

УДК 629.5.017.21

## НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ, ПЛАВАЮЧИХ НА ХВИЛЬОВІЙ ПОВЕРХНІ

А. М. СЕРДЮЧЕНКО

Український державний морський технічний університет, Миколаїв

Отримано 15.10.2000 ◊ Переглянуто 25.06.2001

Отримані нелінійні рівняння коливань для твердих тіл, плаваючих на поверхні важкої рідини і, зокрема, для 1) тривимірних багатоеlementних тіл типу суден з малою площиною ватерлінії (СМПВ) та 2) одноelementних подовжених тіл типу корпусів традиційних суден. Коливання тіл підтримуються набігаючою системою прогресивних регулярних хвиль Стокса скінченої амплітуди. Для тривимірних тіл при отриманні рівнянь була використана форма Ейлера, а гідромеханічні сили з боку рідини були поділені на хвильові сили Крилова-Фруда, які визначаються через незбурений тилом тиск в набігаючих хвилях, та гідродинамічні сили Хаскінда-Ньюмана, які враховують збурення тилом навколишньої рідини. Останні наближено визначаються через узагальнені гідродинамічні характеристики – прилучені маси та коефіцієнти демпфірування, визначені для миттєвої зануреної в рідину частини тіла. Для подовжених тіл, для яких має велике значення також подовжня міцність корпусу, слід вважати більш зручним отримання рівнянь коливань з умови врівноваженості вектора внутрішніх зусиль в поперечних перерізах для вільних кінців тіла. Отримані таким чином рівняння приведені до стандартного в механіці вигляду з узагальненими матрицями інерції, демпфірування та жорсткості, а також вектором збуджуючих сил. Наведені також типові результати числових розрахунків хитаючи одно- та багатокорпусних суден з урахуванням нелінійних ефектів. Показано значний вплив оголення та повного занурення в хвилі носової кінцівки корпусу судна на амплітуди подовжньої хитаючи.

Получены нелинейные уравнения колебаний твердых тел на поверхности тяжелой жидкости и, в частности, для 1) трехмерных многоelementных тел типа судов с малой площадью ватерлинии (СМПВ) и 2) одноelementных удлиненных тел типа корпусов традиционных судов. Колебания тела поддерживаются набегающей системой прогрессивных регулярных волн Стокса конечной амплитуды. Для трехмерных тел при составлении уравнений была использована форма Эйлера, а гидромеханические реакции жидкости были подразделены на силы Крылова-Фруда, определяемые через невозмущенное телом поле волновых давлений, и гидродинамические силы Хаскинда-Ньюмана, учитывающие вносимые телом возмущения в окружающую жидкость. При этом последние определялись приближенным методом через обобщенные гидродинамические характеристики – присоединенные массы и коэффициенты демпфирования, определенные для мгновенной погруженной части тела в жидкость. Для удлиненного тела, для которого большое значение имеет также продольная прочность, более удобным является получение уравнений из условия уравновешенности внутренних усилий в поперечных сечениях на концах тела. Полученные таким образом уравнения были приведены к стандартному в механике виду с обобщенными матрицами инерции, демпфирования и жесткости, а также вектором возмущающих сил. Приведены типичные результаты численных расчетов качки одно- и многокорпусных судов с учетом нелинейных эффектов. Показано сильное влияние оголения и полного погружения в волны носовой части корпуса судна на амплитуды продольной качки.

Nonlinear equations describing finite amplitude motions of rigid bodies which are floating on the wave surface has been derived. Two kind of bodies : 1) 3D multi-elements bodies like SWATH ships and 2) monohull elongated ones are considered. The body motion is sustained by the incoming regular system of finite amplitude progressive Stokes waves. For the 3D bodies the Eulerian form of equations has been used and hydrodynamic loads have been splitted into the nondisturbed by the body motion Krylov-Froude wave loads and hydrodynamic Haskind-Newman loads describing perturbations in the fluid by the diffraction effects and body oscillations. The Haskind-Newman loads were evaluated by the approximate technique based on the calculations of generalized hydrodynamic characteristics – added masses and damping coefficients for the instant immersed in the waves part of the body surface. For the monohull elongated bodies for which the longitudinal strength is an actual problem too the governing equations have been derived alternatively by using the equilibrium conditions of free-free floating beam. Finally the governing equations have been introduced in canonical form within the generalised inertia, damping and rigidity matrices and vector of exciting forces. Typical numerical results of nonlinear ship motions in waves are considered. Strong influence of ship bow emergence and immersion into the waves on the amplitudes of the longitudinal ship motion are achieved.

### ВСТУП

Поглиблене математичне моделювання складних фізичних явищ типово пов'язане з урахуванням нелінійних, нестационарних та тривимірних ефектів і закономірностей, що супроводжують ці явища [1,2]. Не є виключенням з цього правила і задача про коливання твердих тіл, плаваючих на поверхні важкої рідини та випробовуючих дію заданої системи хвиль. При достатньо великій крутості набігаючих хвиль амплітуди коливань тіла також будуть значними, що призведе до появи не-

лінійних ефектів як в динаміці руху тіла, так і в гідродинаміці навколишньої рідини.

Лінійна задача про коливання тіл на поверхні рідини при дії регулярних хвиль малої амплітуди була принципово розв'язана ще у 40–50-ті роки. Значний внесок у розв'язання гідродинамічної частини задачі було зроблено в роботах М.Е. Кочина, М.Д.Хаскінда, Л.М. Сретенського та багатьох інших [3,4]. Подальше використання спектральної техніки [5] в рамках того ж лінійного наближення дозволило створити в 60–70-ті роки імовірнісні методи розв'язання задачі при дії на тіло нерегу-

лярного морського хвилювання [6].

В той же час теоретичні та експериментальні дослідження показували [7–12], що при дії особливо крутих хвиль відбувається значна зміна зануреної поверхні тіла з оголенням та повним зануренням у рідину окремих частин, розвиваються інтенсивні коливання як тіла, так і навколишньої рідини з частковим руйнуванням збурених хвиль. Тому актуальною залишається задача нелінійного узагальнення методів дослідження динаміки плаваючих на хвильовій поверхні тіл. В 60–80-ті роки, по аналогії з методами класичної нелінійної механіки [13], було зроблено низку спроб отримати формальні розв'язки нелінійних задач гідродинаміки плаваючих тіл методами малого параметру з використанням багатопараметричних асимптотичних рядів [14–17] та ін. Але аналітична переобтяженість методу та трудовмісткість алгоритмів розрахунку загалом не призвела до очікуваних результатів. У той саме час, увагу дослідників привертала також спрощені часткові постановки нелінійних задач гідродинаміки тіл, а в інженерних роботах незалежно розроблялись суто наближені феноменологічні підходи [9–12, 17–20, 21–25], і слід зазначити, що менш формальні методи досліджень виявилися більш продуктивними з точки зору отримання числових результатів. При цьому, в розв'язанні нелінійних задач гідродинаміки тіл набули досить широкого використання методи граничних інтегральних рівнянь у поєднанні з числовими методами інтегрування за часом та в просторі [21–27], а інженерні підходи показали прийнятність феноменологічного врахування основних нелінійних ефектів при розрахунках інтегральних характеристик хитавиці тіл [9–12, 19, 20].

В даній роботі, що більш тяжіє до другого із вказаних напрямків в дослідженні динаміки плаваючих на хвильовій поверхні тіл, отримані системи рівнянь, які описують коливання твердого тіла з урахуванням нелінійних ефектів як в динаміці руху тіла, так і в гідродинаміці руху рідини. Головні труднощі тут пов'язані з отриманням нелінійних залежностей для гідромеханічних реакцій рідини при взаємних коливаннях тіла та рідини при дії на тіло заданої системи набігаючих хвиль. Оскільки геометрія поверхні тіла має велике значення при визначенні гідродинамічних навантажень, то нижче будуть розглянуті два типи плаваючих тіл: це тривимірні багатоелементні тіла, що складаються з окремих подовжених елементів та однокорпусні подовжені тіла. В якості прикладів будуть виступати багатокорпусні судна типу суден з малою площиною ватерлінії та звичайні судна відповід-

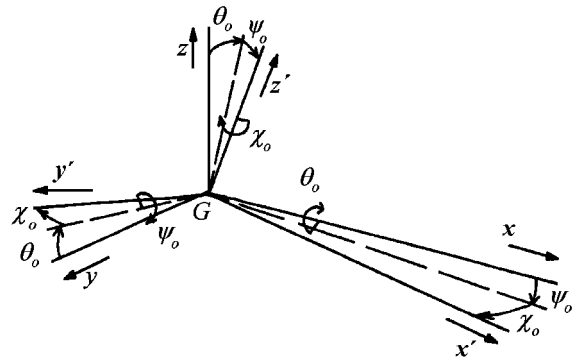


Рис. 1. Куты нахиленьня тіла при коливаннях

но. Приведені також типові результати числових розрахунків нелінійної поздовжньої хитавиці однокорпусного судна та розрахунки хитавиці судна типу СМПВ при довільних курсових кутах руху.

## 1. СИСТЕМИ КООРДИНАТ ТА ОСНОВНІ ПРИПУЩЕННЯ

Введемо до розгляду наступні декартові системи координат:  $Oxyz$  – рухома система координат, яка рівномірно рухається зі швидкістю поступального руху тіла  $\vec{v}_c = (v_c, 0, 0)$  вздовж вісі  $Ox$ , а вісь  $Oz$  направлена вертикально вгору з початком на площині тихої води;  $O'x'y'z'$  – жорстко зв'язана з тілом система координат, яка паралельна його головним центральним вісям інерції та яка у відсутності коливань тіла співпадає з системою координат  $Oxyz$ . Це, зокрема, означає, що в стані рівноваги тіло не має статичних кутів нахиленьня, що типово для нормальних умов експлуатації плаваючих споруд.

Кінематика коливань тіла визначається вектором лінійних переміщень  $\vec{\xi}_0(t) = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  з компонентами вздовж вісей системи координат  $Oxyz$  та вектором кутових нахилень  $\vec{\theta}_0(t) = (\theta_0, \psi_0, \chi_0)$ . Проекції вектору кутових нахилень  $\theta_0$  – бортові нахиленьня,  $\psi_0$  – поздовжні нахиленьня та  $\chi_0$  – відхиленьня від курсу відповідають системі корабельних кутів М.С. Благовещенського [28], яка є більш зручною для плаваючих на поверхні рідини твердих тіл. Кожному куту нахиленьня тіла відповідає часткова стандартна матриця кутових поворотів  $\mathbf{A}_\theta(\theta_0)$ ,  $\mathbf{A}_\psi(\psi_0)$  та  $\mathbf{A}_\chi(\chi_0)$  [29]. Добуток матриць

$$\mathbf{A}_\Sigma \equiv \mathbf{A}_{\theta\psi\chi}(\vec{\theta}_0) = \mathbf{A}_\chi(\chi_0)\mathbf{A}_\psi(\psi_0)\mathbf{A}_\theta(\theta_0)$$

визначає повну матрицю кутових нахилень твердого тіла в просторі, (рис. 1). Тоді зв'язок між змінними систем координат буде мати вигляд

$$(\vec{x} - \vec{x}_G) = \mathbf{A}_\Sigma(\vec{x}' - \vec{x}'_G), \quad \vec{x}_G = \vec{x}'_G + \vec{\xi}_0, \quad (1)$$

де  $\vec{x}'_G = (x'_G, 0, z'_G)$  визначає координати центру ваги тіла т. G, яке має одну площину симетрії; зворотні співвідношення визначаються за допомогою транспонованої матриці  $\mathbf{A}'_\Sigma$  ( $\mathbf{A}'_\Sigma = \mathbf{A}_\Sigma^{-1}$ ) [30].

