

УДК 532.546

ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ

А. М. ТУГАЙ

Национальный университет строительства и архитектуры, Киев

Получено 03.02.2000

Получено строгое гидромеханическое решение задачи о притоке подземных вод к несовершенной скважине в однородном водоносном напорном пласте при условии постоянства напора $h_c = \text{const}$ на фильтре скважины. Решена также аналогичная задача для несовершенной скважины в безнапорном потоке с линеаризованным кинематическим условием на свободной поверхности для двух характерных случаев: с затопленным и незатопленным фильтром. Решения задач реализованы численными и аналитическими методами. Получены зависимости для определения основных фильтрационных характеристик, в том числе фильтрационных сопротивлений на гидродинамическое несовершенство по степени вскрытия пласта.

Отримано точний гідромеханічний розв'язок задачі про потік підземних вод до недосконалої свердловини в однорідному водоносному напірному пласті за умовами постійного напору $h_c = \text{const}$ на фільтрі свердловини. Розв'язана також аналогічна задача для недосконалої свердловини в безнапірному потоці з линеаризованою кінематичною умовою на вільній поверхні для двох характерних випадків: із затопленим і незатопленим фільтром. Розв'язки задач реалізовані чисельними й аналітичними методами. Одержані залежності для визначення основних фільтраційних характеристик, в тому числі фільтраційних опорів на гідродинамічну недосконалість свердловини по ступеню розкриття пласта.

An exact hydrodynamical solution to the problem dealing with underground water inflow to an imperfect well in homogeneous confined aquifer was obtained under constant head $h_c = \text{const}$ at the filter. A similar problem was also solved for an imperfect well in free aquifer using a kinematic condition linearized on the water table in two-special cases: the filter is flooded or not. The above solutions were found by numerical and analytical methods. A number of expressions were deduced for main filtration characteristics including hydraulic resistances when an incomplete opening of aquifers occurred.

ВВЕДЕНИЕ

Водозаборные сооружения в виде вертикальных скважин и трубчатых колодцев получили широкое распространение при заборе подземных вод для питьевого водоснабжения. Существующий опыт продолжительной эксплуатации вертикальных скважин, работающих в сложных гидрогеологических условиях, показывает, что методы расчета их производительности, разработанные для весьма схематизированных гидрогеологических условий и течений подземных вод, несовершенны и требуют улучшений. Реальные условия работы вертикальных скважин и колодцев и их производительность зависит, прежде всего, от возникновения и проявления гидравлических сопротивлений на несовершенство, особенно по степени вскрытия пласта. Как правило, водоприемная часть (фильтр) скважины не полностью прорезает водоносный пласт, т.е. является несовершенной, причем, учитывая значительную стоимость фильтра, правильный выбор его размеров приобретает одно из решающих значений при расчетах и проектировании скважин. При этом наи-

более приемлемые результаты могут быть получены на базе изучения пространственной картины фильтрации вблизи фильтра, что наиболее полно и достоверно отображает реальную картину течения. Именно на основе разработанной более совершенной математической модели фильтрации к несовершенной скважине может быть получена и выполнена оценка существующих методов их расчета.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПРЕДПОСЫЛКИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ВОДОЗАБОРНЫХ СКВАЖИН

При расчетах разных схем и систем водозаборных и водопонижительных скважин (трубчатых колодцев), действующих в разнообразных гидрогеологических условиях, широко применяется метод фильтрационных сопротивлений. Этот метод позволяет во многих случаях без особого снижения точности расчетов схематизировать сложные течения потоков и представить результаты их изучения в виде, удобном для приложений. Ме-

тод фильтрационных сопротивлений широко применяется в подземной гидродинамике (фильтрации). Основные принципы этого метода довольно подробно изложены в специальной литературе, например в [1–5 и др.], и применительно к несовершенным скважинам и колодцам он сводится к следующему. Известно, что существенные отклонения движения грунтовых вод от горизонтального направления в водоносном пласте наблюдаются преимущественно вблизи водоприемной части скважин (колодцев), вызывающих появление локальных зон резко изменяющейся фильтрации. В этих случаях влияние зон резкой деформации потока, характеризующее падением уровня (напора) в них, может быть учтено по методу фильтрационных сопротивлений путем замены несовершенных скважин совершенными, эквивалентными по фильтрационному расходу и картине фильтрации на некотором удалении от скважины. Под совершенной скважиной будем понимать такую, которая фильтром вскрывает водоносный пласт (горизонт) на полную мощность. В таком случае зоны резко изменяющейся фильтрации исключаются из рассмотрения. Таким образом, представляется возможным заменить в расчетах эффект от действия самых разнообразных по своим геометрическим особенностям и конструкциям фильтра скважин и их систем практически эквивалентным эффектом от простых по форме и конструкции скважин и других сооружений.

Так, несовершенные скважины могут быть приведены к совершенным, линейные ряды совершенных и несовершенных скважин можно представить совершенными горизонтальными водозаборами с расходами, равными суммарному расходу всех скважин, и т. д. При этом уже на расстоянии порядка мощности в случае однородного пласта образуется плановый поток с движением грунтовых вод преимущественно в горизонтальном направлении и с распределением напора в нем, как в случае совершенных водозаборов. Это обстоятельство существенно облегчает разработку методов фильтрационных расчетов скважин (колодцев), взаимодействующих в сложных гидрогеологических условиях.

Основное фильтрационное сопротивление Φ обусловлено гидродинамическим несовершенством скважин. Его еще называют внутренним или дополнительным, так как оно вызывается преимущественно деформациями потока вблизи скважины и в ней самой. В общем случае в водозаборных скважинах различают два вида несовершенства скважин: по степени и по характеру вскрытия пласта, т. е. общее сопротивление (общий скин-эффект

скважины) будет

$$\Phi_0 = \Phi + \Phi_x, \quad (1)$$

где Φ , Φ_x – соответственно сопротивление на несовершенство скважин по степени и по характеру вскрытия пласта.

