей  $K_1$  и первой неоднородной  $K_2$ ) для  $L=1.0$  (кривые 1, 2) и  $L=0.5$  (кривые 3, 4). Как следует из анализа этих результатов, в диапазоне запирающего полуслоя наблюдается резонансное поведение первой неоднородной волны. При этом, с уменьшением  $L$  резонанс смещается в область более высоких частот. На частоте, для которой амплитуда возбуждения первой неоднородной волны достигает локального максимума, фаза коэффициента возбуждения первой бегущей волны изменяется на  $180^\circ$ . Амплитуда возбуждения первой неоднородной волны на несколько порядков превышает амплитуду возбуждения единственной бегущей волны. Амплитуда возбуждения второй неоднородной волны также имеет локальный максимум на этой частоте, однако он на два порядка меньше, чем для первой неоднородной. Указанные особенности наблюдаемого явления делают его подобным краевому резонансу [16].

Значительное уменьшение энергии, проходящей во вторую среду в составном волноводе, описанное в [9], также было объяснено значительным возбуждением неоднородных волн в прошедшем поле. Очевидно, в обеих задачах механизм резкого уменьшения энергии в дальнем поле сходен.

Второй характерной особенностью рассматриваемого волнового процесса оказывается резкое увеличение энергии дальнего поля в определенном частотном диапазоне (см. рис. 2) – резонансное поведение энергии. Однако, в отличие от явления “запирающего” волновода, изменение частоты  $\Omega_{\max}$ , на которой наблюдается максимум энергии, зависит от ширины вставки более сложным образом. Для  $L=1$  ее значение меньше, чем  $\Omega_{\max}$  для  $L=0.5$  или  $L=2$ . Более того, в зависимости от  $L$  существенным образом меняется добротность резонанса. И вновь, добротность резонанса при  $L=1$  меньше, чем при  $L=0.5$  или  $L=2$ .

Важной отличительной особенностью резонансной частоты является то, что при  $L \leq 1$  резонанс лежит в диапазоне частот, для которых в полуслоем существует только одна бегущая волна, а при  $L=2$  – в области, для которой существуют три распространяющиеся волны (одна из них – “обратная” волна). Поэтому случаи  $L \leq 1$  и  $L=2$  будем рассматривать отдельно.

Для  $L \leq 1$  информативными оказываются амплитудные характеристики, представленные на рис. 3. Как следует из графика, при дальнейшем росте частоты наблюдается возрастание амплитуд возбуждения как для бегущей, так и для первой неоднородной волн. Обе эти амплитуды достигают максимального значения на одной и той же частоте (см. рис. 3). Она увеличивается с уменьшением  $L$  и совпадает с резонансной частотой, наблюдаемой на рис. 2.

При анализе амплитуды возбуждения первой неоднородной волны для  $L = 2$  отмечался только один максимум на частоте  $\Omega_2 = 2.36$ , на которой полуслой практически заперт. При дальнейшем росте частоты выраженных максимумов не наблюдается. Увеличение энергии, проходящей в полуслой при  $L = 2$ , обусловлено появлением бегущих волн высших порядков.

На рис. 4 представлено распределение энергии, поступающей в полуслой, между различными бегущими волнами. Кривой 1 соответствует первая нормальная бегущая волна, кривой 2 – вторая, а кривой 3 – “обратная” волна. Как видно из рис. 2, начиная с частоты, на которой появляется “обратная” волна ( $\Omega_2 = 7.0$ ), энергия в полуслой начинает значительно увеличиваться. Это обусловлено значительным энергосодержанием (величиной энергии, которую переносит определенная бегущая нормальная волна) “обратной” волны и второй нормальной бегущей волны (кривые 3 и 2 соответственно, рис. 4). Энергосодержание первой бегущей волны оказывается намного меньшим, чем для высших распространяющихся волн. Примечательным в энергетическом поведении нормальных волн высших порядков является то, что “обратная” волна и вторая распространяющаяся волна практически в одном и том же частотном диапазоне резко увеличивают свою интенсивность. При этом “обратная” волна оказывается более энергетически выраженной. При дальнейшем росте частоты обе эти волны теряют свою энергию и доминирующей оказывается первая бегущая волна. Максимум энергии в полуслой связан с первой бегущей волной.