Кінематичні характеристики руху – переміщення точок тіла  $\vec{u}_b$ , їх швидкість та прискорення  $\vec{v}_b$ ,  $\vec{w}_b$  (в змінних обох систем координат) – визначаються формулами

$$\begin{aligned}\vec{u}_b &\equiv (\vec{x} - \vec{x}') = \vec{\xi}_0 + (\mathbf{A}_\Sigma - \mathbf{I})(\vec{x}' - \vec{x}'_G) = \\ &= \vec{\xi}_0 - (\mathbf{A}'_\Sigma - \mathbf{I})(\vec{x} - \vec{x}_G), \\ \vec{v}_b &\equiv \frac{d\vec{u}_b}{dt} = \dot{\vec{\xi}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_\Sigma(\vec{x}' - \vec{x}'_G) = \\ &= \dot{\vec{\xi}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_\Sigma \mathbf{A}'_\Sigma (\vec{x} - \vec{x}_G), \\ \vec{w}_b &\equiv \frac{d\vec{v}_b}{dt} = \ddot{\vec{\xi}}_0 + \ddot{\mathbf{A}}_\Sigma(\vec{x}' - \vec{x}'_G) = \\ &= \ddot{\vec{\xi}}_0 + \ddot{\mathbf{A}}_\Sigma \mathbf{A}'_\Sigma (\vec{x} - \vec{x}_G).\end{aligned}\quad (2)$$

Для плаваючих на поверхні рідини тіл нахилення на кути більше ніж 30–40 град. в нормальних умовах практично неможливе і тому елементи матриці  $\mathbf{A}_\Sigma$  можна значно спростити, використавши обмежені ряди Тейлора для тригонометричних функцій, які входять в  $\mathbf{A}_\Sigma$ . Наприклад, з точністю до малих четвертого порядку по амплітуді коливань  $\sin \theta_0 = \theta_0 - \frac{1}{6}\theta_0^3 + O(\epsilon^5)$ ,  $\cos \theta_0 = 1 - \frac{1}{2}\theta_0^2 + O(\epsilon^4)$ , де  $\epsilon \ll 1$  – малий додатний параметр, який визначає малість амплітуд коливань тіла.

Колівання тіла підтримуються системою хвиль, які набігають під кутом  $\alpha_c$  до вісі  $Ox$  та вважаються для конкретності регулярними прогресивними хвилями Стокса скінченної амплітуди [3]. Залежності для гідродинамічних характеристик хвиль Стокса в рамках теорії VI порядку – хвильового профілю  $\zeta_w$ , поля гідромеханічного тиску  $p_w$  та поля швидкостей часток рідини  $\vec{v}_w = (v_{wx}, v_{wy}, v_{wz})$ , які необхідні для подальших розрахунків гідродинамічних реакцій тіла, – можна знайти в роботі [31]. При цьому вважається, що довжина хвиль співставна з поздовжнім розміром тіла, що відповідає загалом резонансним режимам коливань, а крутість хвиль може досягати граничного значення  $1/7$  для прогресивних хвиль Стокса. Відповідно і збуджені плаваючим тілом хвилі за рахунок його коливань та дифракції набігаючих хвиль також будемо вважати потенціальними, а навколишню рідину – ідеальною, однорідною та баротропною. Амплітуди вимушених коливань тіла можуть бути скінченими, співставними з характерним масштабом занурення тіла в рідину, та такими, що можуть призводити до значної зміни зануреної в рідину поверхні тіла з можливим оголен-

ням чи повним зануренням у хвилі окремих частин тіла. Але для збуджених тілом хвиль приймемо, що їхні амплітуди приблизно на порядок менші за амплітуди набігаючої системи хвиль.

Гідродинамічні реакції, що діють на тіло з боку рідини, в нелінійній задачі зручно поділити на дві категорії сил: сили Крилова-Фруда, що визначаються через незбурений тілом хвильовий тиск, та гідродинамічні сили Хаскінда-Ньюмана, які враховують збурення, що вносить плаваюче тіло в навколишню рідину. Крім того, на тіло можуть діяти сили типу зусиль на стернях управління, на рушіях (в основному гвинтах) та, можливо, гідродинамічні реакції від руху рідкого вантажу з вільною поверхнею у відсіках тіла [32].

Основні геометричні характеристики тіла (розміри, форма поверхні) суттєво впливають на методи розрахунку гідродинамічних навантажень, і тому в даній роботі будемо розглядати два типи плаваючих тіл: 1) тривимірні багатоеlementні тіла, які складаються з подовжених тіл-елементів та 2) однокорпусні подовжені тіла, для яких довжина  $L$  приблизно на порядок більше за поперечні розміри. До другого типу відносяться, наприклад, звичайні однокорпусні судна, тоді як до першого типу можна віднести морські добувні платформи, судна-катамарани та ін.

## 2. РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ ДЛЯ ТРИВИМІРНОГО БАГАТООЛЕМЕНТНОГО ТІЛА

Як конкретний приклад такого типу плаваючих тіл будемо розглядати судно з малою площиною ватерлінії (СМПВ), яке (рис. 2) складається з несучої платформи-палуби, підводних сигароподібних корпусів (2-3 корпуси) та з'єднуючих їх з палубою тонких вертикальних стояків типу крил малого подовження (1-2 стояки-крила для кожного корпусу). Даний тип сучасних швидкісних суден відноситься до перспективного типу, особливо ті, що використовуються для паромно-пасажирських перевезень та військового призначення [33–35]. Для даного типу плаваючого тіла в якості початкових використаємо рівняння в формі Ейлера [29]:

$$\begin{aligned}M_G \ddot{\vec{\xi}}_0 &= \vec{F}_\Sigma(t), \\ M_G \{r_G^2 \ddot{\theta}_0 - [(r_G^2 \dot{\theta}_0) \times \dot{\theta}_0]\} &= \vec{M}'_\Sigma(t),\end{aligned}\quad (3)$$

де  $M_G$  – маса тіла;  $r_G^2 = \text{diag}(r_{Gx}^2, r_{Gy}^2, r_{Gz}^2)$  – діагональна матриця квадратів радіусів інерції маси тіла відносно головних центральних вісей;  $\vec{F}_\Sigma(t)$  – головний вектор поверхневих та об'ємних сил, що

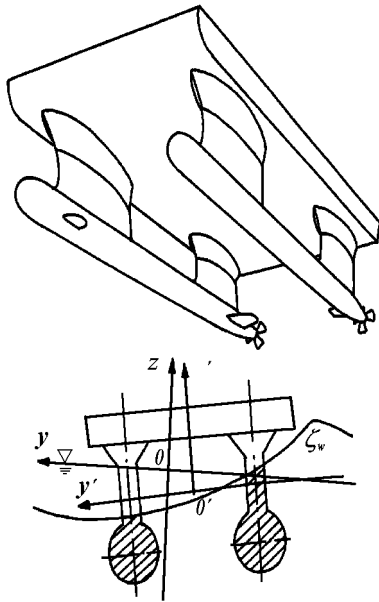


Рис. 2. Судно типу СМПВ та його поперечний переріз; // - миттєва занурена площа перерізу

діють на тіло, визначений в системі координат  $Oxyz$ ;  $\vec{M}'_{\Sigma}(t)$  – головний момент всіх діючих на тіло сил, визначений відносно центру ваги тіла в системі координат  $O'x'y'z'$ .

В умовах експлуатації на морському хвилюванні на плаваюче тіло діють об'ємні сили тяжіння та інерції мас, поверхневі гідромеханічні сили та зосереджені сили на стернях управління та на рушіях (гвинтах). При цьому гідромеханічні сили, як було прийнято вище, поділяються на хвильові сили Крилова-Фруда та гідродинамічні сили Хаскінда-Ньюмана, перші з яких також природньо розділити на гідростатичну та чисто хвильову компоненти. Причому постійна складова гідростатичних сил підтримання врівноважує сили тяжіння і ці сили утворюють тільки пару при нахиленнях тіла. Тому далі будемо розглядати тільки додаткову неврівноважену частину гідростатичної компоненти сил Крилова-Фруда, обумовлену зміною зануреного об'єму тіла. Додатково зазначимо також, що розрахунки гідромеханічних сил пов'язані з інтегруванням тиску рідини по миттєвій зануреній поверхні елементів тіла і тому їх зручніше визначати в жорстко зв'язаній системі координат, а головний момент визначати відносно початку даної системи т.  $O'$ .

Тоді, з урахуванням зроблених зауважень, рів-

няння (3) перепишемо у вигляді

$$M_G \mathbf{A}'_{\Sigma} \vec{\xi}'_0 = \vec{F}'_{\Sigma}(t),$$

$$M_G \{ r_G^2 \vec{\theta}'_0 - [(r_G^2 \vec{\theta}'_0) \times \vec{\theta}'_0] + [\vec{x}'_G \times (\mathbf{A}'_{\Sigma} \vec{\xi}'_0)] - g [(\vec{x}'_C - \vec{x}'_G) \times \vec{a}_3] \} = \vec{M}'_{\Sigma 0}(t), \quad (4)$$

де тепер головний вектор та головний момент дорівнюють відповідно

$$\vec{F}'_{\Sigma}(t) = \sum_j (\Delta \vec{F}'_h + \vec{F}'_w + \vec{F}'_o)_j + \sum_k (\vec{F}'_r + \vec{F}'_p)_k,$$

$$\vec{M}'_{\Sigma 0}(t) = \sum_j (\Delta \vec{M}'_h + \vec{M}'_w + \vec{M}'_o)_j + \sum_k ([\vec{x}'_r \times \vec{F}'_r]_k + [\vec{x}'_p \times \vec{F}'_p]_k). \quad (5)$$

Тут всі силові вектори визначені в жорстко зв'язаній системі координат, моменти визначені відносно точки  $O'$ ; індексами "h", "w" та "o" відповідно позначено неврівноважену гідростатичну, чисто хвильову та гідродинамічну компоненти повних гідромеханічних сил;  $\vec{x}'_C = (x'_C, 0, z'_C)$  ( $x'_C = x'_G$ ) – координати точки прикладання сил плавучості тіла;  $\vec{x}'_{rk}$  та  $\vec{x}'_{pk}$  – координати точок прикладання сили опору на  $k$ -му гвинті та сил на  $k$ -му стерні управління рухом відповідно; індекс "j" визначає елемент корпусу тіла;  $\vec{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$  – вектор елементів третього рядку матриці  $\mathbf{A}'_{\Sigma}$ , які дорівнюють (з точністю до  $O(\epsilon^3)$  включно)

$$a_{31} = -\psi_0 (1 - \frac{1}{6} \psi_0^2), \quad a_{32} = \theta_0 (1 - \frac{1}{6} \theta_0^2 - \frac{1}{2} \psi_0^2),$$

$$a_{33} = (1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 - \frac{1}{2} \psi_0^2).$$

Отримаємо відповідні залежності для всіх компонентів сил та моментів у виразі (5). Розглянемо спочатку сили Крилова-Фруда, розрахунок яких є більш простим. В загальному вигляді дана категорія сил визначається інтегруванням хвильового тиску по миттєвій зануреній частині поверхні тіла до незбуреної хвильової поверхні  $z = \zeta_w(x, y, t)$ . Якщо доповнити занурену поверхню тіла до замкненої частиною хвильової поверхні  $z = \zeta_w$ , на якій хвильовий тиск  $p_w(\zeta_w) = 0$ , то, використавши формулу Гауса-Остроградського [30], можна перейти до інтегралів по миттєвому зануреному об'єму тіла, що зручніше для розрахунків. Якщо ще врахувати подовженість елементів тіла вздовж вісі  $O'x'$ , то для неврівноваженої гідростатичної та хвильової компонентів сил Крилова-Фруда кож-