Как известно, Φ зависит от длины и расположения фильтра в водоносном пласте, проницаемости и мощности пласта и его отдельных слоев и определяется преимущественно на основании гидромеханического (строгого) решения отдельных локальных задач фильтрации к скважинам [1, 6–8 и др.]. На основе этих решений задач установившейся и неуставившейся фильтрации к скважинам в однородных и неоднородно-слоистых водоносных толщах получены выражения для определения сопротивлений Φ .

Сопротивление по характеру вскрытия пласта Φ_x представляет собой комплексную характеристику и обусловлено различными факторами: конструкцией фильтра и его обсыпки, гидравликой потока в самом фильтре и в водоподъемных трубах, нарушением линейного закона фильтрации вблизи скважины, образованием фильтрационной пробки и осадка внутри фильтра и т. д. Анализ показывает, что из всех имеющихся факторов при определении сопротивления Φ_x главную роль (особенно при длительной эксплуатации скважин) играют фильтрационные деформации в прискваженной зоне, преимущественно кольматаж и вынос частиц грунта (суффозия), которые наименее изучены.

К сожалению, в настоящее время нет удовлетворительных предложений по определению сопротивлений Φ_x . Некоторые предложения по этому вопросу приведены в работах [1, 7, 9, 10]. Естественно, наиболее надежный метод определения сопротивлений Φ_0 и, особенно, его составной части Φ_x – по данным специально организованных и научно обоснованных опытных и эксплуатационных откачек. Обратим внимание на то, что даже при полном вскрытии фильтром водоносного пласта, когда можно считать $\Phi \approx 0$, действие сопротивления Φ_x не исключается (даже увеличивается) и должно быть учтено в расчетах.

Методика численного и аналитического расчета вертикальных скважин в однородных и неоднородных пластах на основе метода фильтрационных сопротивлений изложена в специальной литературе, например [1, 2, 7, 10, 11]. Так как основной составной частью этих расчетов является фильтрационное сопротивление Φ , то надежность и точность определения фильтрационных и технологических характеристик вертикальных во-

дозаборів во многом будет определяться обоснованностью расчетов этого сопротивления.

Методика расчета сопротивлений на несовершенство скважин Φ разработана достаточно для однородных [2, 7, 10] и неоднородно-слоистых пластов [1] на основе решения отдельных задач фильтрации к несовершенным скважинам. При аналитическом решении задачи фильтрации к несовершенной скважине для основного режима ее работы с постоянным дебитом Q большинство авторов заменяли скважину постоянно действующими точечными источниками, непрерывно и равномерно распределенными вдоль водоприемной части скважины, и получали линейный источник конечной длины. Если интенсивность всех точечных источников одинакова и постоянна во времени, то интенсивность образованного ими линейного источника на единицу его длины также будет одинаковой и постоянной во времени. При этом линейный источник достаточно хорошо воспроизводит действие несовершенной скважины с постоянным дебитом Q , и для этих условий получен ряд решений задач установившейся и неустановившейся фильтрации к несовершенной скважине в напорном однородном пласте. Особенность этих решений заключается в том, что напоры в разных точках поверхности рабочей части скважины (фильтра), имеющей форму цилиндра радиуса r_c и высотой l , не будут одинаковыми и постоянными во времени, что не соответствует реальным условиям неизменности напора по длине фильтра. В этом недостаток всех решений, основанных на введении линейных источников постоянной интенсивности. Для исправления указанной ошибки в расчетах был предложен ряд приемов, в частности, известное предложение М. Маскета [6], однако на практике наиболее распространенным оказалось определение понижения в скважинах путем осреднения напора на поверхности фильтра скважины. Этот прием был использован для разработки методики расчета сопротивлений Φ в работах [2, 7] для однородных пластов и в неоднородно-слоистых пластах [1, 8, 12, 13]. Вместе с тем, насколько нам известно, какой-либо оценки принятых допущений и ограничений при фильтрационных расчетах несовершенных скважин, в частности, сопротивлений Φ , не было проведено и поэтому указанный прием требует дополнительного обоснования. Кроме того, разработанные для напорных потоков расчеты несовершенных скважин с использованием метода фильтрационных сопротивлений без должного обоснования (правда с некоторыми существенными поправками) были рекомендованы для расчета скважин, в том числе и сопротивлений Φ , в случае

безнапорной фильтрации (со свободной поверхностью грунтовых вод).

В отличие от напорных потоков, приток воды к скважинам и особенно к колодцам в условиях безнапорных потоков приобретает важное значение в связи с многочисленным строительством в последнее время неглубоких скважин и колодцев, забирающих воду из верхних горизонтов. В условиях безнапорного потока заметно изменяется проводимость пласта, и, особенно вблизи скважин происходит существенное искривление свободной поверхности. Кривизна свободной поверхности, являющейся верхней границей безнапорного потока, обуславливает вертикальные деформации потока, которые вблизи скважины, в том числе и совершенной, нарушают известную предпосылку Дюпюи (о постоянстве градиентов напора по вертикали), и распределение напоров приобретает здесь довольно сложный характер. Все это приводит к появлению вертикальных скоростей фильтрации и необходимости их учета в расчетах. Наиболее резко эти деформации проявляются у скважины, образуя в открытой скважине участок высачивания. Известно, что строгая постановка задачи фильтрационного потока со свободной поверхностью сводится к решению известных уравнений фильтрации при условии на свободной поверхности $h = z$ (глубина (напора) равна ее ординате относительно плоскости сравнения), т. е. давление на свободной поверхности $p = 0$, и известном нелинейном кинематическом условии, выражающем равенство скоростей фильтрации и скоростей перемещения свободной поверхности [8, 10, 14]. Решения таких задач даже численными методами весьма затруднительно и поэтому рассмотрим решения задач безнапорной фильтрации в упрощенной постановке. При этом преимущественно ограничимся изучением притока к совершенной скважине с постоянным дебитом откачки, а известное уравнение жесткого режима фильтрации

