НОВІ МЕТОДИ
В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ
ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 517.94

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНОГО ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ю.Є. БОХОНОВ

Запропоновано підхід до знаходження періодичних розв’язків квазілінійного диференціального рівняння другого порядку, який базується на побудові функції Гріна для диференціального оператора, що визначений на функціях, які задовольняють періодичним крайовим умовам. Наведено необхідні та достатні умови існування періодичних розв’язків рівняння.

ВСТУП

Для знаходження періодичних розв’язків нелінійного диференціального рівняння другого порядку і взагалі систем диференціальних рівнянь широко застосовують чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка, який викладено в роботах [1]–[4]. При цьому рівняння другого порядку зводилось до системи рівнянь першого порядку. Автором цієї статті було розроблено власний підхід, який не потребує зведення нелінійного рівняння другого порядку до системи першого порядку [5]. У цій роботі зазначений метод застосовується до квазілінійних рівнянь. Будується функція Гріна періодичної крайової задачі, яка в цьому випадку має більш зручний вигляд, ніж у [5]. Наводяться оцінки для констант Ліпшиця та необхідні і достатні умови для початкового наближення в методі послідовних наближень, що забезпечують існування періодичного розв’язку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай функція $f(t,x,y)$ неперервна на $D=(-\infty,\infty)\times[-a,a]\times[-b,b]$, періодична по t з періодом T. Позначимо

$$M=\max_{D}\left|f(t,x,y)\right|. \qquad (1)$$

Від функції $f(t,x,y)$ будемо вимагати, щоб вона по x,y задовольняла умові Ліпшиця

$$\left|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\right|\le K_0\left|x_1-x_2\right|+K_1\left|y_1-y_2\right|. \qquad (2)$$

Знаходження періодичних розв'язків диференціального рівняння

$$\ddot{x}+\omega^2 x = f(t,x,\dot{x})\,, \tag{3}$$

де $\dfrac{2\pi}{\omega T}\notin Z$ еквівалентне розв'язанню крайової задачі

$$x(0)=x(T),\;\; \dot{x}(0)=\dot{x}(T) \tag{4}$$

для рівняння (3).

ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ ГРІНА

Розглянемо диференціальний оператор $(Lx)(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2 x(t)$ у гільбертовому просторі $H=L_2(0,T)$, область визначення якого — це функції, що мають абсолютно неперервну першу похідну та задовольняють крайовим умовам (4). Як відомо, такий оператор є самоспряженим. Задача знаходження періодичних розв'язків зводиться до задачі обернення оператора L. Легко бачити, що цей оператор має обернений, оскільки $\lambda=0$ не є його власним числом.

Нехай x — розв'язок задачі (3)–(4). Інтегруючи обидві частини (3), враховуючи умови (4), будемо мати

$$\omega^2\int_0^T x(\tau)d\tau \int_0^T f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))d\tau$$

або

$$\int_0^T \Big(f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))-\omega^2 x(\tau)\Big)d\tau=0\,. \tag{5}$$

Побудуємо оператор, обернений до L у просторі $H=L_2(0,T)$.

Для побудови вказаного оберненого оператора будемо використовувати модифікацію методики з [6].

Візьмемо фундаментальну систему $x_1(t)\equiv\cos\omega t,\; x_2(t)\equiv\dfrac{\sin\omega t}{\omega}$ розв'язків рівняння $\ddot{x}=0$, які задовольняють умові $x_i^{(j-1)}(0)=\delta_{i,j}$ $(i=1,2;\; j=1,2)$, де $\delta_{i,j}$ — функція Кронекера. Нехай $h\in H$, яка задовольняє умові (5). Розглянувши рівняння $(L\,x)(t)=h(t)$, знайдемо обернений оператор L^{-1}. Тоді функція $x(t)=(L^{-1}\,h)(t)$ буде задовольняти цьому рівнянню та крайовим умовам (4). Покажемо, що оператор L^{-1} інтегральний і знайдемо його ядро $G(t,\tau)$ — функцію Гріна цього оператора. Застосовуючи метод варіації довільних сталих, після стандартних дій знаходимо: $x(t)=\int_0^T G(t,\tau)h(\tau)d\tau$, де функція Гріна:

$$G(t,\tau)=\frac{1}{\omega}\begin{cases}\sin\omega t\cos\omega\tau, & 0\le\tau\le t\le T;\\ \cos\omega t\sin\omega\tau, & 0\le t\le\tau\le T.\end{cases} \tag{6}$$

