УДК 007:681.3.06

ВЛИЯНИЕ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАЧАЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ОБЪЕКТА НА ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

В.И. СУЩУК-СЛЮСАРЕНКО, В.Н. ПОДЛАДЧИКОВ

Показано применение метода калмановской фильтрации при разработке алгоритмов адаптивного оценивания в условиях короткой выборки. Описана методика улучшения точности оценивания параметров модели в переходный период, основанная на учете априорной информации. Показано применение этой методики для авторегрессионных моделей и некоторых динамических рядов в условиях короткой выборки. Приведены результаты моделирования предложенных алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

Реальные рыночные условия часто имеют слишком большую динамику, которая не позволяет указать интервал времени с одинаковыми или повторяющимися условиями для достаточности статистик. В этих условиях весьма трудной является оценка экономических показателей, статистическое обследование которых затруднено небольшим объемом наблюдений. В связи с этим разработано множество приемов, цель которых — высокая точность прогноза. Основное условие анализа (извлечение из данной выборки требуемой информации) — возможность принятия решения. Следовательно, критерием понятия «малая выборка» может служить достоверность принимаемого на её основе решения. Разумеется, выбор случайного эквивалентного процесса (модели) затруднен, сложна и дорогостоящая разработка программно-технических комплексов [1]. Большинство оптимальных алгоритмов оценивания являются результатом решения соответствующих модельных задач при наличии полной априорной статистической информации. На практике приходится иметь дело с ситуациями, в которых априорная информация либо известна приближенно, либо отсутствует полностью. В этом случае применяют параметрические адаптивные алгоритмы оценивания, которые не только дают оценку требуемых параметров, но и восстанавливают статистические характеристики априорного описания динамической системы и измерений [1–5]. Ограниченный объем исходной информации, отсутствие априорных сведений о виде законов распределений делают невозможным формальное применение традиционных методов получения оценок параметров [6], что требует привлечения нового подхода к проблеме.

Перспективным подходом при разработке алгоритмов адаптивного оценивания, даже в условиях короткой выборки, является метод калмановской фильтрации.

Рассмотрим дискретную динамическую систему, описываемую в пространстве состояний уравнениями

$$X_k = \Phi X_{k-1} + GW_{k-1}, \tag{1}$$

$$X_k = \Phi X_{k-1} + GW_{k-1}, \tag{2}$$

где

$$M\{V_k\} = r^*, M\{W_k\} = q^*, \;\; M\{(V_k - r^*)(V_i - r^*)^T\} = R^* \delta(k-i),$$

$$M\{(W_k - q^*)(W_i - q^*)^T\} = Q^* \delta(k-i), \;\; M\{(W_k - q^*)(V_i - r^*)\} = 0.$$

Уравнения, описывающие оптимальный дискретный фильтр, имеют вид

$$\hat{X}_{k+1,k} = \hat{X}_{k,k-1} + K_k \nu_k,$$

$$K_k = P_{k,k-1} H^T (H \;\; P_{k,k-1} H^T + R \;\;)^{-1},$$

$$P_{k,k} = (I - K_k H) P_{k,k-1},$$

где $\nu_k = z_k - H\hat{X}_{k,k-1}$ — невязка фильтра.

Учитывая актуальность задачи нахождения оценок вектора параметров, формируемого рекурентными алгоритмами по заданной короткой выборке, скорость сходимости оценок параметров модели к оптимальному решению является существенной.

При оптимизации модели динамической системы важное значение имеет максимально возможное использование априорной информации о её начальном состоянии. Как правило, на практике фактическое значение ковариационной матрицы ошибок оценивания в переходном режиме работы фильтра выбирают в виде диагональной матрицы с очень большими, практически бесконечными элементами. Асимптотически для устойчивых алгоритмов неточный выбор начальной ковариации не влияет на точность оценок. Однако в переходном режиме точностные характеристики снижаются. В условиях короткой выборки этот факт существенный. Поставим задачу определения условий, при которых целесообразно учитывать априорную информацию о начальных состояниях в условиях априорной неопределённости, и выбора расчетного значения начальной ковариации, когда её фактическое значение задается некоторой областью.