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

решим при линеаризованном кинематическом условии на свободной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (3)$$

Условие (3) выражает закон перемещения свободной поверхности в вертикальном направлении и характеризует неустановившуюся фильтрацию. В стационарном потоке производная по времени $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ и соответственно $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$. Физически это

означает, что в условиях установившейся фильтрации свободная поверхность, или кривая депрессии, является поверхностью или линией тока. Решение уравнения (2) с условием (3), которое задавалось не на понижающей при откачке свободной поверхности, а на плоскости, соответствующей ее начальному положению ($t = 0$), что также является приближенным приемом, рассмотрено в работах [14-19]. Анализ этих решений и полученных результатов показывает следующее.

1) Влияние вертикальной фильтрации на уровни свободной поверхности оказывается существенным при условии

$$t < t_p = (5 \dots 10) \frac{\mu h_e}{k}, \quad (4)$$

а при $t \geq t_p$ можно пользоваться известным уравнением Тейса

$$S = \frac{Q}{4\pi km} F(u), \quad F(u) = -Ei(-u), \quad (5)$$

где $u = r^2/4at$; $a = kh_e/\mu$; h_e – глубина воды до откачки; μ – коэффициент водоотдачи (недостатка насыщения). Анализ показывает, что влияние вертикальной фильтрации может существенно сказываться в начальный, хотя иногда и довольно продолжительный, период откачек. Таким образом, при решении нестационарных задач безнапорной фильтрации во многих практических случаях двумерное уравнение (2) можно заменить известным одномерным Буссинеска, в котором автоматически учитывается приведенное выше граничное условие на свободной поверхности.

2) Для практических расчетов наиболее удобно и эффективно учитывать роль вертикальной фильтрации в однородном пласте на основе известных предпосылок перетекания, когда рассматриваемая безнапорная фильтрация может быть описана известными уравнениями фильтрации в двухслойном пласте с верхним слоем покровных отложений, в котором фильтрация происходит только в вертикальном направлении. Здесь важным представляется определение и учет в основном уравнении для нижнего слоя градиента вертикальных деформаций. Более подробно реализация и оценка этого приема, а также разработанные на его основе методы расчета безнапорной фильтрации к совершенным скважинам приведены в работах [10, 16-18]. Как указывалось выше, наиболее резко вертикальные деформации проявляются у скважины, образуя в условиях совершенной скважины и незатопленного фильтра участок высачивания (в случае затопленного фильтра несовершенной скважины – участок нависания). Недочет этих участков часто приводит к существенному занижению

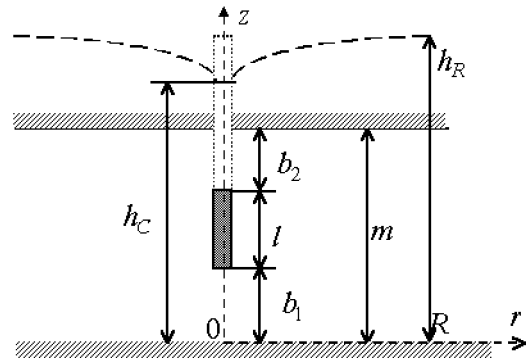


Рис. 1. Схема затопленного фильтра (напорная фильтрация)

положения депрессионных кривых, что может существенно повлиять на правильный выбор высоты фильтра. Поскольку деформации потока непосредственно у скважины связаны с участком высачивания и нависания, то в случае несовершенных скважин гидродинамическое несовершенство Φ_c будет также зависеть от высоты высачивания h_b и высоты нависания h_n . К сожалению, достаточно обоснованных предположений по определению h_b и h_n в настоящее время нет. В литературе имеются весьма приближенные формулы, полученные преимущественно на основе экспериментальных исследований [20, 21].

Для однородного потока величина h_b может быть приближенно оценена по формуле [20]

$$h_b = \sqrt{\left(0.73 \lg \frac{\sqrt{Q}}{r_c} - 0.5\right) \bar{Q} + h_c^2 - h_e}, \quad (6)$$

где $\bar{Q} = Q/k$; h_c – глубина воды в совершенной скважине. Для несовершенной скважины вместо глубины h_c принимается затопленная часть фильтра l_Φ , т. е. отсчитывается глубина в скважине от ее забоя. При сопоставлении расчетных и опытных данных, приведенном в работе [20], получено удовлетворительное совпадение. Величина нависания несовершенной скважины h_n в однородном потоке приближенно определяется из выражения

$$h_n = \frac{Q}{2\pi kl} \left[\ln \frac{0.74l}{r_c} - f(c) \right], \quad (7)$$

где $f(c) = f_2(c) - f_1(c)$; $c = (h_n + l_1)/l$ (значения функций $f_1(c)$ и $f_2(c)$ приведены в табл. 1).

Выражение (7) решается подбором, в первом приближении принимается $c = l_1/l$, где l_1 – превышение уровня воды над фильтром в скважине.

Табл. 1.

