УДК 519.8

ФУНКЦИЯ МИНКОВСКОГО В ЗАДАЧАХ УПАКОВКИ

В.В. ОСТАПЕНКО, И.Л. ЯКУНИНА

Рассмотрена задача упаковки, которая состоит в наиболее рациональном размещении группы заданных предметов. Поскольку при моделировании размещения грузов, раскрое материала и подобных процессов возникает вопрос о непересечении предметов, предложен новый подход к построению условий непересечения при помощи неравенств, которые задаются функцией Минковского. Построены аналитические формулы, описывающие функции Минковского от разности (суммы) различных тел.

При размещении или упаковке предметов возникает вопрос об оптимальном их расположении. То есть, задача упаковки заключается в моделировании наиболее рационального размещения группы определенных предметов [1–3]. Сюда же относятся задачи раскроя, в которых требуется так раскроить кусок материала, чтобы получить максимальное число заготовок [4–9]. При перевозке грузов (контейнеров) требуется упаковать как можно больше предметов в заданном пространстве. Рассмотрим, к примеру, перевозку грузов в транспортном самолете. Грузы в контейнере самолета размещаются в несколько рядов. Причем, центр тяжести всей совокупности грузов должен находиться как можно ближе к центру тяжести самолета.

Поиск оптимального расположения груза, раскроя материала и моделирования подобных процессов приводит к вопросу о непересечении предметов или заготовок. Этот вопрос является одним из центральных. В данной работе грузы или заготовки описываются выпуклыми компактными множествами (телами).

В представленной работе предложен новый подход к построению условий непересечения. Два тела не пересекаются, если разность их «центров» не принадлежит разности двух выпуклых множеств, которые описывают размещение предметов. Этот факт выражается с помощью неравенства, которое задается функцией Минковского [10]. В работе построены аналитические формулы, описывающие функции Минковского от разности (суммы) различных тел.

1. УСЛОВИЕ НЕПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Под телом будем понимать выпуклое компактное множество с непустой внутренностью.

Будем считать, что два тела M и N не пересекаются, тогда и только тогда, когда пересечением их внутренностей является пустое множество, т.е. $\operatorname{int} M \bigcap \operatorname{int} N = \emptyset$. Нетрудно доказать, что это эквивалентно тому, что

$$0 \notin \operatorname{int} M - \operatorname{int} N . \tag{1}$$

Представим $M(x) = x + A$, $N(y) = y + B$, где $x, y \in R^n$, A, B — выпуклые компактные множества из R^n.

Множества не пересекаются, т.е. $\operatorname{int} M(x) \bigcap \operatorname{int} N = \emptyset$, тогда и только тогда, когда, согласно (1),

$0 \notin (x + \operatorname{int} A) - (y + \operatorname{int} B) = x - y + \operatorname{int}(A - B) = x - y + \operatorname{int} C$, где $C = A - B$,

или

$$y - x \notin \operatorname{int} C . \tag{2}$$

Для дальнейшей работы с выпуклыми множествами будем использовать функцию Минковского [10]: $\mu_C(z) = \inf\left\{\lambda > 0 : z \in \lambda C\right\}$. Эта функция интересна сама по себе как пример выпуклой функции [11].

Известно, что z является внутренней точкой множества C, т.е. $z \in \operatorname{int} C$ тогда и только тогда, когда $\mu(z) < 1$; z является граничной точкой множества C, т.е.

$$z \in \partial C \text{ тогда и только тогда, когда } \mu(z) = 1 ; \tag{3}$$

z не принадлежит замыканию множества C, т.е.

$$z \notin \overline{C} \text{ тогда и только тогда, когда } \mu(z) > 1 . \tag{4}$$

Поэтому, согласно (3), (4), условие не пересечения $\operatorname{int} M$ и $\operatorname{int} N$, или условие (2), можно записать в виде $\mu_C(y - x) \ge 1$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множества вида $x_i + A_i$, $i = 1, \ldots, m$, где $x_i \in R^n$, A_i — замкнутые выпуклые множества в R^n, такие, что $0 \in \operatorname{int} A_i$.

Рассмотрим задачу упаковки множества тел A_i, $i = 1, \ldots, m$, в выпуклое множество $N \subset R^n$. Это означает, что тела не должны попарно пересекаться и должны содержаться в N. Аналогично предположим $0 \in \operatorname{int} A_i$, $i = 1, \ldots, m$. Под векторами x_i понимаем смещение этих тел относительно точки 0 (начало координат).

