

УДК 532.528

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СУПЕРКАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ

В. Н. СЕМЕНЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 14.12.99

Предлагается способ теоретического исследования устойчивости движения высокоскоростных суперкавитирующих моделей "в целом" путем его прямого компьютерного моделирования. Описана принятая математическая модель, основанная на принципе независимости расширения сечений каверны и учитывающая гидродинамическое взаимодействие модели с внутренней границей каверны. Дана краткая характеристика компьютерной программы STAB. Компьютерное моделирование подтвердило возможность самостабилизации суперкавитирующих моделей путем рикошетирования их хвостовой части от внутренних границ каверны. В экспериментах действие данного механизма самостабилизации проявляется в периодических возмущениях поверхности каверны, которые зафиксированы скоростной киносъемкой.

Пропонується спосіб теоретичного дослідження стійкості руху високошвидкісних суперкавитируючих моделей "в цілому" шляхом його прямого комп'ютерного моделювання. Описана прийнята математична модель, яка ґрунтується на принципі незалежності розширення перерізів каверни і враховує гідродинамічну взаємодію моделі з внутрішньою границею каверни. Дана стисла характеристика комп'ютерної програми STAB. Комп'ютерне моделювання підтвердило можливість самостабілізації суперкавитируючих моделей шляхом рикошетування їх хвостової частини від внутрішніх границь каверни. В експериментах дія даного механізму самостабілізації проявляється в періодичних збуреннях поверхні каверни, що зафіксовано швидкісною кінозйомкою.

A method of theoretical investigation of stability "on the whole" of the high-speed supercavitating model motion by the way of its direct computer simulation is proposed. The accepted mathematical model is based on the independence principle of cavity section expansion and takes into account hydrodynamic interaction between the model and the inner cavity wall. A brief outline of the STAB software is given. Computer simulation confirmed a possibility of self-stabilisation of supercavitating models by the way of ricocheting their tail from the inner cavity walls. In experiments, action of this self-stabilisation mechanism develops in periodic perturbations of the cavity surface. This effect was recorded by high-speed shooting.

### ВВЕДЕНИЕ

Одной из ключевых проблем организации высокоскоростного суперкавитационного движения в воде является обеспечение устойчивости движения [1, 2]. Для суперкавитирующих моделей (СКМ) не выполняется классическое условие устойчивости движения в сплошной среде – расположение точки приложения гидродинамических сил позади центра масс тела. Анализ экспериментальных данных позволил предположить, что при скоростях  $V > 300$  м/с стабилизация движения СКМ достигается за счет гидродинамического взаимодействия хвостовой части моделей с внутренней границей каверны [3–5].

Методы расчета движения суперкавитирующих тел разрабатывались рядом авторов, в том числе в ИГМ НАН Украины (см. библиографию в [2]). Задача об устойчивости движения СКМ "в целом" слишком сложна для аналитического исследования. Численный анализ задачи является весьма трудоемким из-за ее многофакторности и большого объема данных. Наиболее эффективным оказалось прямое моделирование движения СКМ на экране ПК (компьютерный эксперимент), позво-

ляющее исследовать устойчивость движения в интерактивном режиме человек–компьютер.

Результаты компьютерного моделирования нестационарных суперкавитационных течений различных типов описаны в [5–7]. В настоящей работе дана краткая характеристика программы STAB, разработанной для исследования динамики СКМ. Приведен пример исследования устойчивости свободного движения СКМ с использованием программы STAB.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Характерными особенностями рассматриваемого типа движения СКМ являются: высокоскоростной вход моделей в воду, свободное движение по инерции, режим естественной (паровой) суперкавитации, весьма большие удлинения каверн [3, 4]. В этом случае единственным параметром подобия течения является число кавитации

$$\sigma = \frac{2(p_{\infty} - p_c)}{\rho V^2} \approx Eu, \quad (1)$$

где  $p_{\infty}$  – давление в невозмущенном потоке;  $p_c \ll p_{\infty}$  – давление в каверне;  $\rho$  – плотность воды;  $V$  –

скорость СКМ;  $E_u$  – число Эйлера. Рассматриваемому диапазону скоростей соответствуют значения числа кавитации  $10^{-4} < \sigma < 10^{-3}$ .