	с				
	0.2	0.5	1	2	4
f_1	0.40	0.26	0.17	0.10	0.05
f_2	1.79	1.10	0.70	0.40	0.22
f	1.39	0.84	0.53	0.30	0.17

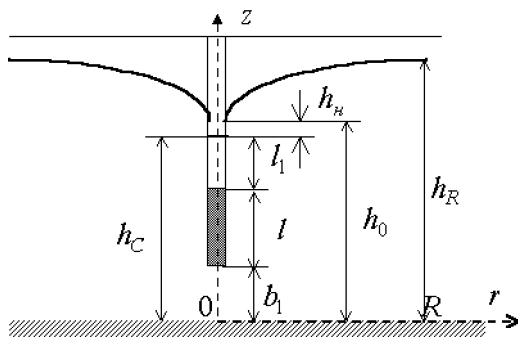


Рис. 2. Схема затопленного фильтра (безнапорная фильтрация)

При расчетах несовершенных скважин в безнапорном потоке учет высот h_b и h_n при расчетах сопротивлений Φ_c , связанных с гидродинамическим несовершенством, осуществляется весьма приближенно по той же методике, как и для скважин в напорном потоке, но выбор расчетной мощности и расчетной длины фильтра производится с учетом этих высот h_b и h_n [20]. Таким образом, сделанный краткий анализ показывает, что существующие методы расчета безнапорной фильтрации к скважине весьма несовершенны, ибо основаны на приближенных решениях, основанных на существенных допущениях и ограничениях. Это касается, прежде всего, методов расчета безнапорной фильтрации к скважинам, основанных на использовании метода фильтрационных сопротивлений, о чем уже говорилось выше. В связи с изложенным здесь приводятся более строгие решения задач напорной и безнапорной стационарной фильтрации к совершенным и несовершенным скважинам, которые будут использованы ниже для оценки существующих в случае напорной фильтрации и разработки более обоснованных в случае безнапорной фильтрации методов расчета фильтрационных сопротивлений на гидродинамическое несовершенство Φ .

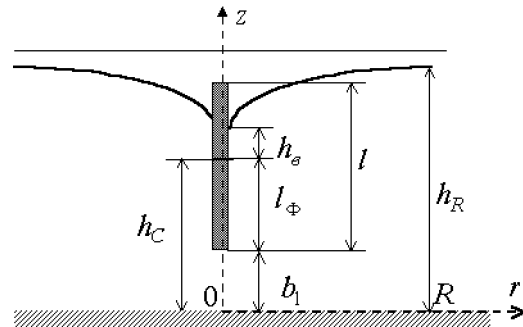


Рис. 3. Схема незатопленного фильтра (безнапорная фильтрация)

2. ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ

В гидродинамической постановке решение стационарной фильтрации к несовершенной скважине состоит из нескольких этапов. На первом этапе рассмотрим осесимметричный приток к точечному стоку с координатами $r = 0, z = \xi$, расположенному в круговом однородном пласте ($0 \leq z \leq \infty$) конечного радиуса R (рис. 1). В области, содержащей источник или стоки, для потенциала скорости $\varphi = -kh$ вместо уравнения Лапласа удобно принять уравнение Пуассона, которое для одного точечного стока имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -q(\xi) \frac{\delta(r)}{4\pi r} \delta(z - \xi), \quad (8)$$

где r – радиальная координата; z – направленная вверх вертикальная координата; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, имеющая следующие свойства:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0 \\ \infty & \text{при } x = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Знак минус в правой части уравнения (8) означает, что уравнение записано для стоков, и в этом случае функция интенсивности расхода $q(\xi) > 0$.

Граничные условия задачи примем следующие: условие неперетекания (непроницаемости) на подошве пласта (на водоупоре)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (9)$$

условие непроницаемости на кровле пласта для напорной задачи или линеаризованное условие на

свободной поверхности, снесенное на горизонтальную плоскость $z = m$ в случае безнапорной фильтрации, т.е. в данном случае свободная поверхность является поверхностью тока,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=m} = 0, \quad (10)$$

условие первого рода на контуре питания для простоты изложения примем в виде

$$\varphi \Big|_{r=R} = 0. \quad (11)$$

Если при $r = R$ выполняется условие

$$\varphi = \varphi_0 = -kh_R,$$

то, заменяя φ на $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$, получаем задачу (8) – (11) для φ_1 с условием

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Задачу будем решать методом интегральных преобразований. К (8) – (11) применим преобразование Ханкеля с конечными пределами

$$\varphi^*(z, \mu_i) = \int_0^R \varphi(z, r) r J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right) dr, \quad (12)$$

где μ_i – положительный корень уравнения $J_0(\mu_i) = 0$; $J_0(x)$ – известная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Тогда рассматриваемая задача преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \varphi^*}{dz^2} - \frac{\mu_i^2}{R^2} \varphi^* = -\frac{q(\xi)}{4\pi} \delta(z - \xi), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=m} = 0, \quad (14)$$

Общее решение задачи (13), (14) имеет вид

$$\varphi^*(z, \mu_i, \xi) = \frac{q(\xi)}{4\pi} \frac{R}{\mu_i} \left[\frac{\text{ch} \frac{\mu_i(\xi - m)}{R}}{\text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \text{ch} \frac{\mu_i z}{R} + \int_0^z \delta(\tau - \xi) \text{sh} \frac{\mu_i(\tau - z)}{R} d\tau \right]. \quad (15)$$

Применив известную формулу преобразования Ханкеля, окончательно в области оригиналов найдем

$$\varphi(z, r, \xi) = \frac{q(\xi)}{2\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{\mu_i J_1^2(\mu_i)} \left[\frac{\text{ch} \frac{\mu_i(\xi - m)}{R}}{\text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \text{ch} \frac{\mu_i z}{R} + \int_0^z \delta(\tau - \xi) \text{sh} \frac{\mu_i(\tau - z)}{R} d\tau \right].$$

$$+ \int_0^z \delta(\tau - \xi) \text{sh} \frac{\mu_i(\tau - z)}{R} d\tau \Big]. \quad (16)$$

Отсюда легко можно получить, что при $z \geq \xi$ выражение (16) преобразуется к виду

$$\varphi(z, r, \xi) = \frac{q(\xi)}{4\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \times \quad (17)$$

$$\times \left[\frac{\text{ch} \frac{\mu_i(\xi - m + z)}{R} + \text{ch} \frac{\mu_i(m + \xi - z)}{R}}{\mu_i \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \right] \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{J_1^2(\mu_i)},$$

а при $z < \xi$ имеем

$$\varphi(z, r, \xi) = \frac{q(\xi)}{4\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \times \quad (18)$$

$$\times \left[\frac{\text{ch} \frac{\mu_i(m - \xi - z)}{R} + \text{ch} \frac{\mu_i(m - \xi + z)}{R}}{\mu_i \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \right] \times \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{J_1^2(\mu_i)}.$$

Формулы (16) и (17) совпадают с полученными несколько иным путем результатами работы [8].