Поставим задачу определения тех допустимых границ неточности задания расчетного значения $P_{0,0}$, которые гарантируют, что выбор конечного значения этой матрицы в пределах указанных границ не приведет к снижению точности фильтрации в переходном режиме работы фильтра по сравнению с условиями, когда выбирается $P_{0,0}^{-1} = 0$ и обеспечивается существенное повышение точности, если фактическое значение $P_{0,0}^*$ близко к расчетному [2]. Решим эту задачу для систем с постоянными параметрами, возмущаемыми шумом состояния.

Рассмотрим дискретную динамическую систему, определяемую уравнениями $(1)-(2)$. Предположим, что расчетные значения статистических характеристик шумов состояния и измерения q, Q, r и R совпадают с фактическими значениями, однако фактическое $P_{0,0}^{*}$ отличается от расчетного значения $P_{0,0}^{*}$ ковариационной матрицы ошибки оценки начального состояния.

Определим явный вид ковариационной матрицы фактической ошибки фильтрации.

Фактическую ошибку фильтрации $\widetilde{X}_{k,k} = X_k - \hat{X}_{k,k}$ системы $(1)-(2)$ в состоянии X_k можно представить следующим образом:

$$\widetilde{X}_{k,k} = \Psi_{k,0}\widetilde{X}_{0,0} + \sum_{i=1}^{k}\Psi_{k,i-1}\Phi^{-1}G(W_{i-1}-q) - \sum_{i=1}^{k}\Psi_{k,i}K_i(V_i - r),$$

где переходная матрица $\Psi_{k,i} = (P_{k,k} - \overline{P})(B^{i-k})^T(P_{i,i} - \overline{P})^{-1}$, $\overline{P}$ — установившееся решение;

$$\overline{P} = (I - \overline{P}H^T R^{-1}H)(\Phi\overline{P}\Phi^T + Q),$$

$$B = (I - \overline{P}H^T R^{-1}H)\Phi, \tag{3}$$

$$K_i = P_{i,i}H^T R^{-1}.$$

Отсюда следует, что расчетная ковариационная матрица ошибки фильтрации может быть представлена соотношением

$$P_{k,k} = \Psi_{k,0}P_{0,0}\Psi_{k,0}^T + \sum_{i=1}^{k}\Psi_{k,i-1}\Phi^{-1}GQG^T\Phi^{-T}\Psi_{k,i-1}^T + \sum_{i=1}^{k}\Psi_{k,i}K_iRK_i^T\Psi_{k,i}^T. \tag{4}$$

Ковариационная матрица фактической ошибки фильтрации [2] имеет вид

$$P_{\text{факт}\,k,k} = \Psi_{k,0}P_{0,0}^{*}\Psi_{k,0}^T + \sum_{i=1}^{k}\Psi_{k,i-1}\Phi^{-1}GQG^T\Phi^{-T}\Psi_{k,i-1}^T + \sum_{i=1}^{k}\Psi_{k,i}K_iRK_i^T\Psi_{k,i}^T.$$

Вычитая из последнего выражения соотношение (4), получаем явное представление для ковариационной матрицы фактической ошибки фильтрации:

$$P_{\text{факт}\,k,k} = P_{k,k} + \Psi_{k,0}(P_{0,0}^{*} - P_{0,0})\Psi_{k,0}^T. \tag{5}$$

Последнее выражение обобщает представление для ковариационной матрицы фактической ошибки фильтрации [2].

$$P_{\text{факт}\,k,k} = P_{k,k} + P_{k,k}\Phi_{0,k}^T P_{0,0}^{-1}(P_{0,0}^{*} - P_{0,0})P_{0,0}^{-1}\Phi_{0,k}P_{k,k}.$$

Из выражения (5) следует, что ковариационная матрица фактической ошибки фильтрации может оказаться существенно больше расчетной в переходном режиме работы фильтра в зависимости от величины отклонения $P^*_{0,0} - P_{0,0}$.