ного  $j$ -го елемента отримаємо залежності

$$\begin{aligned}\vec{F}'_h(t) &= \int_{(L)} \Delta \vec{q}'_h dx', & \vec{F}'_w(t) &= \int_{(L)} \vec{q}'_w dx', \\ \Delta \vec{M}'_h(t) &= \int_{(L)} \Delta \vec{m}'_h dx' + [\vec{x}'_{0j} \times \Delta \vec{F}'_h], \\ \vec{M}'_w(t) &= \int_{(L)} \vec{m}'_w dx' + [\vec{x}'_{0j} \times \vec{F}'_w],\end{aligned}\quad (6)$$

де  $\vec{x}'_{0j}$  – координати початку жорстко зв'язаної локальної системи координат  $j$ -го елемента і також використані позначення

$$\begin{aligned}\Delta \vec{q}'_h &= \gamma \vec{a}_3 \Delta f(x'), & \Delta \vec{m}'_h &= -\gamma [\vec{a}_3 \times \Delta \vec{s}]; \\ \Delta f &= \int \int_{(\Delta\omega)} dy' dz', & \Delta \vec{s} &= (\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z); \\ \Delta s_x &= x' \Delta f, & \Delta s_{y,z} &= \int \int_{(\Delta\omega)} (y', z') dy' dz'; \\ \vec{q}'_w &= - \int \int_{(\omega)} (\mathbf{A}^T_{\Sigma} \nabla \vec{p}'_w) dy' dz'; \\ \vec{m}'_w &= - \int \int_{(\omega)} [\vec{x}' \times (\mathbf{A}^T_{\Sigma} \nabla \vec{p}'_w)] dy' dz'.\end{aligned}\quad (7)$$

В даних залежностях  $\omega = \omega(x', t)$  означає площу поперечного перерізу елемента, занурену під хвильову поверхню (див. рис. 2),  $\Delta\omega = \Delta\omega(x', t)$  відповідає частині цієї площі між хвильовою поверхнею та ватерлінією рівноваги тіла на тихій воді і  $\nabla$ , як звичайно, є оператор Гамільтона за змінними  $x, y, z$ , що діє на чисто хвильову частину тиску  $\vec{p}_w$  ( $p_w = -\gamma z + \vec{p}_w$ ).

Загалом приведені вище інтеграли можуть бути підраховані в кожний момент часу числовими методами, хоча можлива й подальша їх структуризація та спрощення в залежності від форми поперечного перерізу тіла. Зокрема, раціонально виділити в (7) лінійну частину нерівноважених сил підтримання (див. нижче для подовжених тіл).

Розглянемо далі сили Хаскінда-Ньюмана, нелінійний розрахунок яких виявляється досить складною задачею в динаміці плаваючих на хвильовій поверхні тіл. Головний вектор та головний момент даної категорії сил визначаються інтегруванням збуреного судном гідродинамічного тиску  $p_o$  по миттєвій зануреній поверхні тіла:

$$\begin{aligned}\vec{F}'_o(t) &= - \iint_{(S)} p'_o \vec{n} dS, \\ \vec{M}'_o(t) &= - \iint_{(S)} [\vec{x}' \times p'_o \vec{n}] dS,\end{aligned}\quad (8)$$

де  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні, а збурений тілом гідродинамічний тиск  $p_o$  визначено в жорстко зв'язаній системі координат.

Тиск  $p_o$  зручно розбити на дві складові, перша з яких залежить від потенціалу збуреного поля

швидкості  $\Phi_o$  лінійно, а друга має квадратичну залежність, так що в системі координат  $Oxyz$  будемо мати [36, 37]

$$\begin{aligned}p_o &= \tilde{p}_o + \Delta p_o; \\ \tilde{p}_o &= -\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} - (v_c - v_{wx}) \frac{\partial}{\partial x} \right] \Phi_o, \\ \Delta p_o &\simeq -\frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \Phi_o}{\partial s} + v_{ws} \right)^2 + \delta v^2 \right]; \\ v_{ws} &= (v_{wz} c_2 - v_{wy} c_3), \\ \delta v^2 &= [(v_{by} c_2 + v_{bz} c_3) + (v_c + v_{bx} - v_{wx}) c_1]^2 - \\ &\quad - (v_{wy}^2 + v_{wz}^2),\end{aligned}\quad (9)$$

де  $\partial \Phi_o / \partial s$  – дотична до контуру шпангоуту компонента збуреної швидкості в площині перерізу;  $n_s$  – проекція нормалі  $\vec{n}$  на площину поперечного перерізу тіла;  $c_1 = \cos(n, x)$ ,  $c_2 = \cos(n_s, y)$ ,  $c_3 = \cos(n_s, z)$ ,  $c_4 = [y \cos(n_s, z) - z \cos(n_s, y)]$  – напрямні косинуси нормалі до поверхні.

Слід зазначити, що основною в (9) є перша нестационарна складова  $\tilde{p}_o$ , тоді як друга квадратична складова тиску  $\Delta p_o$  має другий порядок малості і тому вона вносить загалом незначний вклад в головний вектор та головний момент сил Хаскінда-Ньюмана і може розраховуватися за більш спрощеною схемою.

Проекції швидкості точок тіла від коливань  $\vec{v}_b = (v_{bx}, v_{by}, v_{bz})$  з точністю до малих четвертого порядку по параметру  $\epsilon$  визначаються як

$$\begin{aligned}v_{bx} &= v_c + \dot{\xi}_0 - (\dot{\chi}_0 - \dot{\theta}_0 \psi_0)(y - y_G) + \\ &\quad + [\dot{\psi}_0 (1 - \frac{1}{2} \chi_0^2) + \dot{\theta}_0 \chi_0](z - z_G) + O(\epsilon^4), \\ v_{by} &= \dot{\eta}_0 + (\dot{\chi}_0 - \dot{\theta}_0 \psi_0)(x - x_G) - [\dot{\theta}_0 (1 - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\chi_0^2 + \psi_0^2)) - \dot{\psi}_0 \chi_0](z - z_G) + O(\epsilon^4), \\ v_{bz} &= \dot{\zeta}_0 - [\dot{\psi}_0 (1 - \frac{1}{2} \chi_0^2) + \dot{\theta}_0 \chi_0](x - x_G) + \\ &\quad + [\dot{\theta}_0 (1 - \frac{1}{2} (\chi_0^2 + \psi_0^2)) - \dot{\psi}_0 \chi_0](y - y_G) + \\ &\quad + O(\epsilon^4).\end{aligned}\quad (10)$$

Як видно, збурений гідродинамічний тиск визначається через потенціал швидкості  $\Phi_o$ , який, в свою чергу, задовільняє граничній задачі з нелінійними граничними умовами на рухомій та загалом невідомій хвильовій поверхні рідини та миттєвій зануреній поверхні тіла [3, 15, 21], що й створює основні труднощі при розрахунках даної категорії сил. В сучасних теоретичних дослідженнях для розв'язання даної задачі загалом використовуються методи граничних інтегральних рівнянь у поєднанні з числовими методами інтегрування

за часом та в просторі, але дана технологія є загалом трудовмісткою і досить нестійкою при числових розрахунках [21, 22, 25–27]. Тому в прикладних дослідженнях більш прийнятним є використання наближених методів розрахунку збурених тілом гідродинамічних навантажень. Один з таких наближених методів розрахунку сил Хаскінда-Ньюмана полягає в тому, що можна знехтувати нелінійними ефектами в граничних умовах на хвильовій поверхні, врахувавши тільки змінність самих поверхонь з часом [36, 37]. Тоді розрахунок даної категорії сил фактично може бути зведено, як і в лінійній задачі [4, 38], до визначення гідродинамічних коефіцієнтів М.Д. Хаскінда: прилучених мас та коефіцієнтів демпфірування, але в кожному момент часу для миттєвої зануреної частини тіла.

В рамках даного підходу головний вектор та головний момент гідродинамічних сил Хаскінда-Ньюмана в жорстко зв'язаній системі координат  $\vec{P}'_o, \vec{M}'_o$  можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{F}'_o(t) &= \mathbf{A}'_{\Sigma} \vec{F}_o, \quad \vec{F}_o = \int_{(L)} \vec{q}_o dx; \\ \vec{M}'_o(t) &= \mathbf{A}'_{\Sigma} \vec{M}_o + \mathbf{A}'_{\Sigma} [(\xi_0 - (\mathbf{A}'_{\Sigma} - \mathbf{I})\vec{x}'_G) \times \vec{F}_o]; \\ \vec{M}_o &= \int_{(L)} \vec{m}_o dx + \int_{(L)} [\vec{x}_o \times \vec{q}_o] dx, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\vec{x}_o = (x, 0, 0)$ ; інтенсивності гідродинамічних навантажень – силових  $\vec{q}_o \approx (0, q_{o2}, q_{o3})$  та моментних  $\vec{m}_o \approx (q_{o4}, 0, 0)$  визначаються формулами

$$\begin{aligned} q_{oj} &= \tilde{q}_{oj} + \Delta q_{oj}, \quad j = 2, 3, 4; \\ \tilde{q}_{oj} &\approx \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} - (v_c - \langle v_{wx} \rangle_j) \frac{\partial}{\partial x} \right] \int_{(C)} \Phi_o c_j ds, \quad (12) \\ \Delta q_{oj} &= \int_{(C)} \Delta p_o c_j ds. \end{aligned}$$

Тут  $C = C(x', t)$  – миттєвий занурений контур поперечного перерізу тіла та в залежностях (12) враховані тільки основні проекції розподілених навантажень, так як поздовжня проекція сили  $q_{o1}$  та проекції моменту  $q_{o5}, q_{o6}$  приблизно на два порядки менші врахованих. Більш детальні залежності для даної категорії сил наведені нижче при дослідженні подовжених однокорпусних тіл.

Зазначимо тільки, що для багатоелементних плаваючих тіл неможливо обійти питання гідродинамічної взаємодії між окремими підводними елементами. Для судна СМПВ при використанні гіпотези плоского обтікання формально мова повинна йти про гідродинамічну взаємодію при гармонічних коливаннях двох плоских контурів на поверхні рідини. В цьому випадку дійсно існують резонансні режими коливань, при яких гідродинамічна

взаємодія між контурами може бути сильною [39]. Але в дійсності потрібно мати на увазі, що при русі судна між його корпусами не можуть утворюватися системи хвиль, які забезпечують достатньо сильну взаємодію між корпусами. Тому в першому наближенні такою взаємодією можна знехтувати, суттєво спростивши таким чином розрахункові залежності.

Розглянемо тепер зосереджені зусилля на стернях управління та стабілізації руху. Ці стерня загалом можуть мати горизонтальне та вертикальне розташування і випробовувати поступальний рух та поперечні коливання в площині атаки в набігаючому потоці рідини. Площина атаки для горизонтальних стерен визначається кутами нахилу  $\theta_0$  та  $\chi_0$ , а для вертикальних – кутами  $\theta_0$  та  $\psi_0$ . При цьому кути  $\psi_0$  та  $\chi_0$  повинні враховуватися в загальний кут атаки горизонтального чи вертикального стерня відповідно. В площині атаки горизонтального стерня в нелінійному наближенні повний вектор швидкості набігаючого потоку  $v_a$  та повний кут атаки  $\alpha_a$  будуть

$$\begin{aligned} v_a &= (v_1^2 + v_3^2)^{1/2}, \quad \alpha_a = (\alpha_r + \psi_0 + \delta\alpha_a); \\ \delta\alpha_a &= \arctan(v_3/v_1), \end{aligned} \quad (13)$$

де  $(v_1, v_2, v_3) = \vec{v}_1 = \mathbf{A}'_{\theta\chi} (\vec{v}_c + \vec{v}_b - \vec{v}_w)$ ;  $\alpha_r$  – кут перекладання стерня;  $\delta\alpha_a$  – додатковий кут скосу потоку рідини в площині атаки за рахунок хитавиці та хвильового руху; всі залежності визначаються в точці розташування даного  $k$ -го стерня.