Рассмотрим скважину как линию стоков с интенсивностью $q(z)$ для $b_1 \leq z \leq b_1 + l$. При этом следует выделить два возможных случая:

1) Фильтр скважины затоплен, тогда по всей длине фильтра l справедливо условие на скважине

$$\varphi(r_c, z) = -kh_c, \quad \text{при} \quad (b_1 \leq z \leq b_1 + l);$$

2) Фильтр скважины затоплен не полностью на длине $l_\Phi < l$, тогда существует промежуток высачивания, который необходимо включить в линию стоков. В этом случае на скважине имеем

$$\varphi(r_c, z) = -kz, \quad \text{при} \quad b_1 + l \leq z \leq b_1 + l + h_b,$$

где h_b – высота высачивания.

Тогда потенциал скоростей определим по формуле

$$\varphi(z, r) = \int_{b_1}^{b_1+l} \varphi(z, r, \xi) d\xi$$

и, используя решение (16) для линейного стока, получим

$$\varphi(z, r) = \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{ch} \frac{\mu_i z}{R}}{\mu_i \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{J_1^2(\mu_i)} \times$$

$$\times \int_{b_1}^{b_1+l} q(\xi) \text{ch} \frac{\mu_i(\xi - m)}{R} d\xi + \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{\mu_i J_1^2(\mu_i)} \times$$

$$\times \int_{b_1}^{b_1+l} q(\xi) \int_0^z \delta(\tau - \xi) \operatorname{sh} \frac{\mu_i(\tau - z)}{R} d\tau d\xi. \quad (19)$$

При этом с учетом условия на контуре питания области фильтрации (при $r = R$ $\varphi_0 = -kh_R$) для напорной задачи выделим три возможных участка (зоны), для которых имеем

1) в нижней зоне (под фильтром) ($0 \leq z \leq b_1$)

$$\varphi_1(z, r) = -kh_R + \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_i z}{R}}{\mu_i \operatorname{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \quad (20)$$

$$\times \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{J_1^2(\mu_i)} \int_{b_1}^{b_1+l} q(\xi) \operatorname{ch} \frac{\mu_i(\xi - m)}{R} d\xi;$$

2) в зоне расположения фильтра скважины ($b_1 \leq z \leq b_1 + l$)

$$\varphi_2(z, r) = \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{\mu_i J_1^2(\mu_i)} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_i z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \quad (21)$$

$$\times \int_{b_1}^{b_1+l} q(\xi) \operatorname{ch} \frac{\mu_i(\xi - m)}{R} d\xi + \int_{b_1}^z q(\xi) \operatorname{sh} \frac{\mu_i(\xi - z)}{R} d\xi \right];$$

3) в зоне над фильтром скважины ($b_1 + l \leq z \leq m$)

$$\varphi_3(z, r) = -kh_R + \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_i(z - m)}{R}}{\mu_i \operatorname{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \quad (22)$$

$$\times \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{J_1^2(\mu_i)} \int_{b_1}^{b_1+l} q(\xi) \operatorname{ch} \frac{\mu_i \xi}{R} d\xi.$$

Для уверенности в правильности решений (20) – (22) было проверено выполнение граничных условий (известных условий сопряжения на границе раздела зон) и самого исходного уравнения (8).

Таким образом, уравнения (20) – (22) представляют собой точное аналитическое решение задачи о притоке подземных вод к линейному стоку в напорном водоносном пласте мощностью m . В то же время оно является приближенным аналитическим решением задачи о притоке грунтовых вод к линейному стоку в безнапорном горизонте, причем эта приближенность вызвана принятием линеаризованного условия на свободной поверхности, к тому же, снесенному на неизвестную горизонтальную плоскость $z = m$. Попробуем хотя бы как-то приближенно определить ее. Видимо, она должна представлять из себя осредненную по пространственной координате r свободную

поверхность. Для этого на основании известной формулы $z = -\varphi(r; m)/k$ с учетом зависимости (22) для потенциала скоростей в зоне расположения свободной поверхности (в слое над фильтром) определим уравнение свободной поверхности

$$z = h_R - \frac{1}{2k\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{\mu_i \operatorname{sh} \frac{\mu_i m}{R} J_1^2(\mu_i)} \times \quad (23)$$

$$\times \int_b^{b+l} q(\xi) \operatorname{ch} \frac{\mu_i \xi}{R} d\xi.$$

Далее осредним его по пространственной координате r

$$z = h_R - \frac{1}{2k\pi R^2} \int_0^R \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right)}{\mu_i \operatorname{sh} \frac{\mu_i m}{R} J_1^2(\mu_i)} \times \quad (24)$$

$$\times \int_{b_1}^{b_1+l} q(\xi) \operatorname{ch} \frac{\mu_i \xi}{R} d\xi dr = h_R - \frac{1}{2k\pi R^2} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^R J_0\left(\frac{r\mu_i}{R}\right) dr}{\mu_i \operatorname{sh} \frac{\mu_i m}{R} J_1^2(\mu_i)} \int_{b_1}^{b_1+l} q(\xi) \operatorname{ch} \frac{\mu_i \xi}{R} d\xi$$

и, учитывая, что $z_{cp} = m$, координату горизонтальной плоскости, используемой в линеаризованном условии на свободной поверхности, будем определять из решения этого трансцендентного уравнения относительно m и фильтрационных сопротивлений Φ .