Определим условия, которым должна удовлетворять матрица $P^*_{0,0} - P_{0,0}$, чтобы матрица $P_{\text{факт}\, k,k}$, не превышала ковариационную матрицу $P^a_{k,k}$ той ошибки, которая соответствует фильтру без учета априорной информации о начальном состоянии, т.е. выбору бесконечного расчетного значения $P^{-1}_{0,0} = 0$.

Предварительно оценим выигрыш, который можно получить, если использовать конечное значение $P_{0,0}$, и определим явное выражение для той составляющей $\Delta P_{k,k}$ ковариационной матрицы $P^a_{k,k}$, на которую она может быть уменьшена, если расчетное значение $P_{0,0}$ выбирать конечным при условии, что расчетное $P_{0,0}$ и фактическое значения $P^*_{k,k}$ совпадают.

Как следует из явного вида решения уравнения Риккати для систем с дискретным временем [2]

$$(P_{k,k} - \overline{P})^{-1} = (B^{-k})^T (P_{0,0} - \overline{P})^{-1} B^{-k} + \sum_{k=0}^{k-1} \left(B^{-i}\right)^T H^T \widetilde{R}^{-1} H B^{-i} .$$

Здесь B определяется выражением (3), $\widetilde{R} = R - H\overline{P}H^T$ и $\overline{P} = \lim_{k\to\infty} P_{k,k}$, или

$$(P_{k,k} - \overline{P})^{-1} = (B^{-k})^T (P_{0,0} - \overline{P})^{-1} B^{-k} + (P^a_{k,k} - \overline{P})^{-1} . \qquad (6)$$

Используя лемму об обращении матриц, получаем

$$P_{k,k} - \overline{P} = P^a_{k,k} - \overline{P} - -(P^a_{k,k} - \overline{P})(B^{-k})^T \left[\left(P_{0,0} - \overline{P}\right) + B^{-k}\left(P^a_{k,k} - \overline{P}\right)(B^{-k})^T\right]^{-1} B^{-k} (P^a_{k,k} - \overline{P}) ,$$

или

$$\Delta P_{k,k} = P^a_{k,k} - P_{k,k} = (P^a_{k,k} - \overline{P})\left[B^k\left(P_{0,0} - \overline{P}\right)(B^k)^T + \left(P^a_{k,k} - \overline{P}\right)\right]^{-1} (P^a_{k,k} - \overline{P}) . \qquad (7)$$

Таким образом, ковариационная матрица $P^a_{k,k}$ ошибки фильтрации, основанной на предположении о наличии априорной информации о начальном состоянии и соответствующем выборе начальной ковариации $P^{-1}_{0,0} = 0$, может быть уменьшена на положительно определенную матрицу $\Delta P_{k,k}$, которая возрастает при уменьшении матрицы $P_{0,0}$. Однако, если фактическое значение $P^*_{0,0}$ отличается от расчетного $P_{0,0}$, то $\Delta P_{k,k}$ отличается от выражения, описываемого формулой (7). Определим, какое допустимо отклонение расчетной и фактической начальных ковариаций, оправдывающее риск использования их конечных значений при построении фильтра, гарантирующее выполнение условия $P_{\text{факт}\, k,k} \le P^a_{k,k}$ или

$$\Psi_{k,0}(P^*_{0,0}-P_{0,0})\Psi^T_{k,0} \le (P^a_{k,k}-\overline{P})\Big[B^k\big(P_{0,0}-\overline{P}\big)(B^k)^T+\big(P^a_{k,k}-\overline{P}\big)\Big]^{-1}(P^a_{k,k}-\overline{P})\,.$$