З повного набору зусиль на стерні в нестационарному потоці рідини [38, 40] виділимо тільки підіймальну силу при поздовжньому русі та силу опору при поперечних коливаннях стерня, вважаючи інші категорії сил порівняно незначними при дослідженні загальної динаміки тіла. Тоді для горизонтального стерня визначений раніше головний вектор зусиль на стерні в жорстко зв'язаній системі координат буде

$$\begin{aligned} \vec{F}'_r &= \mathbf{A}'_{\psi} \vec{F}_r^{\perp}, \quad \vec{F}_r^{\perp} \simeq \{0; 0; -\frac{1}{2}\rho S_r (C_L v_a^2 \times \\ &\times \text{sign}(\alpha_a) + C_D |v_3| v_3)\}, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $C_L$  та  $C_D$  – коефіцієнти сил підняття та опору, які можна знайти, наприклад, в [38, 40];  $S_r$  – площа стерня в плані.

Для вертикально розташованих стерен відповідні залежності будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} v_a &= (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}, \quad \alpha_a = (\alpha_r + \chi_0 - \delta\alpha_a), \\ \delta\alpha &= \arctan(v_2/v_1); \\ \vec{v}_1 &= \mathbf{A}'_{\theta\psi} (\vec{v}_c + \vec{v}_b - \vec{v}_w), \end{aligned} \quad (15)$$

та зусилля

$$\vec{F}'_r = \mathbf{A}_\chi^T \vec{F}_r^\perp, \quad \vec{F}_r^\perp \simeq \{0; -\frac{1}{2}\rho S_r (C_L v_a^2 \times \text{sign}(\alpha_a) + C_R |v_2| v_2); 0\}. \quad (16)$$

Таким чином, зусилля на стернях є суто нелінійними відносно повної швидкості набігаючого потоку, яка складається із швидкості поступального руху тіла  $v_c$ , швидкості його коливань  $\vec{v}_b$  та швидкості в набігаючих хвилях  $\vec{v}_w$ . Щодо зусиль на рушіях, то вони загалом постійні і зрівноважуються постійною складовою сил опору руху тіла в рідині; дисбаланс може з'явитися тільки при частковому чи повному оголенні рушія. В цьому випадку потрібно враховувати втрату діючої сили на рушіях.

Підстановка залежностей (6)–(16) в рівняння (4) дає змогу отримати остаточну систему нелінійних рівнянь, які описують коливання тривимірного багатоеlementного тіла на поверхні важкої рідини при дії на тіло регулярної системи хвиль скінченної амплітуди.

### 3. НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ ДЛЯ ПОДОВЖЕНОГО ТІЛА

Схема отримання рівнянь, що розглянута вище, не є єдиною можливою для подовжених плаваючих тіл, для яких має значення також подовження міцність корпусу. Для них можна запропонувати більш зручну форму отримання рівнянь коливань, використавши для цього умови рівності нуля внутрішніх зусиль у поперечних перерізах для кінців тіла як вільної безопорної балки. Для подовжених тіл типу корпусів суден їхня довжина в 8-10 разів більша за поперечні розміри і це дає змогу ввести до розгляду інтенсивності навантажень та внутрішні зусилля в поперечних перерізах тіла як балки, зокрема  $\vec{N}(x', t) = (N_1, N_2, N_3)$  та  $\vec{M}(x', t) = (M_1, M_2, M_3)$ , де  $N_1$  визначає подовжню силу,  $N_2, N_3$  – зрізуючі сили в напрямках вісей  $O'y'$  та  $O'z'$ ,  $M_1$  – скручувальний момент та  $M_2, M_3$  – вертикальний та горизонтальний згинальні моменти. Для довільних поперечних перерізів ці величини дорівнюють

$$\begin{aligned} \vec{N}(x', t) &= \int_{-L/2}^{x'} \vec{q}_\Sigma(\xi', t) d\xi', \\ \vec{M}(x', t) &= \int_{-L/2}^{x'} \vec{m}_\Sigma(\xi', t) d\xi' + \int_{-L/2}^{x'} [\delta \vec{\xi}' \times \vec{q}_\Sigma(\xi', t) d\xi', \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\vec{q}_\Sigma$  та  $\vec{m}_\Sigma$  – інтенсивності сумарних навантажень на корпус судна, приведені до вісі  $O'x'$ ;

$\delta \vec{\xi}' = ((\xi' - x'), 0, 0)$ . Використавши прийняте вище розділення навантажень на сили ваги, інерції маси, гідростатичну та хвильову компоненти сил Крилова-Фруда, лінійну та квадратичну компоненти сил Хаскінда-Ньюмана, а також додавши гідродинамічні навантаження від можливих коливань рідкого вантажу у частково заповнених відсіках судна  $\vec{q}_{sl}$ ,  $\vec{m}_{sl}$ , запишемо для сумарних навантажень

$$\begin{aligned} \vec{q}_\Sigma &= \vec{q}_{gr} + \vec{q}_{in} + (\vec{q}_h + \vec{q}_w) + \vec{q}_{sl} + (\vec{q}_o + \Delta \vec{q}_o), \\ \vec{m}_\Sigma &= \vec{m}_{gr} + \vec{m}_{in} + (\vec{m}_h + \vec{m}_w) + \vec{m}_{sl} + (\vec{m}_o + \Delta \vec{m}_o), \end{aligned} \quad (18)$$

де, нагадаємо, всі вектори визначені в жорстко зв'язаній системі координат.

Тоді умови динамічної рівноваги тіла як безопорної балки запишуться у вигляді

$$\vec{N}(L/2, t) = 0, \quad \vec{M}(L/2, t) = 0. \quad (19)$$

Визначивши всі складові в сумарних навантаженнях, підставивши їх в формули (17) та використавши умови (19), можна скласти систему рівнянь для подовженого тіла.

Отримаємо тепер залежності для складових у сумарних навантаженнях у рівняннях (18). Сила ваги елемента маси  $dm$  дорівнює  $dm \vec{g}' = dm \mathbf{A}_\Sigma^T \vec{g} = -dm g \vec{a}_3$ , а інтегрування по матеріальному поперечному перерізу дає наступні залежності для  $\vec{q}_{gr}$  та  $\vec{m}_{gr}$ :

$$\begin{aligned} \vec{q}_{gr}(x', t) &= -m(x') g \vec{a}_3, \\ \vec{m}_{gr}(x', t) &= -m(x') g [\vec{x}'_{g0}(x') \times \vec{a}_3], \end{aligned} \quad (20)$$

де  $m(x')$  – погонна маса тіла;  $\vec{x}'_{g0} = (0, y'_g, z'_g)$  – координата центру ваги в поперечному перерізі.

Сила інерції для елемента маси дорівнює  $-dm \vec{w}'_b = -dm \mathbf{A}_\Sigma^T \vec{w}_b$ , а інтегрування по матеріальному поперечному перерізу дає наступні залежності для інтенсивностей сил інерції  $\vec{q}_{in}$  та  $\vec{m}_{in}$ :

$$\begin{aligned} \vec{q}_{in}(x', t) &= -m(x') [\mathbf{A}_\Sigma^T \ddot{\vec{\xi}}_0 + \mathbf{A}_\Sigma^T \ddot{\mathbf{A}}_\Sigma (\vec{x}'_g(x') - \vec{x}'_G)], \\ \vec{m}_{in}(x', t) &= m(x') \{ [(\mathbf{A}_\Sigma^T \ddot{\vec{\xi}}_0) \times \vec{x}'_{g0}] - [(\mathbf{A}_\Sigma^T \ddot{\mathbf{A}}_\Sigma \vec{x}'_g) \times \vec{x}'_{g0}] + [(\mathbf{A}_\Sigma^T \ddot{\mathbf{A}}_\Sigma) \times \mathbf{R}'_g] \}, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $\vec{x}'_g = (x', y'_g, z'_g)$  та для скорочення запису використано псевдовекторний добуток двох матриць у вигляді

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{R}] = \vec{i} \sum_j (a_{2j} r_{j3} - a_{3j} r_{j2}) + \vec{j} \sum_j (a_{3j} r_{j1} -$$

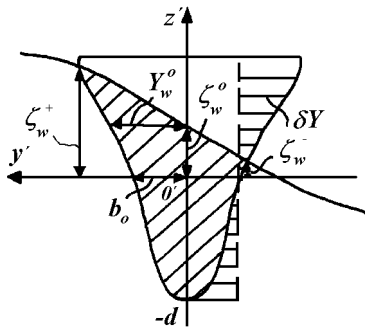


Рис. 3. Поперечний переріз однокорпусного судна;  $\delta Y$  - непрямобортна частина контуру,  $////$  - миттєва занурена площа перерізу

$$-a_{1j}r_{j3}) + \bar{k} \sum_j (a_{1j}r_{j2} - a_{2j}r_{j1}).$$

Матриця інерційних характеристик матеріального поперечного перерізу  $R'_g(x')$  має вигляд

$$\mathbf{R}'_g = \begin{pmatrix} 0 & x'y'_g & x'z'_g \\ 0 & r_{gy}^2 & r_{gyz} \\ 0 & r_{gyz} & r_{gz}^2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

де  $r_{gy}$ ,  $r_{gz}$ ,  $r_{gyz}$  - відповідні радіуси інерції маси в поперечному перерізі; для подовженого тіла вони на порядок менші за подовжній радіус інерції мас всього корпусу  $r_{Gx}$ .

Інтенсивності гідростатичних навантажень визначаються інтегральними характеристиками поперечного перерізу  $\Delta\omega$ ,  $\Delta s_{y,z}$  згідно з (7). Для виділення в даних величинах лінійної частини представимо далі рівняння контуру поперечного перерізу у вигляді

$$\begin{aligned} y' &= Y(x', z') = b_0(x') + \delta Y(x', z') = \\ &= b_0(x') + \sum_{m=1}^M b_m(x') z'^m, \quad M = 4 - 5, \end{aligned}$$

де  $b_0$  визначає напівширину корпусу по ватерлінії рівноваги, а  $\delta Y$  є непрямобортна частина його поверхні, яка і породжує нелінійні ефекти для даної категорії сил (рис. 3).

Тоді для величин  $\Delta\omega$ ,  $\Delta s_{y,z}$  можна отримати залежності

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 2[b_0\zeta_w^o + \delta\omega + \frac{1}{2}Y_w^o(\hat{\zeta}_w - \zeta_w^o)], \\ \Delta s_y &= \frac{2}{3}Y_w^o\hat{\zeta}_w, \quad \hat{\zeta}_w = \frac{1}{2}(\zeta_w^+ + \zeta_w^-); \\ \Delta s_z &= 2[\frac{1}{2}b_0\zeta_w^o{}^2 + \delta s_z + \frac{1}{3}(\hat{\zeta}_w^2 + 2\zeta_w^o\hat{\zeta}_w - \zeta_w^o{}^2)]; \\ \delta\omega &= \sum_m \frac{1}{m+1}b_m\zeta_w^o{}^{m+1}, \quad \delta s_z = \sum_m \frac{1}{m+2}b_m\zeta_w^o{}^{m+2}, \end{aligned} \quad (23)$$

де  $\zeta_w^+$ ,  $\zeta_w^-$  та  $\zeta_w^o$  є значення хвильового профілю по правому, лівому бортам та в діаметральній площині відповідно в жорстко зв'язаній системі координат;  $Y_w^o$  - напівширина корпусу при  $z' = \zeta_w^o$ ; дані величини визначаються для кожного моменту часу з наступної системи рівнянь:

$$\vec{x} = [\vec{\xi}_0 - (\mathbf{A}_\Sigma - I)\vec{x}'_G] + \mathbf{A}_\Sigma\vec{x}',$$

$$z = \zeta_w(x, y, t), \quad y' = \pm Y(x', z').$$

Розв'язок даної системи рівнянь потребує 2–3 ітерації для отримання практично прийнятних результатів. Підкреслимо також, що перший член у залежності для  $\delta\omega$  відповідає лінійному наближенню в визначенні нерівноваженої частини сил підтримання.