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ПРИТОКА К НЕ СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ И ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ Φ_c

Рассмотрим задачу фильтрации к несовершенной скважине с постоянным напором (уровнем) в ней h_c . Для определения общего дебита скважины Q в таких условиях принимаем, как и предыдущие исследователи, гипотезу о постоянстве распределения интенсивности q по длине фильтра скважины, т.е. $Q = ql$, однако значение этой интенсивности должно быть найдено таким, чтобы в скважине обеспечивалось выполнение условия $h_c = \text{const}$. В случае безнапорной фильтрации глубины потока (уровни свободной поверхности) принимаются:

$$\begin{aligned} z &= h_0 \quad \text{при } r = r_c; \\ z &= h_R \quad \text{при } r = R. \end{aligned}$$

Здесь h_0 – глубина потока (уровень свободной поверхности) вблизи скважины для случая затопленного фильтра или глубина (уровень), соответствующая верхней границе участка высачивания, для случая незатопленного фильтра (рис. 2, 3). На свободной поверхности принимается известное условие, выражающее постоянство давления на ней, которое для потенциала скорости $\varphi(z, r)$ запишется в виде

$$\varphi(z, r) + kz = 0.$$

Известно, что расход скважины через произвольный цилиндр радиуса r , ось которого совпадает с осью z , определяется так:

$$Q = -2\pi r \int_0^z \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz.$$

Выражение записано со знаком минус в правой части для того, чтобы работать с абсолютным значением расхода $Q > 0$.

Будем параллельно рассматривать два случая: напорную и безнапорную фильтрации. Обозначим ординату свободной поверхности через $Z = Z(r)$, тогда на свободной поверхности будем иметь

$$\varphi(r, Z(r)) + kZ(r) = 0 \quad (25)$$

и, соответственно, расход через произвольное вертикальное сечение для безнапорной фильтрации составит

$$Q = -2\pi r \int_0^{Z(r)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz,$$

а для напорной, когда $Z(r) = m$

$$Q = -2\pi r \int_0^m \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz.$$

Выполняя некоторые преобразования и учитывая, что при $r = R$ имеем $\varphi(R, z) = -kh_R$ (при наличии свободной поверхности $Z = h_R$), получаем следующие уравнения для определения общего расхода скважины:

при безнапорном движении

$$-Q \ln \frac{r}{R} = 2\pi \int_0^Z \varphi(r, z) dz + k\pi(Z^2 + h_R^2), \quad (26)$$

при напорном движении

$$-Q \ln \frac{r}{R} = 2\pi \int_0^m \varphi(r, z) dz + 2k\pi h_R m. \quad (27)$$

Теперь положим в формулах (26) и (27) $r = r_c$ и рассмотрим каждый из возможных случаев затопления фильтра в отдельности. При этом интегралы в правых частях уравнений (26) и (27) разобьем на несколько интегралов, используя для этого соотношения (19):

1) Случай затопленного фильтра при напорной фильтрации

$$\begin{aligned} \int_0^m \varphi(r_c, z) dz &= \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz + \int_{b_1}^{b_1+l} \varphi(r_c, z) dz + \\ &+ \int_{b_1+l}^m \varphi(r_c, z) dz = \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz + \int_{b_1+l}^m \varphi(r_c, z) dz - kh_c l. \end{aligned}$$

Здесь m – мощность водоносного пласта. После этого в точке $r = r_c$ уравнение (27) дает

$$\begin{aligned} -Q \ln \frac{r_c}{R} &= 2\pi \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz + 2\pi \int_{b_1+l}^m \varphi(r_c, z) dz - \\ &- 2k\pi h_c l + 2k\pi h_R m. \end{aligned} \quad (28)$$

Для того, чтобы оценить интегралы $\int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz$ и $\int_{b_1+l}^m \varphi(r_c, z) dz$, воспользуемся полученными ранее аналитическими решениями (20) и (22) для потенциала скорости в зонах под фильтром и над фильтром скважины, соответственно. После сложных преобразований находим

$$\begin{aligned} \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz &= \frac{QR}{\pi l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i b_1}{R} \text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (l-2b_2)}{2R}}{\mu_i^3 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \\ &\times \frac{J_0 \left(\frac{r_c \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)} - kh_R b_1, \\ \int_{b_1+l}^m \varphi(r_c, z) dz &= \frac{QR}{\pi l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i b_2}{R} \text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (2b_1+l)}{2R}}{\mu_i^3 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \\ &\times \frac{J_0 \left(\frac{r_c \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)} - kh_R b_2, \end{aligned}$$

и уравнение (28) для определения общего расхода скважины примет вид

$$Q = 2\pi kl \frac{h_R - h_c}{\ln \frac{R}{r_c} - \Phi_1 - \Phi_2}, \quad (29)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{2R}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i b_1}{R} \text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (l - 2b_2)}{2R}}{\mu_i^3 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \frac{J_0 \left(\frac{r_c \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)}, \quad (30)$$

$$\Phi_2 = \frac{2R}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i b_2}{R} \text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (2b_1 + l)}{2R}}{\mu_i^3 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \frac{J_0 \left(\frac{r_c \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)}, \quad (31)$$

2) Случай затопленного фильтра при безнапорной фильтрации

$$\int_0^{h_0} \varphi(\delta, z) dz = \int_0^{b_1} \varphi(\delta, z) dz + \int_{b_1}^{b_1+l} \varphi(\delta, z) dz + \int_{b_1+l}^{h_0} \varphi(\delta, z) dz = \int_0^{b_1} \varphi(\delta, z) dz + \int_{b_1+l}^{h_0} \varphi(\delta, z) dz - kh_c l.$$