Умножим обе части неравенства на $\Psi_{0,k}$ слева, а справа — на $\Psi^T_{0,k}$ и, учитывая выражение (6), после ряда преобразований получим

$$(P^*_{0,0}-P_{0,0}) \le [\big(P_{0,0}-\overline{P}\big)(B^k)^T+B^{-k}(P^a_{k,k}-\overline{P})]\cdot[B^k\big(P_{0,0}-\overline{P}\big)(B^k)^T+P^a_{k,k}-\overline{P}]^{-1}\times$$

$$\times[B^k\big(P_{0,0}-\overline{P}\big)+(P^a_{k,k}-\overline{P})(B^{-k})^T];$$

или

$$(P^*_{0,0}-P_{0,0}) \le P_{0,0}-\overline{P}+B^{-k}(P^a_{k,k}-\overline{P})(B^{-k})^T\,. \tag{8}$$

Подставляя $P^a_{k,k}-\overline{P}=\left(\sum\limits_{k=0}^{k-1}\left(B^{-i}\right)^T H^T\widetilde{R}^{-1}HB^{-i}\right)^{-1}$ перепишем последнее неравенство в виде

$$P^*_{0,0} \le 2P_{0,0}-\overline{P}+\left(\sum_{k=0}^{k-1}\left(B^{i}\right)^T H^T\widetilde{R}^{-1}HB^{i}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Таким образом, выбор расчетного значения начальной ковариации, удовлетворяющий неравенству (1.9), гарантирует, что учет априорной информации не приводит к снижению точности фильтрации по сравнению с оцениванием, основанным на выборе матрицы начальной ковариации $P^{-1}_{0,0}=0$. Если расчетное значение $P^*_{0,0}$ «угадано», то ковариационная матрица ошибки фильтрации уменьшается на величину $\Delta P_{k,k}$, определяемую выражением (7). Заметим, что для простоты выражение (9) можно заменить более жестким неравенством, гарантирующим выполнение требуемого условия

$$P^*_{0,0} \le 2P_{0,0}-\overline{P}\,. \tag{10}$$

Методика определения установившегося решения $\overline{P}$ уравнения Риккати для систем с дискретным временем приведена в [2, прил. 1]. Рассмотрим пример.

Пример 1. Найти установившееся решение уравнения Риккати для одномерной системы.

Рассмотрим одномерную систему $X_{k+1}=X_k+W_k,\quad z_k=X_k+V_k$, где W_k и V_k - стационарные последовательности типа белого шума со следующими статистическими свойствами:

$$M\{W_k\}=M\{V_k\}=0;\; M\{W_kW_i\}=\sigma^2_W\delta(k-i);$$

$$M\{V_k V_i\} = \sigma^2 \delta(k-i);\ M\{W_k V_k\} = 0\,.$$

Используя уравнение (3) для $\overline{P}$, определяем предельное значение дисперсии ошибки оценивания: $H = 1$; $R^{-1} = \dfrac{1}{\sigma^2}$; $\Phi = 1$; $Q = \sigma_W^2$; тогда $\overline{p} = \left(1 - \dfrac{\overline{p}}{\sigma^2}\right)\left(\overline{p} + \sigma_W^2\right)$. Решая это уравнение относительно $\overline{p}$, получаем: $\overline{p} = \dfrac{\sigma_W}{2}\left(\sqrt{\sigma_W^2 + 4\sigma^2} - \sigma_W\right)$.

На практике, исходя из физических соображений, можно установить начальные ограничения на $P_{0,0}$. Если расчетное значение намного меньше $P_{\text{факт k},k}$, то нарушается свойство монотонности $P_{k,k}$, а если слишком завышеное — то увеличивается длительность переходного процесса, что существенно влияет на работу алгоритма в условиях короткой выборки. Поэтому из множества предполагаемых значений предлагается выбирать такую минимальную величину $P_{0,0}$, использование которой не ухудшает оценки в переходном режиме по сравнению с оцениванием без учета априорной информации.

Пример 2. Повысить точность оценивания параметров авторегрессионных моделей.