Таким образом, на переменные x_i наложим условия

$$\left(x_i + A_i\right) \bigcap \left(x_j + A_j\right) = \emptyset, \quad \forall\ i, j = 1, \ldots, m , \tag{5}$$

$$x_i + A_i \subset N, \quad \forall\ i = 1, \ldots, m . \tag{6}$$

Ограничение (5) — условие непересечения тел, ограничение (6) — условие содержания тел во множестве N. Ограничение (6) можно записать в виде

$$x_i \in N \overset{*}{-} A_i, \quad \forall\ i = 1,\dots,m. \tag{7}$$

Символ $\overset{*}{-}$ обозначает геометрическую разность множеств. Понятие геометрической разности впервые введено Г. Минковским [10], в дальнейшем изучено и описано в работах Л.С. Понтрягина [12] и М.С. Никольского [13].

Определение. Пусть A, B — непустые множества в R^n. Геометрической разностью $A \overset{*}{-} B$ называется множество $C = \left\{ c \in R^n : c + B \subset A \right\}$.

Отметим, что $A \overset{*}{-} B$ может оказаться пустым множеством.

Обозначим

μ_{ij} — функция Минковского множества $A_i - A_j$, $\forall\ i, j = 1,\dots,m$,

ν_i — функция Минковского множества $N \overset{*}{-} A_i$, $\forall\ i = 1,\dots,m$.

Из п. 1. следует, что условия (5), (7) можно переписать в виде

$$\mu_{ij}(x_i - y_j) \geq 1, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,i,\ \nu_i(x_i) \leq 1, \quad i = 1,\dots,m.$$

Включение множеств A_i в N является упаковкой этих множеств, которая может не быть оптимальной по разным критериям.

Рассмотрим функционал $f(x_1,\dots, x_n) \to \min$.

Под функционалом можно понимать, например, периметр, объем, центр тяжести.

3. ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ МИНКОВСКОГО ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОЖЕСТВ

1. **Декартово произведение множеств.** Пусть множество M представимо в виде декартова произведения множеств, а именно

$$M = M_1 \times \ldots \times M_k, \text{ где } M_1 \subset E^{n_1}, \ \ldots,\ M_k \subset E^{n_k},\ n_1 + \ldots + n_k = n.$$

Тогда $\mu_M(x) = \max\limits_i \mu_{M_i}(x^i)$.

Действительно, $x \in \lambda M$ тогда и только тогда, когда $x^i \in \lambda_i M_i$, $\forall i = 1,\dots,n$.

2. **Выпуклое центральносимметричное множество**. Пусть C — выпуклое, уравновешенное (центральносимметричное) множество, и $0 \in \operatorname{int} C$. $\mu_C(x)$ является нормой вектора x в пространстве R^n.

Пусть $A_i = r_i\, C$. Если $A = a\,C$, $B = b\,C$, то $A \pm B = (a+b)\,C$, $a, b > 0$.

Тогда $\mu_{A\pm B}(x) = \dfrac{1}{a+b}\mu_C(x)$.

3. **Отрезок.** Пусть $C = [-1, 1]$ (рис. 1).

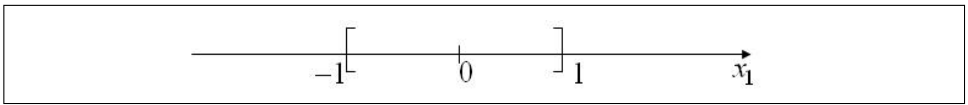

Рис. 1. Отрезок

Тогда $\mu_C(x_1) = |x_1|$

Пусть $C_1 = a_1 C = a_1[-1, 1]$. Тогда $\mu_{C_1}(x_1) = \dfrac{1}{a_1}|x_1|$.

4. **Параллелограмм.** Пусть $M = a_1 C \times \ldots \times a_n C$. Тогда

$$\mu_M(x) = \max\left\{\frac{1}{a_i}|x_i|\right\}.$$

5. **Шар.** Пусть $M = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le r^2,\ r > 0\right\}$. Тогда

$$\mu_M(x) = \ = \frac{\|x\|}{r} \text{ или } \mu_M(x) = \frac{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}{r}.$$

6. **Эллипсоид.** Пусть D — положительно-определенная симметричная матрица размерности $n \times n$.

Под эллипсом будем понимать множество вида $M = \left\{x \in R^n :\right.$ $\left.\langle Dx,\ Dx\rangle \le a^2\right\}$. Тогда $\mu_M(x) = \dfrac{\|D\,x\|}{a}$.