Полная математическая модель движения СКМ включает систему уравнений динамики СКМ как твердого тела, уравнение для формы нестационарной каверны и соотношения для расчета действующих сил.

**1) Система уравнений динамики** осесимметричного тела, движущегося без закрутки в вертикальной плоскости, в связанной системе координат  $O_1 x_1 y_1$  имеет вид

$$m \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V} \right) = \Sigma \vec{F}, \quad (2)$$

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = \Sigma M_z, \quad (3)$$

где  $\vec{V} = \{V_x, V_y, 0\}$  – скорость центра масс СКМ;  $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega\}$  – угловая скорость;  $m$  – масса СКМ;  $I_c$  – момент инерции СКМ относительно центра масс.

Переходя к интегрированию по продольной абсолютной координате  $x$  и добавляя очевидные кинематические соотношения, получаем расчетную систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений

$$V \cos(\psi - \alpha) \frac{dV_x}{dx} = \omega V_y + \frac{1}{m} \Sigma F_x, \quad (4)$$

$$V \cos(\psi - \alpha) \frac{dV_y}{dx} = -\omega V_x + \frac{1}{m} \Sigma F_y, \quad (5)$$

$$V \cos(\psi - \alpha) \frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{I_c} \Sigma M_z, \quad (6)$$

$$V \cos(\psi - \alpha) \frac{d\psi}{dx} = \omega, \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\psi - \alpha), \quad (8)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad \alpha = -\operatorname{arctg} V_y / V_x.$$

Здесь  $\psi$  – угол тангажа;  $\alpha$  – угол атаки;  $y$  – ордината центра масс СКМ в абсолютной системе координат (рис. 1).

**2) Уравнение расширения сечения** тонкой осесимметричной каверны относительно траектории центра кавитатора, являющееся выражением принципа независимости расширения сечений Г.В.Логвиновича, имеет вид [8, 9]

$$\frac{\partial^2 S(\tau, t)}{\partial t^2} = -\frac{k_1 V^2(\tau) \sigma(\tau)}{2}, \quad (9)$$

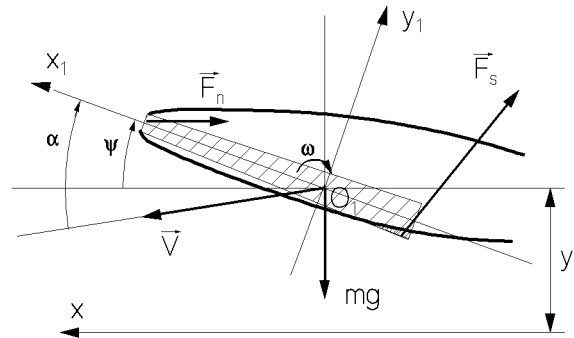


Рис. 1. Схема сил, действующих на СКМ

$$x - l(t) \leq \xi \leq x,$$

где  $S$  – площадь сечения каверны с абсциссой  $\xi(\tau)$ ;  $\tau \leq t$  – момент образования сечения  $\xi$ ;  $k_1$  – константа;  $V$  – скорость кавитатора при прохождении сечения  $\xi$ ;  $x$  – координата кавитатора в момент  $t$ ;  $l$  – длина каверны. Число кавитации  $\sigma$  будет изменяться от сечения к сечению в случае движения с переменной глубиной.

Уравнение (9) должно интегрироваться при начальных условиях

$$S(\tau, \tau) = S_n, \quad \frac{\partial S(\tau, \tau)}{\partial t} = \dot{S}_0(\tau),$$

где  $S_n = \pi D_n^2 / 4$  – площадь кавитатора;  $D_n$  – диаметр кавитатора;  $\dot{S}_0$  – начальная скорость расширения сечения каверны.

Константа  $k_1$  и функция  $\dot{S}_0(\tau)$  выбираются так, чтобы выполнялись известные полуэмпирические соотношения для габаритов каверны [8]:

$$\dot{S}_0 = \frac{k_1 A}{4} D_n V \sqrt{c_x}, \quad k_1 = \frac{4\pi}{A^2}, \quad (10)$$

где  $c_x$  – коэффициент кавитационного сопротивления;  $A \approx 2$  – эмпирическая константа.