В примере изложены принципы применения методики выбора начальных ковариаций для авторегрессионных моделей, предложенных в [2]. Процесс называется процессом авторегрессии порядка n ($AP(n)$), если он описывается выражением $y_t + a_1 y_{t-1} + \ldots + a_n y_{t-n} = \varepsilon_t$, где все корни полинома $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ должны находиться внутри круга единичного радиуса (условие стационарности), $t \in T$ - дискретное время.

В пространстве состояний эта система описывается формулами

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k\,, \\ z_k = H_k X_k + \varepsilon_k\,, \end{cases} \tag{11}$$

$$M[\varepsilon_k] = 0;\ M[\varepsilon_k, \varepsilon_i] = \delta(k-i),$$

где $X_k = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — вектор оцениваемых параметров, $H_k = (y_{k-1},\ y_{k-2}, \ldots$ $\ldots,\ y_{k-n})$ — вектор состояния системы.

Проиллюстрируем вышеизложенную методику на примере процесса АР(1): $y_k = \varepsilon_k - a \cdot y_{k-1}$, где a - параметр, $\varepsilon = N(0, \sigma^2)$.

Предположим, что отсутствует априорная информация о начальном состоянии, т.е. $p_{0,0}^{-1} = 0$. Тогда дисперсия ошибки оценки имеет вид $p_{k,k}^a = \dfrac{1}{k}$. Если дисперсия начальной оценки конечная и равна $p_{0,0}$, то составляющая дисперсии ошибки оценки, на которую можно уменьшить $p^a_{k,k}$ при учете априорной информации,

$$p_{k,k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k(kp_{0,0}+1)} = \frac{p_{0,0}}{kp_{0,0}+1}.$$

Если фактическая начальная дисперсия $p^*_{0,0}$ отличается от расчетной $p_{0,0}$, то фактическая дисперсия $p_{\text{факт k},k}$ также отличается от $p_{k,k}$ и имеет вид

$$p_{\text{факт k},k} = \frac{p_{0,0}}{1+kp_{0,0}} + \frac{p^*_{0,0} - p_{0,0}}{(kp_{0,0}+1)^2} = \frac{p^*_{0,0} + kp^2_{0,0}}{(kp_{0,0}+1)^2}.$$

Определим условия, при которых $p_{\text{факт}\,k,k}$ не больше $p^a_{k,k}$.

Рассмотрим неравенство $p_{\text{факт}\,k,k} < p^a_{k,k}$ или $\dfrac{p^*_{0,0} + kp^2_{0,0}}{(kp_{0,0}+1)^2} < \dfrac{1}{k}$.

Решая неравенство, получаем $p^*_{0,0} \le 2p_{0,0} + \dfrac{1}{k}$.

Таким образом, для того чтобы точностные характеристики фильтра не выходили за пределы ошибок фильтра, построенного без учета априорной информации, необходимо выбирать расчетное значение $p_{0,0}$ не меньше, чем $\dfrac{p^*_{0,0}}{2}$. Так, если известно, что начальная фактическая дисперсия $0{,}15 \le p^*_{0,0} \le 1{,}5$, то в качестве ее расчетного значения целесообразно выбирать величину $p_{0,0} = 0{,}75$.

Для иллюстрации методики был сгенерирован процесс АР(1)

$$y_k = \varepsilon_k + 0.8 \cdot y_{k-1},$$

где $\varepsilon = N(0{,}1)$.

Результаты тестовых прогонов показаны на рис. 1.

Применение методики выбора начальной ковариации в условиях априорной неопределенности для известных динамических рядов, по крайней мере, не ухудшает, а в большинстве случаев уменьшает фактическую дисперсию в переходном режиме в $1{,}5-10$ раз. Так, для процесса, изображенного на рис. 1, фактическая дисперсия модели, построенной без учета априорной информации, составила величину $d_1 = 2{,}9367$, а для модели, учитывающей априорную информацию, — величину $d_2 = 1{,}1798$.

Используя выборку из 50 значений динамического ряда биржевых цен акций IBM, были получены результаты, показанные на рис. 2. Фактическая дисперсия уменьшилась в 1,5 раза.