Если $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, то $\mu_M(x) = \dfrac{\sqrt{d_1^2 x_1^2 + \cdots + d_n^2 x_n^2}}{a}$.

Последнее выражение можно переписать

$$\mu_M(x) = \frac{\sqrt{d_1^2 x_1^2 + \cdots + d_n^2 x_n^2}}{a} = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2}}, \text{ где } a_i = \frac{a}{d_i},\ i = 1, \ldots, n.$$

7. **Цилиндр.** На основании примера 1 разобьем цилиндр (рис. 2) на декартово произведение множеств: отрезка и шара. Т.е. приведем к виду

$$M = M^1 \times M^2,$$

где

$$M^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 :\ x_1^2 + x_2^2 \le r^2,\ r > 0\},$$

$$M^2 = \left\{x_3 \in R :\ -c \le x_3 \le c,\ c > 0\right\}.$$

Воспользуемся тем, что в силу примера 1 для функции Минковского справедливо:

$$\mu = \inf\left\{\lambda > 0 :\ x^1 \in \lambda M^1,\ x^2 \in \lambda M^2\right\} = \max\left\{\mu_1(x^1),\ \mu_2(x^2)\right\}$$

Тогда $\mu_M = \max\left\{ \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{r}, \ \frac{|x_3|}{c} \right\}$.

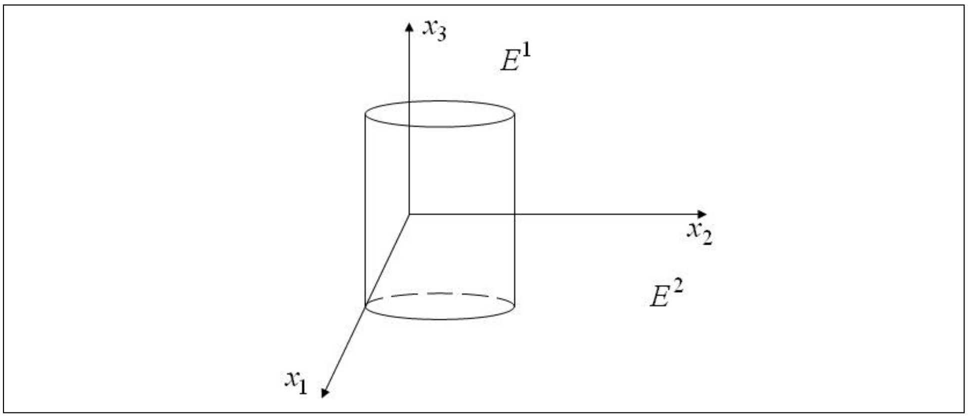

Рис. 2. Цилиндр

8. **Сумма прямоугольника и круга.** Пусть имеется прямоугольник со сторонами $2a_1$ и $2a_2$, и окружность радиуса r (рис. 3).

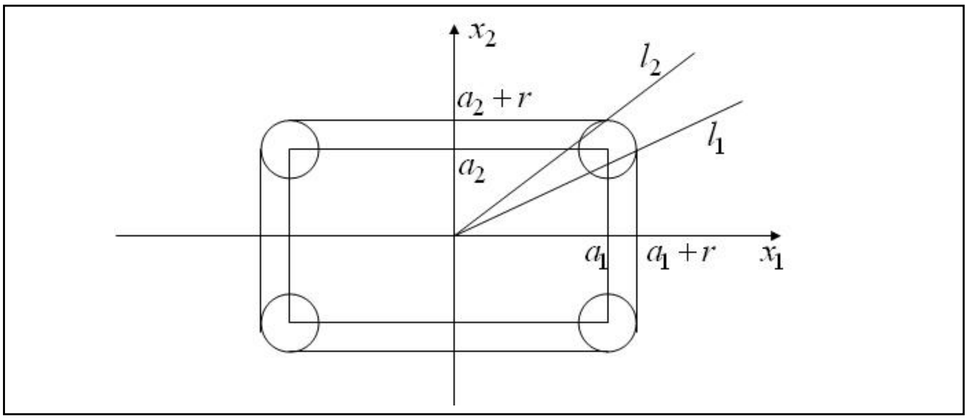

Рис. 3. Сумма прямоугольника и круга

Найдем функцию Минковского в первой четверти. В остальных четвертях руководствуемся аналогичными рассуждениями.