Еще раз подчеркнем, что для  $L \leq 1$  максимум энергии в полуслой лежит в том диапазоне, где распространяющейся является только одна волна. В области частот, в которой появляются бегущие волны высших порядков, распределение энергии, поступающей в полуслой, между этими волнами отличается от рассмотренного ранее случая (длина вставки  $L = 2$ ). Это отличие проявляется, прежде всего, в частотной зависимости энергии, переносимой второй бегущей волной. При  $L = 0.5$

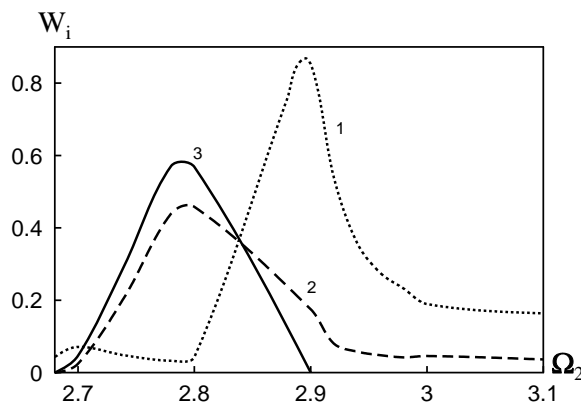


Рис. 4. Зависимость энергии бегущих нормальных волн от частоты ( $L = 2$ ):

- 1 – первая бегущая волна,
- 2 – вторая бегущая волна,
- 3 – “обратная” волна

максимум энергии, которую переносит вторая бегущая волна, наблюдается на частоте  $\Omega_2 = 2.9$ . На этой же частоте отмечен максимум для энергии первой бегущей волны. Локальный максимум энергии, проходящей в полуслой, хорошо виден на рис. 2, кривая 2. Отметим, что при  $\Omega_2 = 2.9$  энергия в полуслой в 10 раз меньше, чем при  $\Omega_2 = 2.5$ .

Для  $L = 1$  максимум энергии, которую переносит вторая волна, также наблюдался на частоте  $\Omega_2 = 2.9$ . Однако энергия, переносимая первой бегущей волной в диапазоне частот  $\Omega_2^* \leq \Omega_2 \leq \pi$ , монотонно увеличивается и этот рост обуславливает увеличение энергии в полуслой. Общим для всех рассмотренных значений  $L$  является значительное возбуждение “обратной” волны и ее доминирующий характер в определенном частотном диапазоне.

В рамках данной работы также рассмотрен случай возбуждения волнового поля силовой нагрузкой вида  $f(z) = \cos(\pi z/2L)$ . На рис. 5 представлена частотная зависимость энергии в полуслой для  $L = 1$ . Кривая 1 соответствует нагрузке  $f(z) = 1$ , а кривая 2 –  $f(z) = \cos(\pi z/2L)$ . Как и следовало ожидать, для частот, где существует только одна бегущая в полуслой волна, формы кривых подобны и отличие проявляется только в количественных показателях. Однако для частотного диапазона, в котором появляются бегущие волны высших порядков ( $\Omega_2 \leq 7.0$ ), ситуация меняется. Для обоих видов нагрузки энергия в полуслой возрастает. Однако для нагрузки вида  $f(z) = 1$  на частоте  $\Omega_2 = \pi$  энергия в полуслой меньше, чем на резонансной частоте  $\Omega_2 = 2.49$ , а для нагрузки  $f(z) = \cos(\pi z/2L)$  – больше. Такие отли-



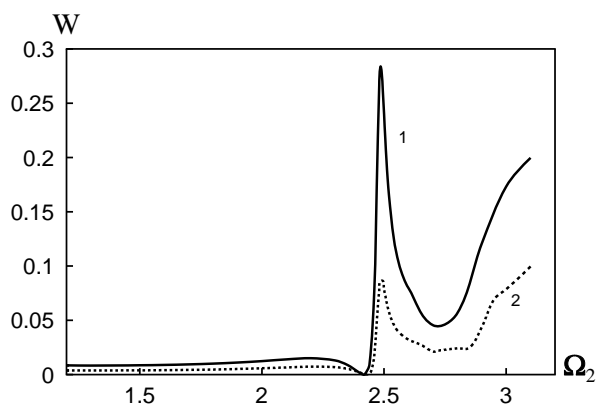


Рис. 5. Зависимость энергии от частоты для различных нагрузок:  
1 – нормальная нагрузка  $f(z)=1$ ,  
2 – самоуравновешенная нагрузка  $f(z)=\cos(\pi z/2L)$