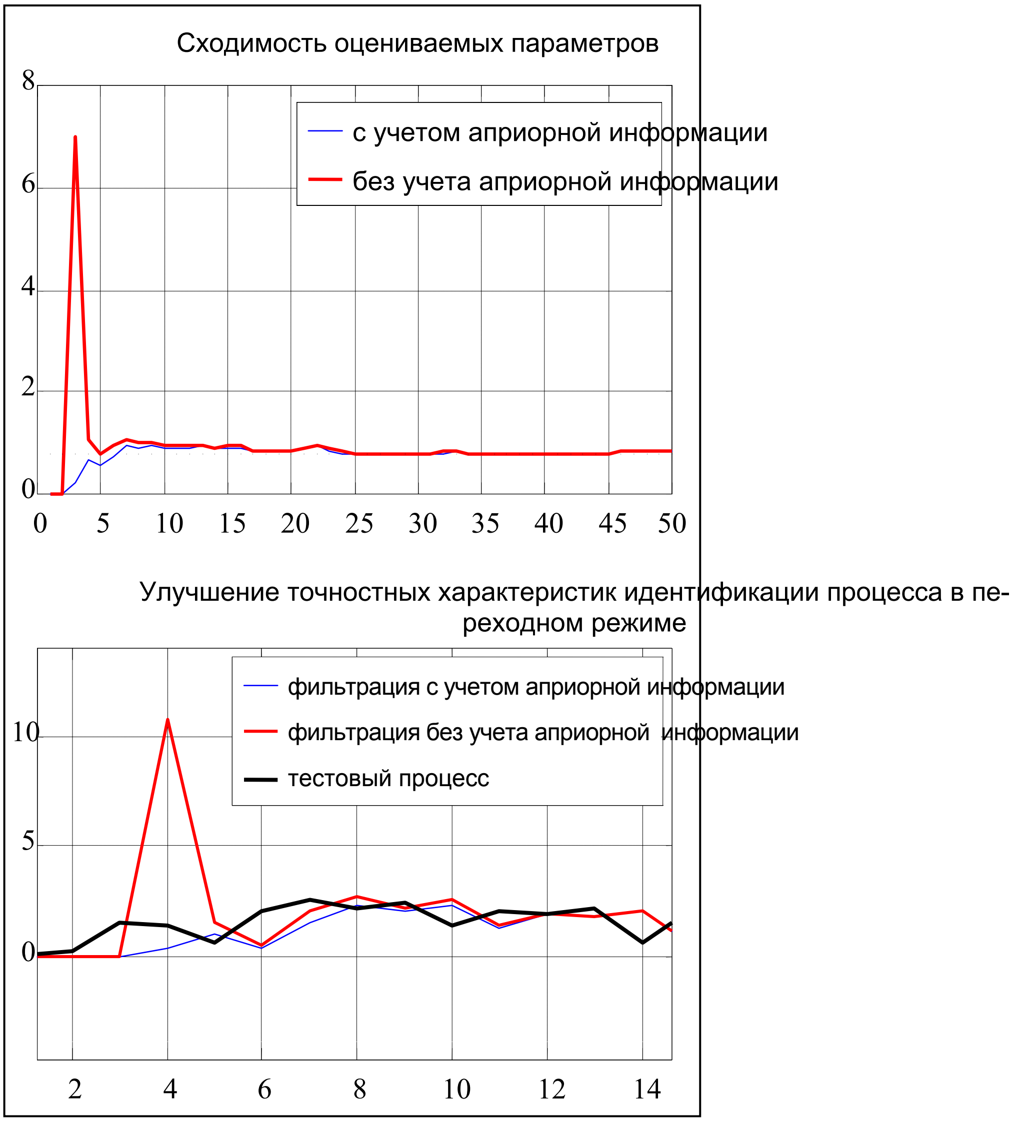

Рис. 1. Сравнительный анализ работы алгоритмов фильтрации (с учетом и без учета априорной информации) проведен-