Искривление оси каверны при наличии угла атаки кавитатора учитывается по теории возмущений [8, 10]:

$$h_f(x) = -c_y R_n (0.46 - \sigma + x), \quad (11)$$

$$c_y = \frac{2F_y}{\rho V^2 \pi R_n^2}, \quad F_y = F_{x0} \sin \alpha \cos \alpha,$$

где  $R_n$  – радиус кавитатора;  $F_{x0}$  – сопротивление кавитатора при  $\alpha = 0$ .

**3) Соотношения для сил и моментов**, входящих в правые части уравнений (4)–(6). В рассматриваемом диапазоне скоростей существенными являются два типа сил (см. рис. 1):

– гидродинамическая сила и момент на кавитаторе  $\vec{F}_n, \vec{M}_n$ ;

– гидродинамическая сила и момент, возникающие при взаимодействии хвостовой части корпуса СКМ с внутренней границей каверны  $\vec{F}_s, \vec{M}_s$ .

Компоненты силы, действующей на кавитатор-диск, наклоненный к потоку под углом  $\alpha$ , приближенно вычисляются по формулам [8]:

$$F_x = F_{x0} \cos^2 \alpha, \quad F_y = F_{x0} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (12)$$

Для дисковых кавитаторов, плоскость которых перпендикулярна оси модели, вектор  $\vec{F}_n$  всегда направлен по оси модели, поэтому сила на кавитаторе не создает момента. Формулы (11), (12) согласуются с экспериментом для диска и для затупленных кавитаторов при  $\alpha < 50^\circ$ .

Для расчета гидродинамических сил на недисковых кавитаторах, обтекаемых под углом атаки, используется разработанный нами приближенный метод, основанный на точном решении плоской задачи о струйном обтекании наклоненного полигонального контура [11].

Процесс взаимодействия кормовой части СКМ с внутренней границей каверны рассматривается как нестационарное глассирование удлиненного тела по криволинейной границе жидкости. Возникающие при этом силы рассчитываются на основе гипотезы плоских сечений [8, 12]. При этом используется решение задачи о погружении круговой дужки через криволинейную границу<sup>1</sup>.

В предположении малости среднего зазора  $\Delta = R_c - R_s$  и глубины погружения модели в поверхность каверны  $h_k$ , формула для поперечной компоненты кормовой силы в связанной системе координат получена в виде [5]

$$F_{sy} = \rho \pi R_s^2 V \left[ V_1 \frac{\bar{h}(2 + \bar{h})}{(1 + \bar{h})^2} + V_2 \frac{2\bar{h}}{1 + \bar{h}} \right], \quad (13)$$

где  $R_s$  – радиус кормового среза (транца) модели;  $V_1$  – поперечная скорость транца модели;  $V_2 = -\partial R_c / \partial t$  – скорость границы каверны;  $\bar{h} = -h_k / \Delta$ ,  $k = 1, 2$ ;  $h_1 < 0$ ,  $h_2 < 0$  – погружение транца модели соответственно в нижнюю и верхнюю границу каверны.

Продольная компонента силы  $F_{sx}$  имеет вязкостную природу и рассчитывается по формуле

$$F_{sx} = \frac{\rho V^2}{2} S_w c_f(\text{Re}), \quad (14)$$

где  $S_w$  – площадь замкнутого участка модели;  $c_f$  – коэффициент вязкостного сопротивления;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса.

<sup>1</sup>Решение задачи о погружении дужки получено Э.В.Парышевым [12] и С.И.Путилиным [5].

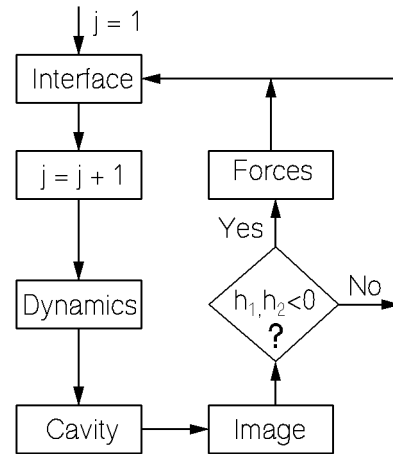


Рис. 2. Структурная схема программы STAB

При малых  $h_k$  форма замкнутого участка поверхности модели близка к треугольнику с высотой  $l_k$ ,  $k = 1, 2$  (где  $l_1, l_2$  – длины замкнутых участков при контакте соответственно с нижней и верхней границами каверны). Можно приближенно принять, что точка приложения силы  $F_{sy}$  располагается в центре тяжести площади треугольника, т.е. на расстоянии  $l_k/3$  от кормового среза модели [12]. Тогда момент силы  $F_{sy}$  относительно центра масс модели будет

$$M_s = \left( L - x_c - \frac{l_k}{3} \right) F_{sy}, \quad k = 1, 2, \quad (15)$$

где  $L$  – длина модели;  $x_c$  – отстояние центра масс от носовой точки модели.