Звідси знаходимо: $x'(t) = \int\limits_0^T G_t'(t,\tau)\, h(\tau)\, d\tau$, де

$$G_t'(t,\tau) = \begin{cases} \cos\omega t \cos\omega\tau, & 0 \le \tau \le t \le T; \\ -\sin\omega t \sin\omega\tau, & 0 \le t \le \tau \le T. \end{cases} \qquad (7)$$

Отже, розв'язок крайової задачі для рівняння (3) та його похідну можна подати у вигляді:

$$x(t) = \int\limits_0^T G(t,\tau)\, f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\ d\tau, \qquad (8)$$

$$\dot{x}(t) = \int\limits_0^T G_t'(t,\tau)\, f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\ d\tau. \qquad (9)$$

Система (8)–(9) розв'язується методом послідовних наближень. Якщо процес збігається, одержуємо розв'язок $x = \varphi(t, x_0)$, де x_0 — початкове наближення, який при підстановці в (8)–(9) перетворює його в тотожність. Для того, щоб цей розв'язок був також розв'язком (3), очевидно, що необхідно і разом із виконанням умов (4) достатньо, щоб виконувалась умова

$$\int\limits_0^T \Big(f(\xi, \varphi(\xi, x_0), \dot{\varphi}(\xi, x_0)) - \omega^2 \varphi(\xi, x_0) \Big) d\xi = 0, \qquad (10)$$

тобто, щоб число x_0 було коренем цього рівняння.

Перепишемо систему (8)–(9) згідно з (6)–(7) та знайдемо умову збіжності ітераційного процесу під час її розв'язання:

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\Bigg(\int\limits_0^t \sin\omega t \cos\omega\tau\, f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau\ + \\ + \int\limits_t^T \cos\omega t \sin\omega\tau\, f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \Bigg), \qquad (11)$$

$$x'(t) = \int\limits_0^t \cos\omega t \cos\omega\tau\, f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau\ - \\ - \int\limits_t^T \sin\omega t \sin\omega\tau\, f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau. \qquad (12)$$

Введемо в просторі $\mathbf{R}^2$ «псевдонорму»: $|(x_1, x_2)| = \big(|x_1|, |x_2|\big)$, а також для вектор-функції $(x_1(t), x_2(t))$: $\|(x_1, x_2)\| = \big(\|x_1\|, \|x_2\|\big) = \left(\max\limits_{t\in[0,T]} |x_1(t)|, \max\limits_{t\in[0,T]} |x_2(t)| \right)$. Простір із такою «псевдонормою» буде частково впорядкованим, і для векторів (x, y), (ξ, η) за виконання умов $x \le \xi$, $y \le \eta$ будемо використовувати позначення $(x, y) \le (\xi, \eta)$.

Розглянемо оператор S, що діє в просторі вектор-функцій зі значеннями в $\mathbf{R}^2$ за формулою (нас цікавитиме його дія на вектори вигляду $\operatorname{col}(x(t), \dot{x}(t))$:

$$S\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega}\left(\displaystyle\int_0^t \sin\omega t \cos\omega\tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau + \int_t^T \cos\omega t \sin\omega\tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right) \\ \displaystyle\int_0^t \cos\omega t \cos\omega\tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau - \int_t^T \sin\omega t \sin\omega\tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Враховуючи (2), (3), дослідимо, за яких умов цей оператор буде стискаючим. Тоді завдяки (3) для двох вектор-функцій $\operatorname{col}(x^{(1)}, \dot{x}^{(1)}(t))$, $\operatorname{col}(x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t))$ маємо:

$$\left| \left(S\left(x^1(t) - x^2(t) \right) \right)_1 \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\omega}\left(|\sin\omega t| \left| \int_0^t |\cos\omega\tau| d\tau + |\cos\omega t| \right| \int_t^1 |\sin\omega\tau| d\tau \right) \left(K_0 \left\| x^1 - x^2 \right\| + K_1 \left\| \dot{x}^1 - \dot{x}^2 \right\| \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\omega}\left(t|\sin\omega t| + (T-t)|\cos\omega t| \right) \left(K_0 \left\| x^1 - x^2 \right\| + K_1 \left\| \dot{x}^1 - \dot{x}^2 \right\| \right) \le$$

$$\le \frac{T}{\omega}\left(K_0 \left\| x^1 - x^2 \right\| + K_1 \left\| \dot{x}^1 - \dot{x}^2 \right\| \right).$$

Аналогічно $\left| \left(S\left(x^1(t) - x^2(t) \right) \right)_2 \right| \le T\left(K_0 \left\| x^1 - x^2 \right\| + K_1 \left\| \dot{x}^1 - \dot{x}^2 \right\| \right) T$.

Отже,

$$\left| S\begin{pmatrix} \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\| \\ \left\| \dot{x}^{(1)} - x^{(2)} \right\| \end{pmatrix} \right| \le T \begin{pmatrix} \dfrac{K_0}{\omega} & \dfrac{K_1}{\omega} \\ K_0 & K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\| \\ \left\| \dot{x}^{(1)} - x^{(2)} \right\| \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Позначимо через K матрицю в правій частині нерівності (14). Її норма дорівнює квадратному кореню з найбільшого власного числа матриці $K^* K$ (менше дорівнює нулю). Після нескладних перетворень отримаємо: $\|K\| = \dfrac{1}{\omega}\sqrt{(1+\omega_2)(K_0^2 + K_1^2)}$. Введемо позначення: $q = T\|K\|$. Тоді S буде стискаючим оператором, якщо $q < 1$, або при умові, яким мають задовольняти константи Ліпшиця

$$K_0^2 + K_1^2 < \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)T^2}. \quad (15)$$

Аналогічно доводиться, що константа M з (1) має задовольняти вимозі:

$$M \le \frac{1}{T} \min\,(a\omega, b)\,. \qquad (16)$$

Сформулюємо остаточний результат.

Теорема 1. Нехай функція $f(t, x, y)$ неперервна на $(-\infty,\infty)\times[-a,a]\times\times[-b,b]$, періодична по t із періодом T, задовольняє умовам (1) і (2), причому константи Ліпшиця та стала M з (1) задовольняють умовам (15)–(16). Тоді для існування періодичного з періодом T розв'язку $x=\varphi(t, x_0)$ рівняння (3) необхідно і достатньо існування такого значення x_0, яке задовольняє рівнянню (10). При цьому $\varphi(t, x_0)$ знаходиться методом послідовних наближень.

Використовуючи техніку доведення теореми Банаха про стискаючі відображення, одержимо оцінку похибки між розв'язком задачі (3)–(4) і її наближенням. Для цього необхідно тільки помітити, що $\|x_1(t, x_0) - x_0\| \le MT$.

Теорема 2. Похибка між розв'язком задачі (3)–(4) і її *n*-м наближенням визначається з умови:

$$\|\varphi(t, x_0) - x_n(t, x_0)\| \le \frac{MT}{1-q} q^n. \qquad (17)$$

ВИСНОВКИ

Зведення задачі про періодичні розв'язки квазілінійного диференціального рівняння до крайової задачі з умовами періодичного типу є ефективним прийомом, що дає змогу прямого дослідження цієї проблеми. Методику може бути поширено на більш загальний клас нелінійних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самійленко А.М.* О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. — 1967. — **3**, № 11. — С. 1903–1912.
2. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода, достижения и новые направления развития. II // Український математичний журнал. — 1998. — **50**, № 2. — С. 225–243.
3. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. *Чорный В.З.* Исследование периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка: дис. … канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1992. — 10 с.
5. *Бохонов Ю.Є.* Про один підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 3. — С. 308–314.
6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 526 с.

Надійшла 25.05.2010