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, полученные аналитические выражения для дисперсий дополнительных ошибок фильтрации, возникающих из-за неучета априорной информации о начальном состоянии объекта, позволяют задавать приближенные значения начальных ковариаций, оптимизирующие алгоритм фильтрации в переходном режиме. Это обстоятельство позволяет существенно улучшить характеристики фильтрации в условиях короткой выборки. Проведенное моделирование разработанных алгоритмов, подтверждающее возможность их применения не только в технических, но и в экономических системах, позволит существенно улучшить характеристики фильтра уже на этапе его проектирования.

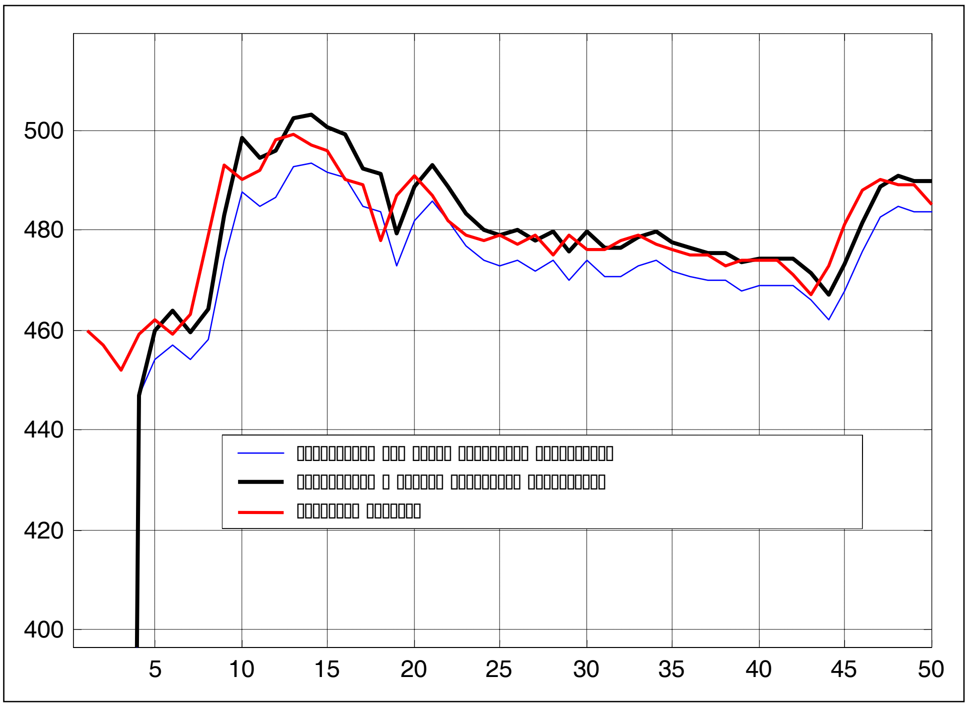

Рис. 2. Сравнительный анализ фильтрации с учетом и без учета априорной информации для выборки из 50 значений динамического ряда биржевых цен акций IBM

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цыпкин Я.З.* Основы информационной теории идентификации. — М.: Наука, 1984 . — 320 с.
2. *Згуровский М.З.,. Подладчиков В.Н.* Аналитические методы калмановской фильтрации для систем с априорной неопределенностью. — Киев: Наук. думка, 1995. — 283 с.
3. *Марпл – мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990. — 584 с.
4. *Льюис К.Д.* Методы прогнозирования экономических показателей. — М.: Финансы и статистика, 1973. — 278 с.
5. *Дж. Бокс, Г. Дженкинс* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. — М.: Мир, 1974. —Вып. 1. — 406 с.
6. *Ивченко Б.П., Мартыщенко Л.А., Иванцов И.Б.* Информационная микроэкономика. Методы анализа и прогнозирования. — С.-Петербург: «Нордмед – издат», 1998. — 157 с.

Поступила 04.11.2002