Заметим, что при очень больших скоростях движения  $V > 1000$  м/с заметное влияние на динамику СКМ могут оказывать аэродинамические силы взаимодействия корпуса модели с парогазо-брызговой средой, заполняющей каверну [1]. Оценки показали, что это влияние носит демпфирующий характер [5].

## 2. ПРОГРАММА STAB

Нами разработана программа компьютерного моделирования динамики СКМ STAB, в которой учтены силы гидродинамического взаимодействия корпуса модели с внутренними границами каверны. Предполагается, что движение СКМ происходит в вертикальной плоскости. Рассматривается диапазон скоростей, когда сжимаемостью воды и взаимодействием СКМ с внутренней средой каверны можно пренебречь. Программа STAB позволяет в интерактивном режиме исследовать

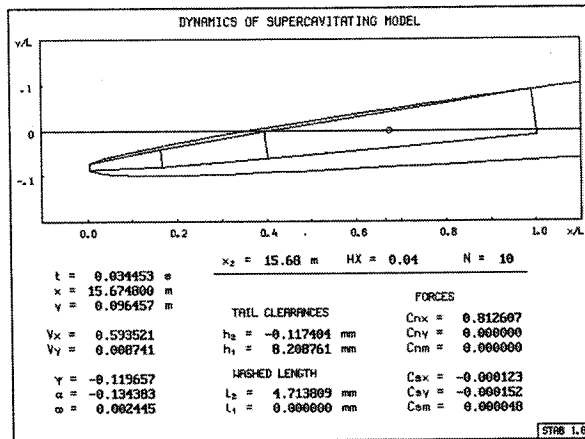


Рис. 3. Результат работы функции "Motion" программы STAB

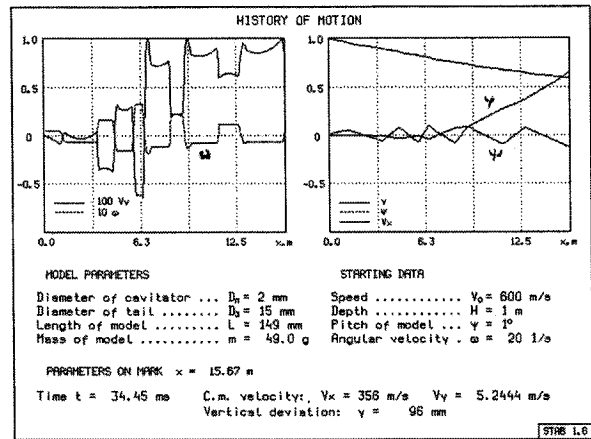


Рис. 4. Результат работы функции "History" программы STAB

устойчивость движения моделей заданной формы "в целом" при заданных начальных возмущениях, а также при воздействии внешних возмущений.

Программа STAB состоит из следующих программных модулей (рис. 2):

**1) Модуль пользовательского интерфейса (Interface)** осуществляет установку параметров модели, начальных параметров движения  $V_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\omega_0$ , длину дистанции  $x_2$ , шаг расчета  $h$  и др. и производит начальную обработку данных (функции меню "Model" и "Start"). Все параметры задачи обезразмериваются по масштабам  $L$ ,  $V_0$ . Вычисляются положение центра масс модели  $x_c$  и момент инерции  $I_c$ .

Данные могут вводиться как с клавиатуры компьютера, так и из файла. Пользовательский интерфейс включает меню, оконную систему ввода данных с клавиатуры и графический вывод результатов расчета на экран ПК.