Здесь h_0 – глубина (уровень свободной поверхности) вблизи скважины (имеет место нависание свободной поверхности высотой $h_n = h_0 - h_c$, $h_c = b_1 + l + l_1$, рис.2). После этого в точке $r = r_c$ уравнение (26) дает

$$-Q \ln \frac{r_c}{R} = 2\pi \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz + 2\pi \int_{b_1+l}^{h_0} \varphi(\delta, z) dz - 2k\pi h_c l + k\pi h_R^2 + k\pi h_0^2. \quad (32)$$

Выражения, содержащие интегралы в правой части уравнения, вычислим на основании полученного решения с учетом того, что $Q = ql$:

$$2\pi \int_0^{b_1} \varphi_1(z, r) dz = Q * -2\pi k b_1 h_R,$$

$$2\pi \int_{b_1+l}^{h_0} \varphi_3(z, r) dz = Q * -2\pi k h_R (h_H + l_1).$$

Тогда

$$Q = \pi k \frac{(h_R - h_0)^2 + 2(h_R - h_c)l}{\ln \frac{R}{r_c} - \Phi_1 - \Phi_2}, \quad (33)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{2R}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i b_1}{R} \text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (2b_2 - l)}{2R}}{\mu_i^3 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \frac{J_0 \left(\frac{r_c \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)}, \quad (34)$$

$$\Phi_2 = \frac{2R}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i h_n}{2R} \text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (2b_1 + l)}{2R}}{\mu_i^3 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \frac{J_0 \left(\frac{r_c \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)}. \quad (35)$$

Полученное уравнение содержит три неизвестных: общий расход скважины Q , глубину (уровень свободной поверхности) вблизи скважины h_0 и осредненное положение свободной поверхности m . Поэтому дальнейшее решение его представляет определенные трудности. Получим два недостающих решения для замыкания системы уравнений. Для случая постоянного расхода по длине фильтра уравнение свободной поверхности имеет вид

$$z = h_R - \frac{Q}{k\pi l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (2b_1 + l)}{2R}}{\mu_i^2 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \frac{J_0 \left(\frac{r \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)}. \quad (36)$$

Отсюда легко получить следующие два уравнения для замыкания системы уравнений для определения Q , m и h_0 :

$$m = h_R - \frac{Q}{k\pi l R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (2b_1 + l)}{2R}}{\mu_i^2 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \frac{\int_0^R J_0 \left(\frac{r \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)}, \quad (37)$$

$$h_0 = h_R - \frac{Q}{k\pi l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (2b_1 + l)}{2R}}{\mu_i^2 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \frac{1}{J_1^2(\mu_i)}. \quad (38)$$

Искомые значения указанных параметров можно получить с помощью метода последовательных приближений. Итерационную схему можно записать в виде

$$Q^{(s+1)} = k\pi \frac{(h_R - h_0^{(s)})^2 + (h_R - h_c)l}{\ln \frac{R}{r_c} - \Phi_1(m^{(s)}, h_0^{(s)}) - \Phi_2(m^{(s)}, h_0^{(s)})}, \quad (39)$$

$$m^{(s+1)} = h_R - \frac{Q^{(s+1)}}{k\pi l R} \times \quad (40)$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i(2b_1 + l)}{2R} \int_0^R J_0 \left(\frac{r\mu_i}{R} \right)}{\mu_i^2 \text{sh} \frac{\mu_i m^{(s)}}{R} J_1^2(\mu_i)},$$

$$h_0^{(s)} = h_R - \frac{Q^{(s+1)}}{k\pi l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i(2b_1 + l)}{2R}}{\mu_i^2 \text{sh} \frac{\mu_i m^{(s)}}{R}} \frac{1}{J_1^2(\mu_i)}. \quad (41)$$

Начальное приближение можно принять следующим: $h_0^{(0)} = h_R$ и $m^{(0)} = h_R$.

При численном решении задачи в этом случае для интенсивности расхода, переменной по длине фильтра, также использовался метод итераций. Это вызвано тем, что в решении присутствует неизвестный параметр m (некоторая осредненная горизонтальная плоскость, на которую сносится условие на свободной поверхности). Численные расчеты свидетельствуют о том, что значения полученных результатов зависят от принятого m весьма существенно, т.е. в процессе решения происходило уточнение параметра m , а, следовательно, и решения с помощью итераций по T . Схема численного решения представлена на рис. 4.

3) Случай незатопленного фильтра. В этом случае имеет место участок высачивания высотой $h_b = h_0 - h_c$, $h_c = b_1 + l_\Phi$ (рис. 3):

$$\int_0^{h_0} \varphi(r_c, z) dz = \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz + \int_{b_1}^{h_c} \varphi(r_c, z) dz +$$

$$+ \int_{h_c}^{h_0} \varphi(r_c, z) dz = \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz - \int_{b_1}^{h_c} k H_c dz - k \int_{h_c}^{h_0} z dz =$$

$$= \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz - k h_c (h_c - b_1) - \frac{1}{2} k (h_0^2 - h_c^2) =$$

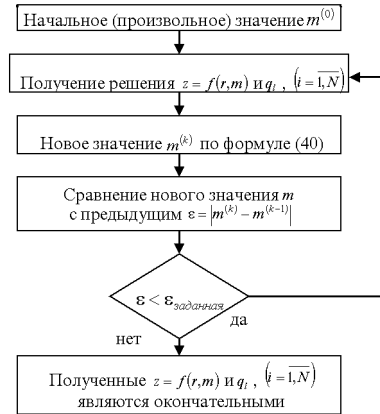


Рис. 4. Итерационная схема численного решения

$$= \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz + k h_c b_1 - \frac{1}{2} k (h_0^2 + h_c^2).$$

После этого уравнение (26) дает

$$-Q \ln \frac{r_c}{R} = k\pi (h_0^2 + h_c^2) +$$

$$+ 2\pi \left(\int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz + k h_c b_1 - \frac{1}{2} k (h_0^2 + h_c^2) \right)$$