чия обусловлены различной степенью согласованности внешней нагрузки и бегущих волн высших порядков. Для обоих видов нагрузки существует диапазон, в котором “обратная” волна доминирует. Однако максимальное превышение энергии, переносимой “обратной” волной, по сравнению с первой бегущей волной для  $f(z)=1$  составляет 9.3 % от общей энергии в полуслое, а для  $f(z)=\cos(\pi z/2L)$  – только 0.2 % (т. е. для второй нагрузки первая бегущая волна является определяющей практически во всей рассмотренной области частот).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в широком диапазоне частот изучены свойства волнового поля в упругом волноводе, образованном при жестком контакте вставки и двух полуслоев. Их механические свойства одинаковы, но отличаются от свойств вставки. Волновое поле создается нагрузкой, приложенной ко вставке.

Основой построения алгоритма вычислений являлся метод суперпозиции, примененный к решению граничных задач с конечными границами при наличии в волновом поле локальных особенностей. С использованием значений неизвестных, найденных методом суперпозиции, определены коэффициенты возбуждения нормальных волн в полуслое. Это позволило оценить эффективность возбуждения неоднородных волн в нем. Установлено, что значительное возбуждение неоднородных волн в области частот, где в полуслое существует только одна распространяющаяся волна, приводит к его запертию.

Второй характерной особенностью поля для рассматриваемого волновода является существование диапазона, в котором наблюдается резкое увеличение энергии в полуслое. Частота, на которой происходит увеличение энергии, зависит от ширины вставки. Добротность резонансных кривых также существенно зависит от величины  $L$ . Так, для  $L \leq 1$  локальный максимум энергии наблюдался на частоте, на которой распространяется только одна нормальная волна. В то же время, для  $L \geq 1$  максимум энергии обнаружен в области частот, в которой существуют распространяющиеся волны высших порядков и увеличение энергии в полуслое обусловлено их появлением.

Полученные количественные данные свидетельствуют о сложной структуре волнового поля вблизи поверхности контакта различных материалов. Необходимость такого учета сингулярности в поле напряжений указывает на важность разработки методов решения волновых задач в теории неоднородных структур. Кроме того, изученные особенности процесса передачи энергии в полуслой при возбуждении волнового поля в области вставки важны для расчета фильтров и резонаторов, применяемых в современных акустоэлектронных и ультразвуковых устройствах.

1. Blau S. K. Black-hole physics in an electromagnetic waveguide // *Physics Today*.– 2005.– Aug.– P. 19–20.
2. Shockley W., Curran D. R., Koneval D. J. Trapped-energy modes in quartz filter crystals // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1967.– 41, N 4, Pt. 2.– P. 981–239.
3. Bottom V. E. Introduction to quartz crystal unit design.– New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.
4. Mindlin R. D., Lee P. C. Thickness-shear and flexural vibration of partially plated, crystal plates // *Int. J. Solids Struct.*– 1966.– 2.– P. 125–139.
5. Tiersten H. F. Wave propagation in an infinite piezoelectric plate // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1963.– 35, N 2.– P. 234–239.
6. Гетман И. П., Лисицкий О. Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // *ПММ*.– 1988.– 52, N 6.– С. 1044–1048.
7. Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов.– Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1993.– 142 с.
8. Glushkov E. V., Glushkova N. V. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1997.– 102, N 3.– P. 1356–1360.
9. Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны на границе раздела в составном волноводе // *Акуст. вісн.*– 2001.– 4, N 1.– С. 17–25.
10. Scandrett C., Vasudevan N. The propagation of time harmonic Rayleigh-Lamb waves in a bimaterial plate // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1991.– 89, N 4, Pt. 1.– P. 1606–1614.

11. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы // Прикл. мех. Тр. Амер. общ. инж.-мех.– 1971.– **38**, N 2.– С. 87–96.
12. Пельц С. П., Шихман В. М. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР.– 1987.– **295**, N 4.– С. 821–824.
13. Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О возможности метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для полуполосы // Теор. прикл. мех.– 1987.– **18**.– С. 3–8.
14. Yang Jiashi, Kosinski J. A. Effect of piezoelectric coupling on energy trapping of thickness-shear modes // IEEE Trans. Ultrason. Ferroel. Freq. Contr.– 2004.– **51**, N 9.– P. 1047–1049.
15. Pagneux V., Maurel A. Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides // Proc. Roy. Soc. Lond.– 2002.– **A458**.– P. 1913–1930.
16. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.