**2) Модуль расчета динамики СКМ (Dynamics)** определяет компоненты гидродинамической силы на кавитаторе  $F_{nx}$ ,  $F_{ny}$  и численно интегрирует систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4)–(8) в последовательных точках траектории  $x^{(j)} = x^{(j-1)} + h$ ,  $j = 2, 3, \dots$  при начальных условиях  $x^{(1)} = 0$ ,  $y^{(1)} = 0$ ,  $V_x^{(1)} = 1$ ,  $V_y^{(1)} = 0$ ,  $\omega^{(1)} = \omega_0$ ,  $\psi^{(1)} = \psi_0$ . Соответствующий момент времени  $t^{(j)}$  вычисляется по формуле

$$t = \int_0^x \frac{ds}{V \cos(\psi - \alpha)}. \quad (16)$$

После решения системы уравнений (4)–(8) расчи-

тывается новое положение контура модели.

**3) Модуль расчета формы каверны (Cavity)** находит форму нестационарной суперкаверны с учетом падения скорости, искривления траектории движения СКМ и переменного угла атаки кавитатора  $\alpha$  по уравнениям (9)–(11), (16). Уравнение (9) интегрируется в равноотстоящих точках  $x_i^{(j)} = x_{i-1}^{(j)} + h$ ,  $i = 2, 3, \dots$  (значение индекса  $i = 1$  соответствует носовой точке СКМ).

После расчета формы каверны определяются зазоры  $h_1$ ,  $h_2$  соответственно между нижней и верхней точками кормового среза модели и границами контура каверны. Значения  $h_1 \leq 0$  и/или  $h_2 \leq 0$  свидетельствуют о наличии контакта корпуса модели с нижней и/или верхней границей каверны. В этом случае рассчитывается длина смоченных участков корпуса модели  $l_1$  и/или  $l_2$ .

**4) Модуль расчета гидродинамических сил (Forces)** определяет проекции гидродинамической силы  $\vec{F}_s$  и момент  $M_s$ , действующие при нестационарном глассировании хвостовой части СКМ по внутренним границам каверны (см. рис. 1). На входе в модуль используются данные о взаимном положении и скоростях границ корпуса СКМ и каверны и значения  $h_k$ ,  $l_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Проекции суммарной силы и момента, входящие в правые части уравнений (4)–(6), вычисляются по формулам

$$\Sigma F_x = F_{nx} + F_{sx} - mg \sin \psi,$$

$$\Sigma F_y = F_{ny} + F_{sy} - mg \cos \psi,$$

$$\Sigma M_z = M_n + M_s.$$

Для дискового кавитатора, плоскость которого перпендикулярна к оси модели, всегда  $M_n = 0$ .

**5) Модуль графической анимации (Image)** выводит на экран компьютера контуры каверны и модели через заданное число шагов, что создает эффект движения (функция меню "Motion"). Графическая информация, отображаемая на экране ПК, может быть непосредственно сопоставлена с экспериментальными кинограммами.

После прохождения моделью заданной дистанции  $x_2$  на экране ПК могут быть построены итоговые графики изменения компонент скорости центра масс модели  $V_x(x)$ ,  $V_y(x)$ , угла тангажа  $\psi(x)$ , угловой скорости  $\omega(x)$  и вертикального отклонения модели  $y(x)$  (функция меню "History").

На рис. 3 показан вид экрана ПК после выполнения функции "Motion". Здесь  $HX$  – безразмерный шаг расчета;  $N = 10$  – количество контактов модели попеременно с верхней и нижней границами контура каверны. Скорости  $V_x$ ,  $V_y$  и  $\omega$  выводятся в безразмерном по  $L$ ,  $V_0$  виде, углы  $\psi$ ,  $\alpha$  – в радианах. Коэффициенты гидродинамических сил и моментов определяются по формулам

$$F_{x,y} = \frac{\rho V^2}{2} \pi R_n^2 c_{x,y}, \quad M = \frac{\rho V^2}{2} \pi R_n^2 L c_m.$$

Знак коэффициентов показывает направление действия сил и моментов.

На рис. 4 показан вид экрана ПК после выполнения функции "History" для той же модели и при тех же начальных данных. Ординаты графиков строятся в безразмерном виде, абсцисса  $x$  дана в метрах. Как видно из графиков, при движении в режиме рикошетирования взаимодействие хвостовой части СКМной носит характер кратковременных импульсов, что проявляется в разрывном характере функций  $\omega(x)$  и  $V_y(x)$ .