Інтенсивності хвильової складової сил Крилова-Фруда, які мають вигляд (7), можна спростити далі, проінтегрувавши по змінній  $y'$ . Тоді для проєкцій хвильових навантажень можна отримати наступні формули:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{wx} &= -\langle \frac{\partial \tilde{p}'_w}{\partial x'} Y \rangle^c + \frac{\partial}{\partial x'} \langle \tilde{p}'_w Y \rangle^c, \\ \tilde{q}_{wy} &= -\langle \tilde{p}'_w \rangle^k, \quad \tilde{q}_{wz} = -\langle \frac{\partial \tilde{p}'_w}{\partial z'} Y \rangle^c, \\ \tilde{m}_{wx} &= \langle \tilde{p}'_w z' \rangle^k - \frac{1}{2} \langle \frac{\partial \tilde{p}'_w}{\partial z'} Y^2 \rangle^k, \\ \tilde{m}_{wy} &= -\langle \frac{\partial \tilde{p}'_w}{\partial x'} z' Y \rangle^c + \frac{\partial}{\partial x'} \langle \tilde{p}'_w z' Y \rangle^c, \\ \tilde{m}_{wz} &= \frac{1}{2} (\langle \frac{\partial \tilde{p}'_w}{\partial x'} Y^2 \rangle^k - \frac{\partial}{\partial x'} \langle \tilde{p}'_w Y^2 \rangle^k), \end{aligned} \quad (24)$$

де використані позначення для симетричних та косиметричних інтегралів по вертикальній координаті  $z'$ :

$$\langle \dots \rangle^{c,k} = \int_{-d}^{\zeta_w^+} (\dots) dz' \pm \int_{-d}^{\zeta_w^-} (\dots) dz'.$$

Інтеграли повинні підраховуватися в кожний момент часу за допомогою числових процедур. При цьому основними є симетричні інтеграли і тому для подовженого тіла проєкції навантажень  $\tilde{q}_{wx}$  та  $\tilde{m}_{wy}$ ,  $\tilde{m}_{wz}$  загалом на один-два порядки менші за інші проєкції хвильової частини сил Крилова-Фруда.

Перейдемо тепер до інтенсивностей гідродинамічних сил Хаскінда-Ньюмана, загальні залежності для яких були отримані вище в формулах (12). Для їх розрахунку потрібно мати значення потенціалу збуреного тілом хвильового руху  $\Phi_o$  та збуреної дотичної до контуру швидкості  $\Phi_{os}$ , для



визначення яких необхідно розв'язувати нелінійну та нестационарну граничну задачу. Як було зазначено вище, наближений розв'язок даної задачі можна отримати, якщо знехтувати нелінійними граничними умовами на хвильовій поверхні, залишивши тільки ефекти змінності за часом даної поверхні та зануреної частини поверхні тіла. Крім того, подовженість корпусу тіла та порівняно велика довжина набігаючих хвиль дають змогу використати гіпотезу плоского обтікання поперечних контурів та звести задачу дифракції хвиль до більш простої задачі їх випромінення при плоских коливаннях контуру, що також значно спрощує розрахунки. Деталі даного методу можна знайти в роботах [36,37], так що обмежимося тільки суттєвими моментами. По-перше, змінність границь враховується за допомогою перетворення систем координат, зокрема, зсуву по вертикальній координаті  $\tilde{z} = z - \zeta_e$  та багатопараметричного конформного відображення для миттєвої зануреної частини плоского контуру поперечного перерізу. По-друге, для отримання розв'язку граничної задачі в параметричній площині з фіксованим колоподібним контуром використано класичний метод гідродинамічних особливостей Урсела [4, 41, 42], який не має таких недоліків, як, наприклад, наявність резонансних частот, що характерно для методів Франка чи граничних інтегральних рівнянь в лінійній гідродинаміці суден [41–43].

У результаті залежності для інтенсивностей сил Хаскінда-Ньюмана можна привести по формі до класичного вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{0j}(x', t) = & -\left[\frac{\partial}{\partial t} - (v_c - \langle v_{wx} \rangle_j) \frac{\partial}{\partial x}\right] \times \\ & \times \sum_r (\mu_{jr} \langle v_r \rangle_j + \lambda_{jr} \langle u_r \rangle_j); \end{aligned} \quad (25)$$

$j, r = 2, 3, 4,$

де  $\mu_{jr}(x', t)$  та  $\lambda_{jr}(x', t)$  – прилучені маси та коефіцієнти демпфірування для  $jr$  видів коливань, визначені для миттєвої зануреної частини поперечного перерізу тіла;  $\langle v_r \rangle_j$  є осереднені на зануреному контурі проекції відносних швидкостей, що дорівнюють

$$\begin{aligned} \langle v_2 \rangle_j = & \dot{\eta}_0 + (\dot{\chi}_0 - \dot{\theta}_0 \psi_0)(x - x'_G - \xi_0) + \\ & + (\dot{\theta}_0 - \dot{\psi}_0 \chi_0)(z'_G + \zeta_0) - \langle v_{wy} \rangle_j + O(\epsilon^4), \\ \langle v_3 \rangle_j = & \dot{\zeta}_0 - [\dot{\psi}_0(1 - \frac{1}{2}\chi_0^2) + \dot{\theta}_0 \chi_0](x - x'_G - \\ & - \xi_0) - (\dot{\theta}_0 - \dot{\psi}_0 \chi_0)\eta_0 - \langle v_{wz} \rangle_j + O(\epsilon^4), \\ \langle v_4 \rangle_j = & \dot{\theta}_0[1 - \frac{1}{2}(\chi_0^2 + \psi_0^2)] - \dot{\psi}_0 \chi_0 + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (26)$$

а  $\langle u_r \rangle_j$  є відповідні переміщення

$$\langle u_r \rangle_j = \int_0^t \langle v_r \rangle_j(t) dt, \quad r, j = 2, 3, 4.$$

В даних залежностях також  $\langle v_{wx} \rangle_j$  та  $\langle v_{wy,z} \rangle_j$  є відповідним чином осереднені на контурі поперечного перерізу тіла проекції поля хвильових швидкостей  $\vec{v}_w$

$$\begin{aligned} \langle v_{wx} \rangle_j \approx & \frac{\int_{(C)} v_{wx} c_j ds}{\int_{(C)} c_j ds}, \\ \langle v_{wy,z} \rangle_j \approx & \frac{\int_{(C)} v_{wy,z} \phi_j c_{2,3} ds}{\int_{(C)} \phi_j c_{2,3} ds}, \quad j = 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (27)$$

де  $\phi_j, j = 2, 3, 4,$  – потенціали швидкості при плоских коливаннях еліптичного контуру в безмежній рідині [4], які використані як вагові множники при осередненні хвильової швидкості на контурі.

Змінність гідродинамічних коефіцієнтів з часом як раз і враховує нелінійні ефекти в силах Хаскінда-Ньюмана, а присутність осереднених проекцій хвильової швидкості враховує дифракційні ефекти.

Нарешті, гідродинамічні навантаження від рідкого вантажу у внутрішніх відсіках тіла з вільною поверхнею можуть бути визначені методами, розробленими в роботах І.О. Луковського (див., наприклад, [32]). Дана категорія навантажень також носить суттєво нелінійний характер як із-за залежності характеру руху рідкого вантажу від коливань тіла, так і через нелінійні ефекти в самих коливаннях рідини в обмеженому об'ємі.

Отримані обома способами системи рівнянь зручно остаточно представити в канонічному для рівнянь механіки вигляді

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{u}} + 2\mathbf{\Lambda}\dot{\vec{u}} + \mathbf{K}\vec{u} = \vec{f}, \quad t > 0, \quad (28)$$

де  $\vec{u} = (\vec{\xi}_0, \vec{\theta}_0)$  – повний вектор переміщень;  $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}_1^6$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \{l_{ij}\}_1^6$ ,  $\mathbf{K} = \{k_{ij}\}_1^6$  – узагальнені (6 × 6) матриці інерції, демпфірування та жорсткості, елементи яких в нелінійному наближенні залежать від часу  $t$  та величин  $\vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}}; \vec{f} = \vec{f}(t; \vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}})$  – узагальнений вектор збуджувальних сил.

Кожний з елементів матриць можна представити у вигляді

$$e_{ij} = \{m_{ij}, l_{ij}, k_{ij}\} = e_{ij}^0 + \delta e_{ij}(t; \vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}}),$$

де  $e_{ij}^0$  відповідають лінійному наближенню, а  $\delta e_{ij}$  враховують нелінійні ефекти в системі "тіло-рідина".

Ефективне інтегрування системи рівнянь (28) можливе тільки числовими методами, оскільки основні співвідношення для елементів матриць у правій частині та для вектору збуджувальних сил не мають явного аналітичного виразу і повинні визначатися за допомогою інтегралів зі змінною верхньою межею, що залежить від переміщення тіла при коливаннях, чи в результаті розв'язання граничної задачі також зі змінними границями.

Відмітимо, що три види коливань у горизонтальній площині не мають в основному порядку відновлюючих сил і тому для них відсутні резонансні режими коливань; для решти коливань такі режими можливі, причому із-за нелінійних ефектів також можливі взаємні параметричні резонанси між вертикальними та бортовими коливаннями.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ ХИТАВИЦІ

Приведемо окремі результати числових розрахунків хитавиці суден і, зокрема, поздовжньої хитавиці однокорпусних суден на зустрічних курсах до хвиль Стокса скінченної амплітуди та двокорпусного судна типу СМПВ на хвилях малої амплітуди при довільних курсових кутах руху.

##### 4.1. Поздовжня хитавиця однокорпусних суден

В умовах інтенсивного шторму, коли на судно діють хвилі великої крутості, типово судно вимушено змінювати курсовий кут і рухатися зустрічним курсом до хвиль, щоб знизити до мінімуму поперечні види хитавиці, зокрема, небезпечну бортову хитавицю та відхилення від курсу. В цих умовах також значно знижується і швидкість руху судна з метою зменшення інтенсивності поздовжньої хитавиці та слемінгу і пов'язаних з ним ударних гідродинамічних навантажень на корпус. Тому далі наведено числові результати для найбільш важливого випадку поздовжньої хитавиці на зустрічних курсах при відносно помірних числах Фруда руху суден.

Розрахунки нелінійної хитавиці проводилися числовим методом за допомогою відповідної комп'ютерної програми для суден типу швидкісний контейнеровоз (судно С), суховантажник з традиційною формою корпусу (судно G) та багатотонажний нафторудовоз з повними обводами корпусу (судно В) при варіюванні відносної довжини  $\lambda_L = \lambda/L$  та крутості  $h_\lambda = h_w/\lambda$  набігаючих хвиль, швидкості руху судна по числу Фруда  $Fr = v_c/\sqrt{gL}$ , осадки на тихій воді (в повному ван-

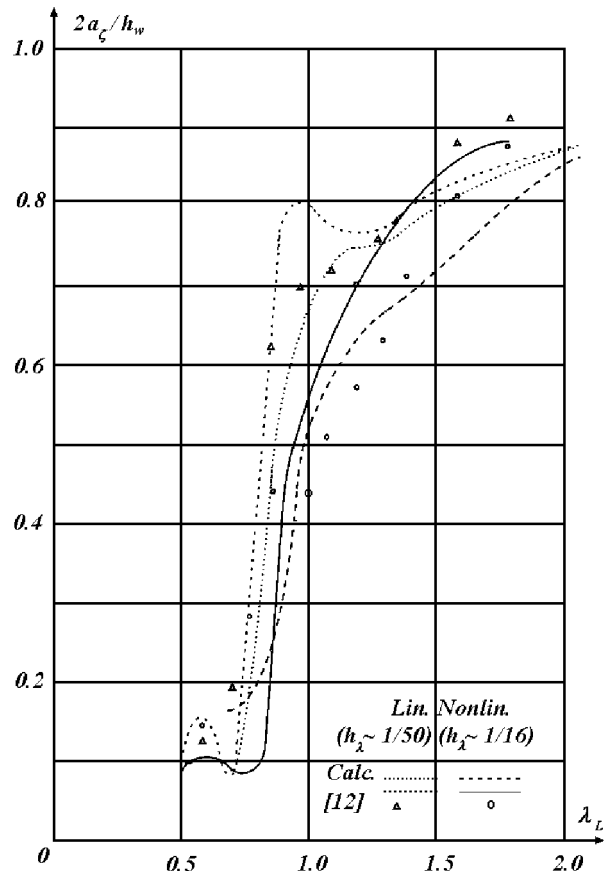


Рис. 4. АЧХ вертикальної хитавиці судна С; значками показані дані модельного експерименту за [12]

тажі та баласті) та розподілення маси по довжині судна. Числовий метод побудовано на ідеї локальної мінімізації зваженої середньоквадратичної похибки розв'язку системи рівнянь (28) (детальніше див. [36]). Числові розрахунки проводилися з числом кроків за період коливань  $N_{step} = 24$ , хоча для дослідження впливу даного фактору на числові результати тестові розрахунки виконувалися і при  $N_{step} = 12, 16, 24, 48$ . Прийнятні по хитавиці результати можна отримати навіть при числі кроків  $N_{step} = 12, 16$ , але для розрахунку внутрішніх зусиль у корпусі потрібно майже в два рази більше кроків за період коливань.