или

$$-Q \ln \frac{r_c}{R} = 2\pi \int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz + 2\pi k h_c b_1 +$$

$$+ k\pi (h_R^2 - h_c^2). \quad (42)$$

Для оценки интеграла $\int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz$ воспользуемся полученным ранее аналитическим решением (20) для потенциала скорости в слое под фильтром скважины. После несложных преобразований находим

$$\int_0^{b_1} \varphi(r_c, z) dz = \frac{QR}{\pi l} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i b_1}{R} \text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i(2b_1 - 2m + l)}{2R}}{\mu_i^3 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times$$

$$\times \frac{J_0 \left(\frac{r_c \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)} - k h_R b_1,$$

и уравнение (39) для определения расхода скважины примет вид

$$Q = \pi k \frac{(h_R^2 - h_c^2) - 2b_1(h_R - h_c)}{\ln \frac{R}{r_c} - \Phi}, \quad (43)$$

где

$$\Phi = \frac{2R}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \frac{\mu_i b_1}{R} \text{sh} \frac{\mu_i l}{2R} \text{ch} \frac{\mu_i (2m - 2b_1 - l)}{2R}}{\mu_i^3 \text{sh} \frac{\mu_i m}{R}} \times \frac{J_0 \left(\frac{r_c \mu_i}{R} \right)}{J_1^2(\mu_i)}, \quad (44)$$

в которой значение мощности принимается по формуле (37).

Формула (43) является приближенной формулой для определения общего расхода несовершенной скважины с незатопленным фильтром (имеется промежуток высачивания) в предположении, что интенсивность расхода по длине скважины постоянна. Здесь константа Φ (своего рода поправка на несовершенство скважины по степени вскрытия пласта) определяется по формуле (44). Положив в формуле (43) $b_1 = 0$, получим известную строгую формулу Дюпюи для определения расхода совершенной скважины:

$$Q = \pi k \frac{(h_R^2 - h_c^2)}{\ln \frac{R}{r_c}}, \quad (45)$$

Зная значение расхода Q , можно получить выражение для определения участка высачивания h_b . При этом также можно воспользоваться приближенной формулой (6), приняв в ней значение расхода Q по формуле (43).

Для удобства пользования приведенными зависимостями разработаны численные алгоритмы и программы, составлены вспомогательные расчетные графики и таблицы. Выполненный анализ показал, что существующие методы расчета, основанные на осреднении напора по высоте фильтра, по сравнению с рекомендуемыми более строгими методами, дают завышенные значения расхода в среднем на 15...25%. При этом заметна тенденция увеличения этого расхождения с уменьшением длины фильтра, особенно в случае его примыкания к кровле (или подошве) пласта. Анализируя действительные эпюры распределения поступления расхода по длине фильтра, это уменьшение, по-видимому, можно объяснить увеличением гидравлического сопротивления при пространственном притоке.

1. Олейник А. Я. Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. – К.: Наук. думка, 1978. – 202 с.
2. Бочеввер Ф. М. Расчеты эксплуатационных запасов подземных вод. – М.: Недра, 1968. – 328 с.
3. Арцев А. И., Бочеввер Ф. М., Лапшин Н. Н. и др. Проектирование водозаборов подземных вод. – М.: Стройиздат, 1976. – 292 с.
4. Олейник А. Я. Гидродинамика дренажа. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. Олейник А. Я., Поляков В. Л. Дренаж переувлажненных земель. – К.: Наук. думка, 1987. – 280 с.
6. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.: Гостоптехиздат, 1949. – 628 с.
7. Веригин и др. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. – М.: Недра, 1968. – 271 с.
8. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
9. Гаврилко В. М., Алексеев В. С. Фильтры буровых скважин. – М.: Недра, 1985. – 334 с.
10. Мироненко В. А., Шестаков В. М. Теории и методы интерпритации опытно-фильтрационных работ. – М.: Недра, 1975. – 325 с.
11. Тугай А. М., Тугай Я. А. Водопостачання. Джерела та водозабірні споруди. Посібник/Українсько-фінський інститут менеджменту і бізнесу. – К.: Наук. думка, 1998. – 196 с.
12. Олейник А. Я. Фильтрация воды к несовершенным скважинам в двухслойном напорном пласте // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1957. – N 5. – С. 147–153.
13. Олейник А. Я. Расчет несовершенных скважин в трехслойном пласте // Прикладная механика. – 1969. – N 6. – С. 86–92.
14. Мироненко В. А., Шестаков В. М. Основы гидрогеомеханики. – М.: Недра, 1974. – 296 с.
15. Boulton N. S. The analysis of data from nonequilibrium pumping test allowing for delayer yield from storage // Pros. Inst. Civil Engrs. – 1963. – 26, Nov. – P. 469–482.
16. Gambolatti G. L. Transient Free Surface Flow to a Well // Water Resour. Res. – 1976. – 12, N 1. – P. 27–39.
17. Neuman Sh. Theory of Flow in Unconfined-Aquifers Considering Delayed Gravitic Response // Water Resour. Res. – 1972. – 8, N 4. – P. 1031–1045.
18. Streltsova T. D. Unsteady Radial Flow in an Unconfined Aquifer // Water Resour. Res. – 1972. – 4, N 4. – P. 469–482.
19. Белякова В. К. Неустановившийся приток грунтовых вод к скважине // Прикл. математ. и мех. – 1956. – N 20. – С. 70–76.
20. Бочеввер Ф. М., Гармонов И. В., Лебедев А. В., Шестаков В. М. Основы гидрогеологических расчетов. – М.: Недра, 1975. – 325 с.
21. Абрамов С. К., Селюк Е. М. К вопросу о расчете участка высачивания в береговые дрены // Тр. лаб. инж. гидрологии, Госстройиздат. – 1962. – N 4. – С. 69–88.