Заметим, что программа STAB позволяет моделировать также режим непрерывного глиссирования модели по нижней поверхности каверны, в том числе вентилируемой. В этом случае кавитатор устанавливается под углом  $\delta$  к оси модели для компенсации момента силы, возникающей на кормовом участке.

При движении СКМ в режиме искусственной кавитации существенными параметрами подобия течения, кроме  $\sigma$ , являются число Фруда  $Fr = V/\sqrt{gD_n}$  и динамический параметр газонаполненной каверны  $\beta = Eu/\sigma$ . В этом случае к уравнениям (9)–(11) добавляются уравнение баланса массы газа в каверне [5,6] и соотношения, учитывающие искажение формы каверны под действием сил тяжести [10].

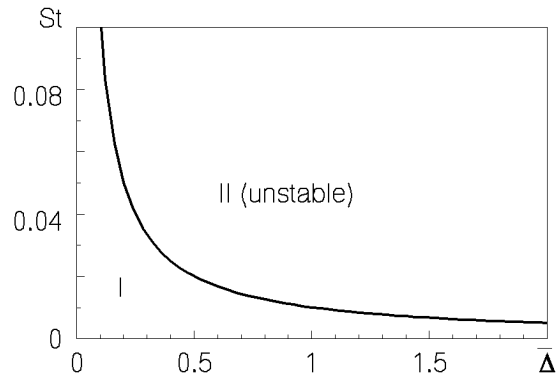


Рис. 5. Зоны устойчивого (I) и неустойчивого (II) движения СКМ:  $\bar{T}_c = 0.0563$ ;  $x_2 = 40$  м

Результаты компьютерного моделирования позволяют заключить, что движение СКМ в режиме непрерывного глиссирования при постоянном угле установки  $\delta$  является всегда неустойчивым.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ СКМ

Компьютерное моделирование с помощью программы STAB позволяет исследовать устойчивость движения СКМ "целом", когда модель совершает колебательные движения внутри каверны, рикошетируя своей хвостовой частью попеременно от нижней и верхней границ каверны.

Проведенный анализ показал, что наибольшее влияние на устойчивость движения СКМ с дисковым кавитатором оказывают три безразмерных параметра:

$$\bar{T}_c = \frac{I_c}{mL^2}, \quad St = \frac{\omega_0 L}{V_0}, \quad \bar{\Delta} = \frac{R_c - R_s}{R_n}. \quad (17)$$

Величина параметра  $\bar{\Delta}$  при заданной форме модели определяется в основном радиусом кавитатора  $R_n$  и слабо зависит от начальной скорости  $V_0$ .

В результате серии расчетов при постоянных значениях  $V_0$ ,  $\bar{T}_c$ ,  $x_2$  и варьируемых  $R_n$ ,  $\omega_0$  плоскость изменения параметров  $\bar{\Delta}$ ,  $St$  разделяется на зону I, для которой движение устойчиво, и зону II, для которой движение неустойчиво (см. рис. 5). При этом движение СКМ является устойчивым, пока точка приложения гидродинамической силы  $\vec{F}_s$  располагается позади центра масс модели:

$$\frac{l_k}{3} < L - x_c, \quad k = 1, 2, \quad 0 < x < x_2. \quad (18)$$

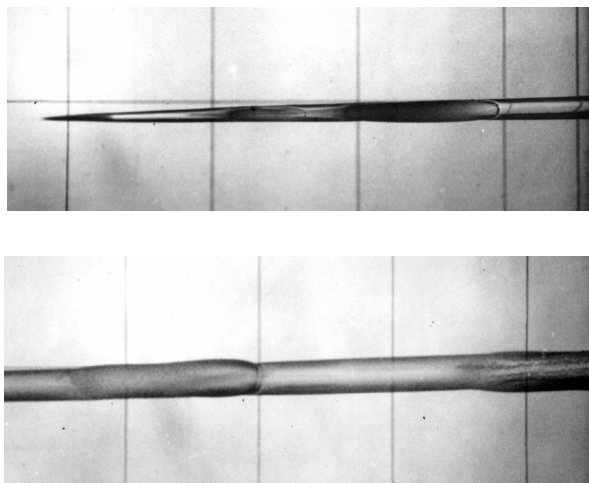


Рис. 6. Фото возмущенной суперкаверны:  
 $D_n = 1$  мм,  $D_s = 7.6$  мм,  $L = 85$  мм,  $m = 14.3$  г,  
 $\bar{T}_c = 0.0569$ . а -  $V = 900$  м/с, б -  $V = 690$  м/с

Для динамически подобных моделей  $\bar{T}_c = \text{const}$  зоны устойчивости одинаковы. Потеря устойчивости движения на экране ПК визуально воспринимается как замыв передней части модели и недопустимо большое возрастание угла тангажа  $\psi$ .