Зазначимо, що для суховантажника в випробувальному басейні DTNRDC (США) свого часу було проведено великий обсяг модельних експериментів [7, 8], а для контейнеровозу в роботах японських дослідників [10–12] були представлені дані числових розрахунків та модельних експериментів. Окремі приклади порівняння результатів, отриманих автором та незалежно згідно з [7, 12], наведені

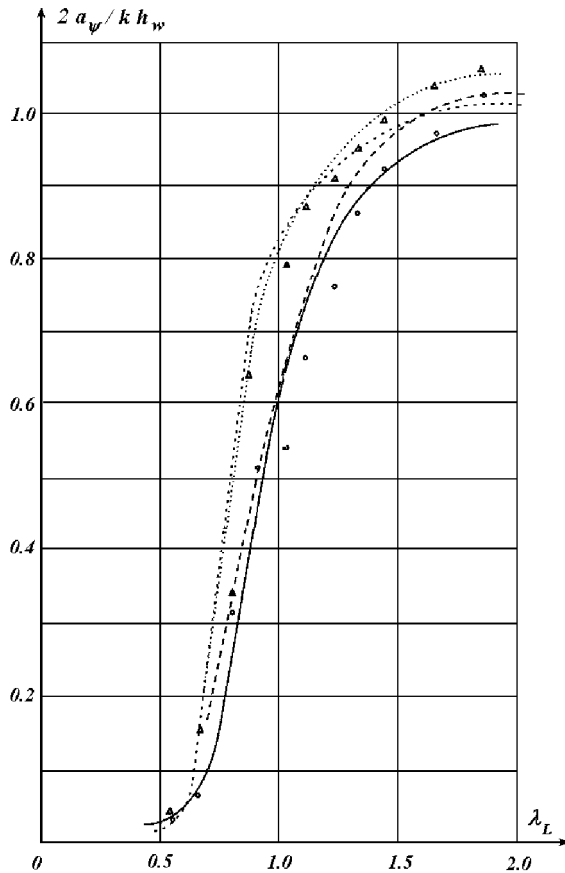


Рис. 5. АЧХ кильової хитавиці судна С; позначення, як і на рис. 4

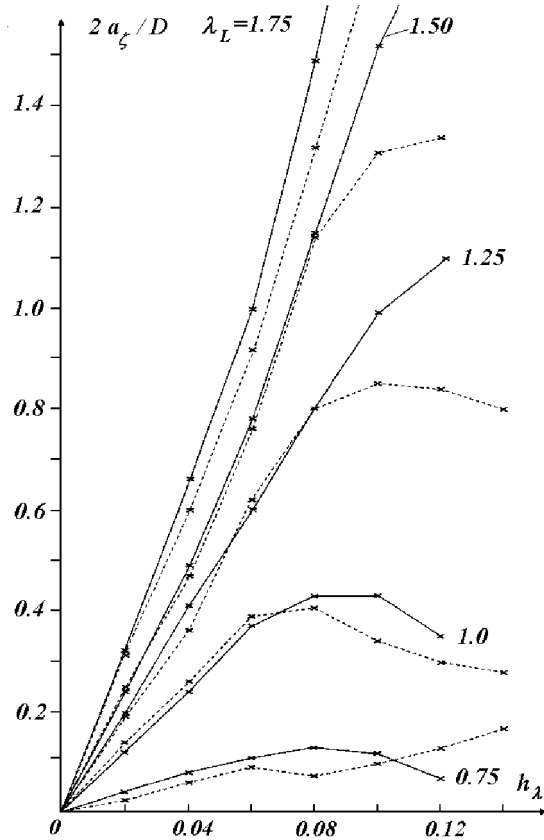


Рис. 6. Залежність піврозмахів вертикальної хитавиці від крутості хвиль для судна G; - - - розрахунки автора, — - модельний експеримент по [7];  $Fr = 0.13$

на рис. 4–8. Як видно, узгодження даних по напіврозмахам поздовжніх видів хитавиці контейнеровозу загалом добре. Більш значні розбіжності для суховантажника при крутості хвиль 1/12 і більше пов'язані з тим, що експериментальні дані в [7] остаточно апроксимувалися трипараметричними кривими, що не дозволило врахувати локальні особливості експериментальних залежностей.

На графіках рис. 9–12 наведені нормовані значення для додатніх (значок +) та від'ємних (значок -) амплітуд вертикальної  $\tilde{a}_\zeta^\pm = 2a_\zeta^\pm/D$  та кильової хитавиці  $\tilde{a}_\psi^\pm = La_\psi^\pm/D$  в залежності від крутості хвиль  $h_\lambda$  та при зміні інших параметрів розрахунків. Дані для поздовжньо-горизонтальної хитавиці не приведені через її слабкий вплив на параметри основних видів поздовжньої хитавиці. Також поза увагою залишені фазові зсуви хитавиці, оскільки для них вплив нелінійних ефектів виявився досить незначним.

Прокоментуємо представлені результати для амплітуд хитавиці. Для вертикальної хитавиці

найбільший вплив нелінійних ефектів випробовують додатні амплітуди  $\tilde{a}_\zeta^+$ ; при певній крутості хвиль в діапазоні  $h_\lambda = 0.04 - 0.06$  вони досягають максимуму та при подальшому зростанні крутості дані амплітуди навіть починають зменшуватися. Більш детально: збільшення швидкості руху судна (рис. 9) збільшує лінійне значення залежності для  $\tilde{a}_\zeta^+(h_\lambda)$  та зсуває положення максимумів у бік менших крутостей хвиль. Радикальним чином впливає осадка судна на тихій воді. Порівняння залежності  $\tilde{a}_\zeta^+(h_\lambda)$  для нафторудовоза в повному вантажі та в баласті показує (рис. 10), що суттєво впливає низький надводний борт та занурення носової кінцівки судна на редукцію додатніх амплітуд. Далі, збільшення поздовжнього радіуса інерції мас судна, тобто перерозподілення маси судна до кінцівок (рис. 11), збільшує амплітуду на лінійному участку залежності  $\tilde{a}_\zeta^+(h_\lambda)$ , але мало впливає на величину фізичного максимуму-

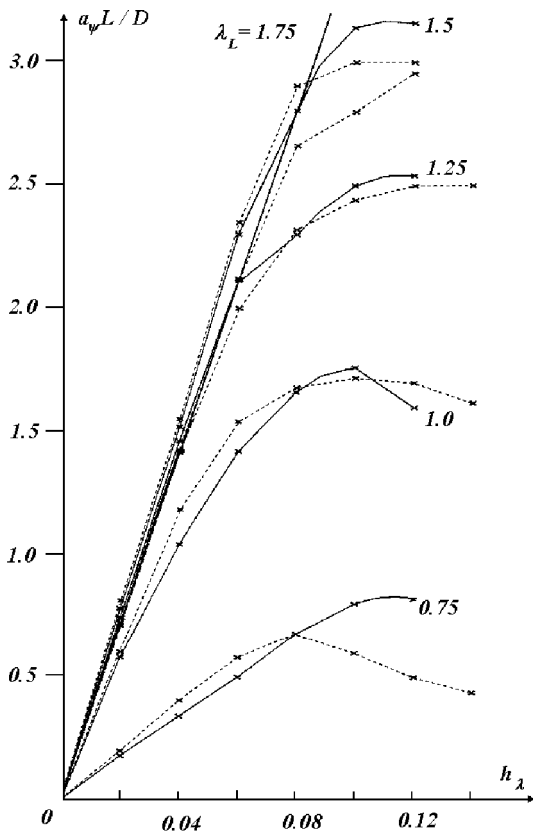


Рис. 7. Залежність піврозмахів кильової хитавиці від крутості хвиль для судна G; - - - розрахунки автора, — - модельний експеримент по [7];  $Fr = 0.13$

му, зсуваючи його тільки в бік менших крутостей хвиль. Тип судна також суттєво впливає на величину та положення максимумів для додатніх амплітуд (рис. 12). Таким чином, для додатніх амплітуд вертикальної хитавиці при певних умовах може досягатися фізичний максимум амплітуд з можливим їх зменшенням при подальшому зростанні крутості хвиль.

Для від'ємних амплітуд вертикальної хитавиці якісна картина загалом інша; ці амплітуди не досягають максимумів у розрахунковому діапазоні параметрів, а зміна параметрів призводить тільки до зростання ступеню "м'якої" нелінійності в залежності  $\tilde{a}_\zeta^-(h_\lambda)$ . Хоча при зменшенні осадки нафторудовоза зворотно "м'яка" нелінійність змінюється на "жорстку". Загалом по всім результатам розрахунків нелінійні ефекти можуть проявлятися при крутості хвиль порядку  $1/25$  і більше і, головним чином, для додатніх амплітуд у вертикальній хитавиці суден.