Для точек, лежащих в области между осью OX_1 и прямой l_1, $\mu(x) = \frac{x_1}{a_1 + r}$. Для точек, лежащих в области между прямой l_2 и осью OX_2 $\mu(x) = \frac{x_2}{a_2 + r}$.

Осталось найти функцию Минковского для точек, лежащих в области между прямыми l_1 и l_2. Для начала введем обозначение $\frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}$. Тогда

$$\left(\bar{\lambda} x_1 - a_1\right)^2 + \left(\bar{\lambda} x_2 - a_2\right)^2 = r^2.$$

Решением данного квадратного уравнения будут

$$\overline{\lambda} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 \pm \sqrt{r^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \left(a_2 x_1 - a_1 x_2\right)^2}}{x_1^2 + x_2^2}. \qquad (8)$$

Определим знак. Для этого воспользуемся вспомогательной точкой с координатами (a_1, a_2). Для нее точно известно, что $\overline{\lambda} = 1$. Подставим $\overline{\lambda} = 1$ и координаты точки в (8):

$$1 = \frac{a_1^2 + a_2(a_2 + r) \pm \sqrt{r^2\left(a_1^2 + (a_2 + r)^2\right) - \left(a_1 a_2 - a_1(a_2 + r)\right)^2}}{a_1^2 + (a_2 + r)^2} =$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2(a_2 + r) \pm r(a_2 + r)}{a_1^2 + (a_2 + r)^2}.$$

Для получения единицы следует взять знак «$+$».

Таким образом, для точек, лежащих в области между прямыми l_1 и l_2, функция Минковского имеет вид

$$\mu(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \sqrt{r^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \left(a_2 x_1 - a_1 x_2\right)^2}}.$$

Функция Минковского в остальных четвертях находится аналогично.

Таким образом, представленные примеры иллюстрируют использование функции Минковского для описания условия непересечения различных множеств.

Необходимость задания условий непересечения множеств возникает при формулировании различных задач, в том числе задач оптимизации. Примером использования функции Минковского для описания условий непересечения при формулировке одной оптимизационной задачи является работа [14].

ВЫВОДЫ

Построены аналитические формулы функции Минковского для разности (суммы) различных выпуклых множеств таких как параллелепипеды, эллипсоиды, круги и прямоугольники. Разработанный метод позволит строить приближенные функции Минковского для разности различных тел.

Предложенный подход применяется для решения задач оптимального размещения грузов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. — М.: Мир, 1990. — 413 с.
2. *Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А.* Метод линеаризации для обратно-выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 6. — С. 86–97.

3. *Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А.* Метод обратно-выпуклого программирования и укладка параллелепипедов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 16–26.
4. *Рвачев В.Л., Стоян Ю.Г.* Алгоритм решения задачи оптимального раскроя с круговыми выкройками при наличии ограничений на расстояния между парами выкроек // Кибернетика. — 1965. — № 3. — С. 73–83.
5. *Рвачев В.Л., Стоян Ю.Г.* К задаче об оптимальном размещении круговых выкроек // Кибернетика. — 1965. — № 4. — С. 70–75.
6. *Stoyan Y.G., Yaskov G.N.* Mathematical model and solution method of optimization problem of placement of rectangles and circles taking into account special constraints // Intertional Transaction Operation Research. — 1998. — **43** (1). — P. 45–57.
7. *Rebennack S., Kallrath J., Panos M. Pardalos.* Column enumiration based decomposition techniques for a class of non-convex MINLP problems // Journal of Global Optimization. — 2009. — **43**. — P. 277–297.
8. *Kallrath J.* Cutting circles and polygons from area-minimizing rectangles // Journal of Global Optimization. — 2009. — **43**. — P. 299–328.
9. *Stoyan Y.G., Yaskov G.N.* A mathematical model and solution method For the problem of placing various-sized circles into a strip // European Journal of Operation Research. — 2004. — **156**. — P. 590–600.
10. *Minkowski H.* Verhandlungen des III internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg. — Berlin, 1904. — P. 164–173.
11. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 320 с.
12. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх I // ДАН СССР. — 1967. — **174**, № 6. — С. 1278–1280.
13. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С.Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: МГУ, 1984. — 64 с.
14. *Остапенко В.В., Соболенко Л.А.* Упаковка различных эллипсоидов в параллелепипед с минимальной суммой сторон // Матеріали XI міжнар. наук.-техн. конф. «Системний аналіз та інформаційні технології» 26–30 травня 2009 р. — Киев: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2009. — С. 168.

Поступила 03.12.2009