Существование данного механизма самостабилизации СКМ подтверждается прямой киносъемкой движущихся в воде моделей при скоростях движения до 1200 м/с [3, 5]. В экспериментах его действие обнаруживается в периодических возмущениях поверхности суперкаверн, которые развиваются в соответствии с принципом независимости. На рис. 6 приведены экспериментальные фотографии различных участков высокоскоростных суперкаверн, возмущенных при контактах с моделью<sup>2</sup>. Время экспозиции при съемке составляло  $3 \cdot 10^{-6}$  с. Аналогичные кадры, полученные при других значениях скорости и размерах моделей, приведены в наших работах [3, 5].

При потере устойчивости движения СКМ в эксперименте происходит несимметричный замыв модели, что приводит к резкому (ударному) повышению гидродинамического сопротивления и деформации модели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Компьютерное моделирование является эффективным средством исследования нестационарных суперкавитационных течений. С его помощью

нами обнаружен новый механизм самостабилизации высокоскоростных СКМ путем рикошетирувания их хвостовой части от внутренних границ каверны. Существование данного механизма самостабилизации подтверждено прямой киносъемкой движущихся в воде моделей.

Нами разработана программа компьютерного моделирования динамики СКМ STAB, которая позволяет при заданной массе выбрать форму модели, устойчиво проходящей заданную дистанцию, и допустимый уровень начальных возмущений. Программа может быть использована в исследовательской и проектной работе, а также в учебном процессе.

Дальнейшая работа по совершенствованию программы STAB направлена на уточнение алгоритмов вычисления гидродинамических сил и моментов и включение трехмерной динамики СКМ.

1. Савченко Ю.Н. О движении в воде на суперкавитационных режимах обтекания // Гидромеханика.– 1996.– Вып. 70.– С. 105–115.
2. Putlin S.I. Stability of supercavitating slender body during water entry and underwater motion // High Speed Body Motion in Water (AGARD Report 827). Proc. Fluid Dynamics Panel Workshop. – Kiev, 1997.
3. Савченко Ю.Н., Власенко Ю.Д., Семенов В.Н. Экспериментальные исследования высокоскоростных кавитационных течений // Гидромеханика.– 1998.– Вып. 72.– С. 103–111.
4. Vlasenko Yu.D. Experimental investigations of high-speed unsteady supercavitating flows. Proc. Third International Symp. on Cavitation. – Vol. 2. Grenoble (France)–1998.–P. 39–44
5. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н., Путилин С.И. Нестационарные процессы при суперкавитационном движении тел // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– Т. 1, N 1.– С. 62–80.
6. Семенов В.Н. Компьютерное моделирование пульсаций вентилируемых суперкаверн // Гидромеханика.– 1997.– Вып. 71.– С. 110–118.
7. Semenenko V.N. Computer simulation of the unsteady supercavitating flows // High Speed Body Motion in Water (AGARD Report 827). Proc. Fluid Dynamics Panel Workshop. – Kiev, 1997.
8. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами.– К.: Наук. думка, 1969.– 208 с.
9. Логвинович Г.В., Серебряков В.В. О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн // Гидромеханика.– 1975.– Вып. 32.– С. 47–54.
10. Буйвол В.Н. Тонкие каверны в течениях с возмущениями.– К.: Наук. думка, 1980.– 296 с.
11. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н., Наумова Е.И. Гидродинамические характеристики полигональных контуров при суперкавитационном обтекании // Докл. НАН Украины.– 1997.– N 7.– С. 97–103.
12. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глассирования // Тр. ЦАГИ.– 1980.– Вып. 2052.– С. 3–12.

<sup>2</sup>Фотографии получены Ю.Д.Власенко.