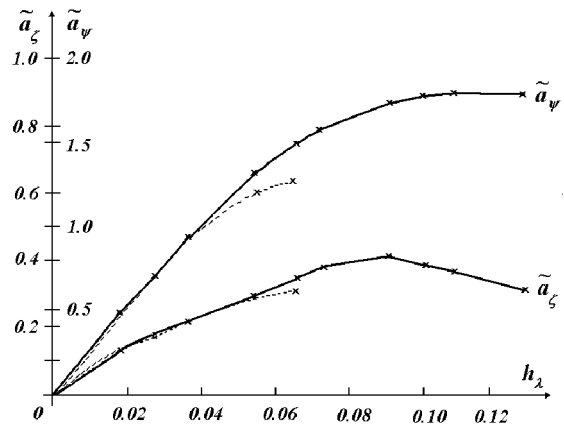


Рис. 8. Залежність піврозмахів поздовжньої хитавиці від крутості хвиль для судна G; — - розрахунки автора, - - - - модельний експеримент по [12];  $Fr = 0.15, \lambda_L = 1.0$

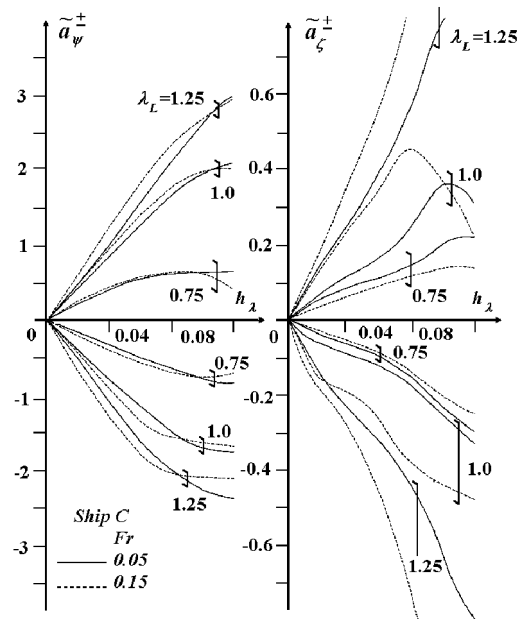


Рис. 9. Амплітуди хитавиці для судна C; вплив швидкості руху судна

Розглянемо тепер результати розрахунків для амплітуд кильової хитавиці  $\tilde{a}_\psi^\pm$ . По всій сукупності даних видно, що для них характерна "м'яка" нелінійність у залежності від крутості хвиль. При цьому збільшення швидкості руху судна відносно

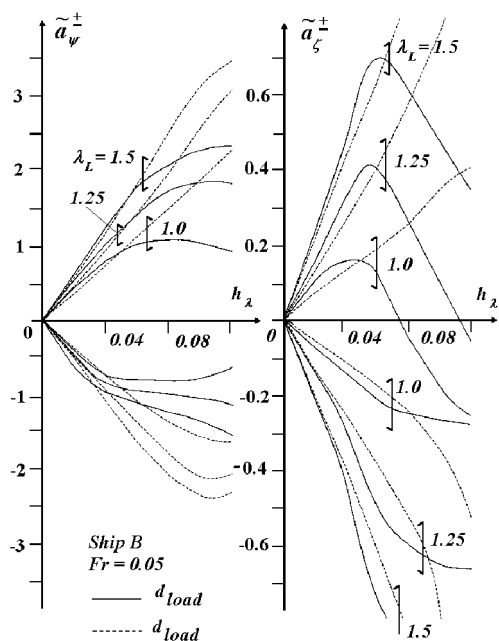


Рис. 10. Амплітуди хитавиці для судна В; вплив осадки на тихій воді (вантаж, баласт)

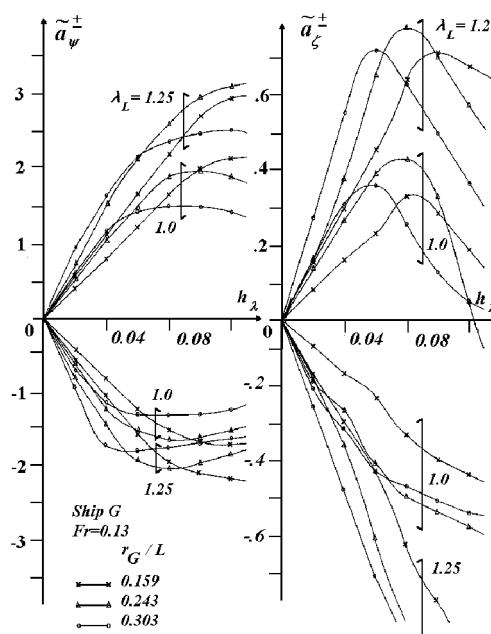


Рис. 11. Амплітуди хитавиці для судна G; вплив розподілення маси по довжині судна

мало впливає на амплітуди кильової хитавиці, але зміна осадки з баластної до вантажної (збільшення приблизно в два рази) суттєво знижує амплітуди нафторудовоза, починаючи з крутості хвиль  $1/24$  та більше. Причому, від'ємні амплітуди досягають при цьому фізичного максимуму. Нарешті, зменшення висоти надводного борту та збільшення повноти судна (по коефіцієнту повноти корпусу з  $\delta = 0.57$  для судна С до  $\delta = 0.82$  для судна В) також посилює редуційні ефекти в амплітудах кильової хитавиці суден.

Таким чином, наведені вище результати числових розрахунків поздовжньої хитавиці суден різних типів на періодичних хвилях Стокса скінченної амплітуди з крутістю від  $1/50$  до  $1/7$  загалом вказують на помітний вплив нелінійних ефектів на амплітуди процесів поздовжніх коливань суден, причому основним слід вважати ефект редуції амплітуд по відношенню до лінійних значень. Ефекти редуції збільшуються при зростанні 1) швидкості руху суден, 2) величини поздовжнього радіуса інерції мас, 3) осадки суден та повноти корпусу. Дуже важливу роль при цьому відіграють явища оголення та повного занурення носової кінцівки корпусу в хвилі.

#### 4.2. Хитавиця судна типу СМПВ

При розрахунках хитавиці багатокорпусного судна типу СМПВ було вибрано судно NAVATEK з двома підводними корпусами та чотирма стояками, для якого в роботі [44] було представлено дані числових розрахунків хитавиці. Наведемо спочатку порівняльні дані по частотах власних коливань суден типу СМПВ різної тонажності (рис. 13). По-перше, як видно, отримані нами дані для СМПВ NAVATEK загалом добре співпадають з осередненими даними для близьких по тонажності суден даного типу. По-друге, власні періоди кутових нахилень в 10-15 с відповідають однокорпусним суднам з водотонажністю  $\sim 10^3$  тон та більше. Тому для суден типу СМПВ резонансні режими коливань можливі на хвилях з  $\lambda/L \sim 2 - 4$ , а не на хвилях з  $\lambda/L \sim 1$ , як це має місце для традиційних суден [45].

АЧХ лінійних видів коливань СМПВ NAVATEK представлені на рис. 14, а АЧХ кутових видів коливань – на рис. 15 в залежності від періоду набігаючих хвиль та для двох варіантів швидкості руху 0 та 15 вузлів і при курсових кутах  $\alpha_c = 0^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ .

Порівняння результатів розрахунків для вертикальної та кильової хитавиць СМПВ NAVATEK показує на досить значні розбіжності, особливо

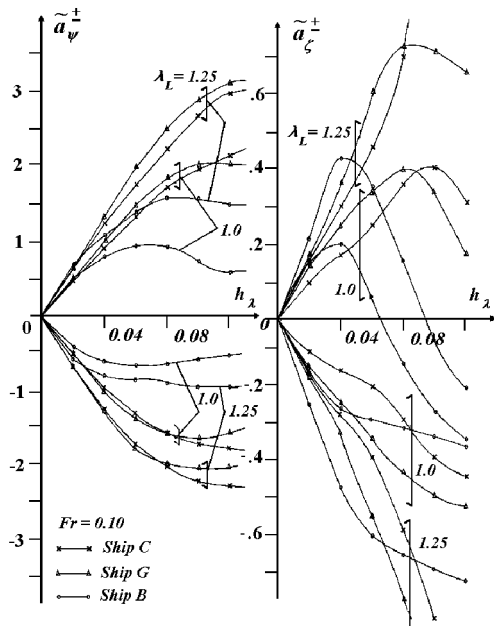


Рис. 12. Амплітуди хитавиці для суден В,С,Г; вплив типу судна (форми корпусу)

для резонансної частотної смуги та при русі судна. Для даних умов велике значення має коректне визначення коефіцієнтів демпфірування, достатньо малих для суден типу СМПВ, та робота систем стабілізації поздовжньої хитавиці за допомогою носових та кормових крил управління. В розрахунках автора була врахована тільки хвильова складова сил демпфірування (за спрощеною схемою визначення) та повністю не врахована робота системи крил стабілізації. Тому дані результати слід розглядати як попередні, що можуть скласти основу для подальшого узагальнення алгоритмів та програм розрахунків динаміки та міцності суден типу СМПВ.

## ВИСНОВКИ

1. Коректне математичне моделювання коливань твердого тіла на поверхні важкої рідини при дії системи хвиль скінченої амплітуди потребує врахування нелінійних ефектів як в динаміці руху тіла, так і, головним чином, в гідродинаміці руху рідини та гідродинамічних навантажень на тіло. При цьому найбільші труднощі виникають при нелінійному отриманні гідродинамічних сил Хаскінда-Ньюмана, які враховують збурення, що вно-

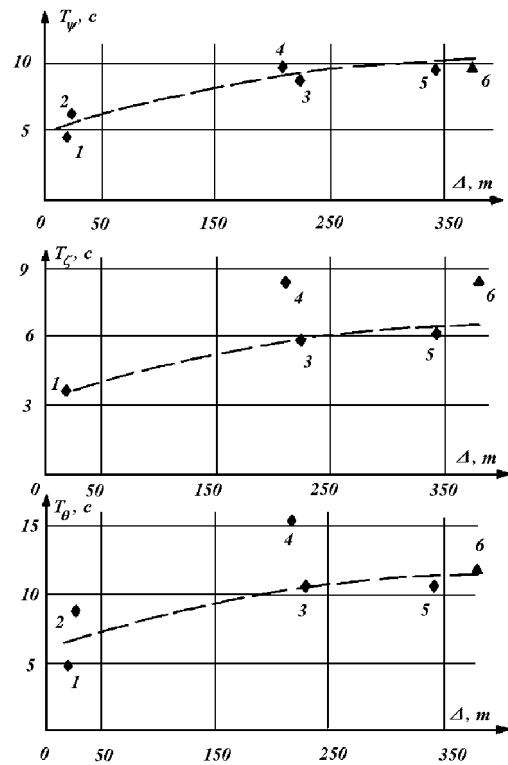


Рис. 13. Власні періоди хитавиці ряду суден типу СМПВ: 1 – MARINE ACE, 2 – MARINE WAVE, 3 – KOTOZAKI, 4 – KAIMALINO, 5 – SEAGULL, 6 – розрахунок для NAVATEK; - - - прогноз для судна KOTOZAKI

суть судно за рахунок хитавиці та дифракції набігаючих хвиль. Один з наближених методів їх розрахунку оснований на використанні узагальнених гідродинамічних характеристик – прилучених мас та коефіцієнтів демпфірування для миттєвої зануреної в хвилі частини тіла. Інша категорія гідромеханічних сил – сил Крилова-Фруда – визначається більш простим інтегруванням незбуреного тілом хвильового тиску по миттєвій зануреній поверхні тіла.

2. Оскільки геометрія поверхні тіла відіграє важливу роль при визначенні гідромеханічних навантажень, то були розглянуті а) багатоелементні тіла, що складаються з подовжених елементів (на прикладі судна з малою площиною ватерлінії) та б) однокорпусні подовжені тіла типу звичайних морських суден. При цьому для тривимірних багатоелементних тіл рівняння коливань зручно отримати, виходячи з відомих рівнянь у формі Ейлера для лінійних переміщень та куткових нахилень тіла при коливаннях. У той же час для подовжених тіл,

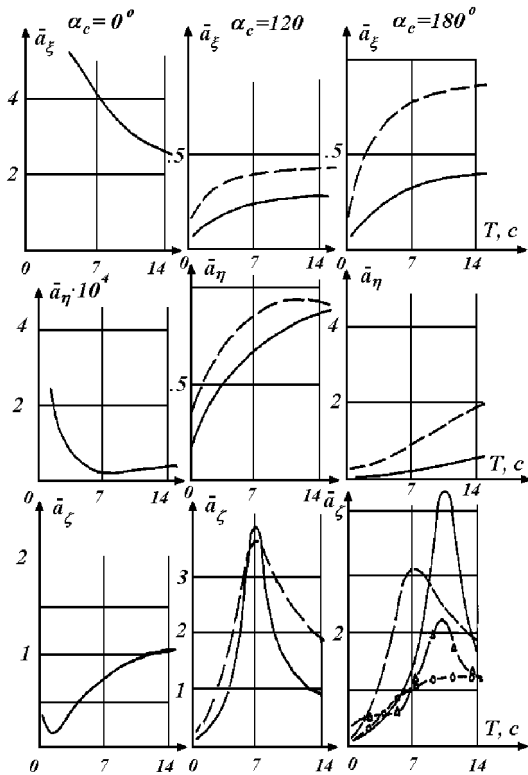


Рис. 14. АЧХ лінійних видів хитавиці судна NAVATEK; - - -  $v_c = 0$ , —  $v_c = 15$  вузл.,  $O$  - - -  $O$ ,  $\Delta$  - - -  $\Delta$  - розрахунки по [44]; всі амплітуди нормовані на амплітуду набігаючих хвиль

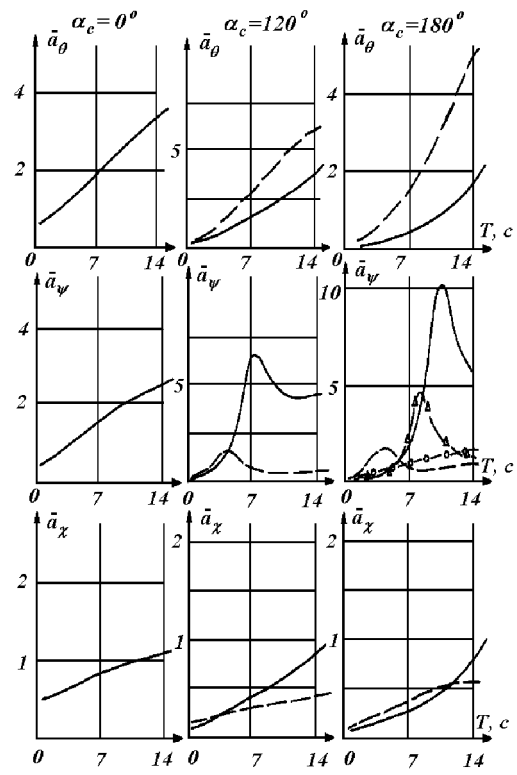


Рис. 15. АЧХ кутових видів хитавиці судна NAVATEK; - - -  $v_c = 0$ , —  $v_c = 15$  вузл.,  $O$  - - -  $O$ ,  $\Delta$  - - -  $\Delta$  - розрахунки по [44]; всі амплітуди нормовані на крутість хвильового профілю.

для яких має значення також поздовжня міцність корпусу, зручно ввести до розгляду інтенсивності навантажень та внутрішні зусилля в поперечних перерізах тіла і отримувати рівняння коливань з умови врівноваженості внутрішніх зусиль у кінцевих перерізах тіла як безопорної балки.

3. Отримані тим чи іншим способом нелінійні рівняння коливань остаточно раціонально привести до канонічного для механіки вигляду з узагальненими матрицями інерції, демпфірування і жорсткості та вектором збуджувальних сил, елементи яких залежать від вектору невідомих переміщень тіла. При цьому в більшості дані залежності визначаються квадратурами зі змінними верхніми межами і тому практично єдиним методом інтегрування рівнянь слід вважати числові методи.
4. Числові розрахунки поздовжньої хитавиці звичайних однокорпусних суден на зустрічних хвилях скінченної амплітуди показали, що суттєво нелінійні ефекти починають проявляти-

ся в амплітудах хитавиці при крутості хвиль порядку  $1/16$  і більше, причому дана межа може зменшитися до  $1/24$  при зростанні швидкості руху суден, зменшенні висоти надводного борту та збільшенні поздовжнього радіусу інерції маси судна. Зокрема, значний редуючий вплив на амплітуди мають ефекти оголення та повного занурення носової кінцівки корпусу в хвилі. Вплив нелінійних ефектів на фази процесів хитавиці виявився загалом незначним і призводив до їх монотонної зміни при зростанні крутості хвиль.

5. Розрахунки динамічних характеристик судна типу СМПВ показали, що даний тип суден має знижені частоти і коефіцієнти демпфірування власних коливань та інтенсивності збуджувальних сил. Тому резонансні режими хитавиці, при яких розвиваються значні амплітуди коливань, можуть мати місце або на попутних курсових кутах, або на відносно довгих хвилях та в вузькій резонансній смузі. Все це призводить до зменшення впливу нелінійних ефектів на хитавицю для даного типу суден.

Важливим при цьому є врахування ефектів в'язкого та вихорового опору та роботи систем управління і стабілізації судна за допомогою спеціальних крил.

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели.– М.: Наука, 1977.– 408 с.
2. Прикладная гидромеханика / Сб. научн. тр.- под ред. Гринченко В.Т.: АН УССР, Ин-т гидромех.– К.- Наук. думка,- 1989.– 256 с.
3. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости.– М.: Наука, 1977.– 815 с.
4. *Хаскинд М.Д.* Гидродинамическая теория качки корабля.– М.: Наука, 1973.– 327 с.
5. *Яглом А.М.* Введение в теорию стационарных случайных процессов // УФН.– 1952.– VII, в. 5(51).– С. 4-168.
6. *Ochi M., Bolton W.* Statistics for Prediction of Ship Performance in a Seaway // Intern. Shipb. Progr.– 1973.– 20, N 222, 224, 229.– P. 1-128.
7. *Dalzell J.F.* An investigation of midship bending moments experienced in extreme regular waves by models of the MARINER type ship and three variants. SSC Report // Washington, USA.– 1964, N 155.– P. 56.
8. *Maniar N.M.* Investigation of bending moments within the midship half-length of a MARINER model in extreme waves. SSC Report // Washington, USA.– 1964, N 163.– P. 22.
9. *Mansour A.E., Wasson J.-P.* Charts for Estimating Nonlinear Hogging and Sagging Bending Moments // J. Ship Resch.– 1995.– 39, N 3.– P. 240-249.
10. *Fukasawa T., Yamamoto Y. et al.* Motion and Longitudinal Strength of Ship in Head Seas and the Effects of Nonlinearities (4-th Report) // Nav. Arch. and Ocean Engng.– 1982.– 20.– P. 113-119.
11. *Yamamoto Y., Fujino M., Fukasawa T.* Motion and Longitudinal Strength of a Ship in Head Sea and the Effects of Non-Linearities // Naval Arch. and Ocean Engng.– 1980.– 18.– P. 91-100.
12. *Yamamoto Y., Fukasawa T., Arai M., Kajita E.* Non-linear effects for ship motion in head seas // Int. Shipb. Progr.– 1982.– 29, N 333.– P. 118-124.
13. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.– М.: Физматгиз, 1958.– 408 с.
14. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде.– М.: ИЛ, 1959.– 617 с.
15. *Луговский В.В.* Гидродинамика нелинейной качки судов.– Л.: Судостроение, 1980.– 256 с.
16. *Ремез Ю.В.* Продольная качка судов.– Автореф. диссерт. ... докт. техн. наук: 05.08.01: ОИИМФ, Одесса, 1967.– 43 с.
17. *Higo Y., Nakamura I.* A Study on the Non-Linear Hydrodynamic Forces Acting on a Two-Dimensional Body Oscillating with Large-Amplitude on a Free Surface // J. Kansai Soc. Naval Arch. Japan.– 1985.– N 196.– P. 71-78.
18. *Kyozuka Y.* Non-Linear Hydrodynamic Forces Acting on Two-Dimensional Bodies // Naval Arch. and Ocean Engng.– 1983.– 21.– P. 23-40.
19. *Chiu F.-C., Fujino M.* Nonlinear prediction of vertical motions and wave loads of high-speed crafts in head sea // Int. Shipb. Progr.– 1989.– 36, N 406.– P. 193-232.
20. *Fang M.-C., Her S.-S.* The Nonlinear SWATH Ship Motion in Large Longitudinal Waves // Int. Shipb. Progr.– 1995.– 42, N 431.– P. 197-220.
21. *Vinje T., Brevig P.* Nonlinear Ship Motion // Third Int. Conf. Numer. Ship Hydrodyn.– Paris, France, 1981.– P. 257-266.
22. *Isaacson M., Hung J.Y.T.* Time-Domain Second-Order Wave Radiation in Two Dimensions // J. Ship Resch.– 1993.– 37, N 1.– P. 25-33.
23. *Takagi K., Naito S., Nakamura S.* Computation of Nonlinear Hydrodynamic Forces on Two-Dimensional Body by Boundary Element Method // J. Kansai Soc. Naval Arch. Japan.– 1985.– N 197.– P. 31-38.
24. *Berkvens P.J.F., Zandbergen P.J.* Nonlinear Reaction Forces on Oscillating Bodies by a Time Domain Panel Method // J. Ship Resch.– 1996.– 40, N 4.– P. 288-302.
25. *de Kat J.O.* The Numerical Modelling of Ship Motion and Capsizing in Severe Seas // J. Ship Resch.– 1988.– 32, N 4.– P. 289-301.
26. *Kving D., Sclavounos P.D.* Numerical Stability Analysis for Time Domain Ship Motion Simulations // J. Ship Resch.– 1995.– 39, N 4.– P. 313-320.
27. *Sen D.* Numerical Simulation of Motions of Two-Dimensional Floating Bodies // J. Ship Resch.– 1993.– 37, N 4.– P. 307-330.
28. *Семенов-Тяньшанский В.В., Благовещенский С.В., Холодильник А.Н.* Качка корабля.– Л.: Судостроение, 1969.– 392 с.
29. *Парс Л.* Аналитическая динамика.– М.: Наука, 1971.– 636 с.
30. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров).– М.: Наука, 1970.– 720 с.
31. *Сердюченко А.Н., Румянцева И.Б.* Гидродинамические характеристики волн Стокса, близких к предельным // Судостроение: Респуб. межвед. научн. - техн. сб.– Киев-Одесса: Вища школа.– 1987.– Вып. 36.– С. 19-23.
32. *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость.– К.: Наук. думка, 1990.– 296 с.
33. *Hope J.P.* Naval Force Vessels. Theory and Practice with Naval Engineering Challenges for the 1990s // Marine Technol.– 1991.– 28, N 4.– P. 224-235.
34. *Lavis D.R., Rogalsky W.W., Spaulding K.B.* The Promise of Naval Vehicles for NATO // Marine Technol.– 1990.– 27, N 2.– P. 65-93.
35. *Sicora J., Dinsbacher A.L.* SWATH Structure. Navy Research and Development Applications // Marine Technol.– 1990.– 27, N 4.– P. 211-220.
36. *Сердюченко А.Н.* Динамика морских волн и судна в шторме с учетом нелинейных эффектов // Прикладна гідромеханіка.– 1998.– 72.– С. 112-135.
37. *Сердюченко А.Н., Федоренко Г.Ф.* Нагрузки и гидродинамические коэффициенты судовых контуров с учетом их мгновенного положения на волновой поверхности // Прикладна гідромеханіка.– 2001.– 75, N 1.– С. 12-23.
38. *Principles of Naval Architecture. Volume III. Motions in Waves and Controllability* // Publ. by SNAME.– NY, 1989.– P. 429.



39. *Прикладные задачи динамики судов на волнении* / Под редакцией И.К.Бородая.– Л.: Судостроение, 1987.– 363 с.
40. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости.– М.: Наука, 1979.– 536 с.
41. *Bishop R.E.D., Price W.G., Temarel P.* Hydrodynamic coefficients of some swaying and rolling cylinders of arbitrary shape // *Int. Shipb. Progr.*– 1980.– **27**, N 307.– P. 54-65.
42. *Inglis R.B., Price W.G.* Irregular frequencies in three dimensional source distribution techniques // *Int. Shipb. Progr.*– 1981.– **28**, N 319.– P. 57-62.
43. *Mei C.C.* Numerical methods in water-wave diffraction and radiation // *Ann. Rev. Fluid Mech.*– 1978.– **10**.– P. 393-416.
44. *Seldl L.H., Clifford W.f., Cumming J.P.* Design and Operational Experience of the SWATH Ship NAVATEK I // *Marine Technol.*– 1993.– **30**, N 3.– P. 155-171.
45. *Hong Y.S.* Heave and Pitch Motions of SWATH Ships // *J. Ship Resch.*– 1986.– **30**, N 1.– P. 12-25.