

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Е.В. МОСКАЛЕВА

Предложена математическая модель расчета термонапряженного состояния оболочечных конструктивных элементов в виде уточненной теории анизотропных оболочек, построенной методом гипотез. Исследуется термонапряженное состояние конструктивного оболочечного элемента с учетом полученных экспериментальных данных.

В работе приводится математическая модель расчета термонапряженного состояния оболочечных конструктивных элементов в виде уточненной теории анизотропных оболочек, построенной методом гипотез. Эту теорию можно рассматривать как второе приближение при решении краевой задачи пространственной теории упругости методом взвешенных невязок [1].

**Цель работы** — предложить математическую модель оценивания термонапряженного состояния конструктивного элемента спускаемого аппарата (СА) в виде цилиндрической оболочки из реального теплозащитного материала. С учетом фактического распределения температуры в слое теплозащитного покрытия в процессе спуска аппарата с орбиты в плотных слоях атмосферы.

Теплозащитный материал (ТЗМ) представляет собой стеклотекстолит из кремнеземных тканей на основе фенолформальдегидного связующего (ФФС) со стандартным соотношением объемов наполнителя и матрицы: 67 и 33 % [2].

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Оболочка рассматривается как анизотропное упругое тело, имеющее в каждой точке плоскость упругой симметрии, касательную к поверхности  $z = \text{const}$ . Со срединной поверхностью оболочки связана система ортогональных криволинейных координат  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $z$ , причем координатная линия  $z$  направлена перпендикулярно к срединной поверхности. Предполагается отсутствие объемных сил и не учитываются члены порядка  $k_i h$  по сравнению с единицей.

На лицевых поверхностях оболочки заданы статистические граничные условия

$$\sigma_{i3}^{\pm} = q_i^{\pm}, \quad i = \overline{1,3} \quad \text{при } z = \pm h/2, \quad (1)$$

где  $q_i = q_i(\alpha_1, \alpha_2)$ .

Для приведения краевой задачи трехмерной теории упругости к двумерной введем следующие гипотезы:

- статистические: поперечные касательные  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$ , и нормальное  $\sigma_{33}$  напряжения распределены по толщине оболочки по закону полинома соответственно четвертой и пятой степени от координаты  $z$ , т.е.

$$\sigma_{i3} = \frac{m_i}{h} + \frac{q_i z}{h} \left( \varphi_i + \psi_i \frac{z}{h} + \chi_i \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad i=1,2;$$

$$\sigma_{33} = \frac{m_3}{h} + \frac{q_3 z}{h} \left( \varphi + \psi \frac{z}{h} + \chi \frac{z^2}{h^2} + \delta \frac{z^3}{h^3} \right) \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right);$$

- кинематические: тангенциальные  $u_1$  и  $u_2$ , и нормальная  $u_3$  составляющие вектора перемещения являются полиномами соответственно пятой и четвертой степени от координаты  $z$ .

Представим напряжения и перемещения в виде линейных комбинаций полиномов Лежандра, т.е.

$$\sigma_{i3} = \sum_{k=0}^4 \sigma_{i3}^{(k)} P_k, \quad u_i = \sum_{k=0}^5 u_i^{(k)} P_k, \quad i=1,2;$$

$$\sigma_{33} = \sum_{k=0}^4 \sigma_{33}^{(k)} P_k, \quad u_3 = \sum_{k=0}^5 u_3^{(k)} P_k.$$

В принятых выражениях  $\varphi_i, \psi_i, \chi_i, \varphi, \psi, \chi, \delta, u_i^{(k)}$  — функции координат  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ;  $h$  — толщина пластины;  $P_k(\zeta)$  — полиномы Лежандра;  $\zeta = 2z/h$ ;  $q_i = q_i^+ - q_i^-$ ;  $m_i = (q_i^+ - q_i^-)h/2$ .

С учетом введенных гипотез примем для потенциальной энергии деформации:

$$V = \frac{h}{2} \iint_S \sum_{i,j=1}^3 \left( \left[ \sigma_{ij}^{(0)} e_{ij}^{(0)} + \frac{1}{3} \sigma_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(1)} + \frac{1}{5} \sigma_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(2)} + \frac{1}{7} \sigma_{ij}^{(3)} e_{ij}^{(3)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{5} \sigma_{ij}^{(4)} e_{ij}^{(4)} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2)$$

(по каждой паре индексов суммирование производится только один раз), где  $\sigma_{ij}^{(0)}$  и  $\sigma_{ij}^{(1)}$  — не самоуравновешенные по толщине оболочки составляющие напряжений в их разложениях в ряды полиномам Лежандра:

$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ij}^{(k)} P_k(\zeta)$ , где  $\zeta = 2z/h$ ;  $\sigma_{ij}^{(k)}$  ( $k \geq 2$ ) — самоуравновешенные составляющие напряжений.

Введем в рассмотрение интегральные величины напряжений

$$(T_1, M_1, \tilde{T}_1, \tilde{M}_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(1, z, P_2, P_3) dz,$$

$$\begin{aligned}
 (T_2, M_2, \tilde{T}_2, \tilde{M}_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22}(1, z, P_2, P_3) dz, \\
 (S, H, \tilde{S}, \tilde{H}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}(1, z, P_2, P_3) dz, \\
 (Q_1, R_1, \tilde{Q}_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13}(1, z, P_2) dz, \\
 (Q_2, R_2, \tilde{Q}_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23}(1, z, P_2) dz, \\
 T_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} dz, \quad M_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} z dz.
 \end{aligned}$$

Здесь и всюду далее не учитываются члены порядка  $k_i h$  по сравнению с единицей.

Очевидны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ii}^{(0)} &= \frac{T_i}{h}, \quad \sigma_{ii}^{(1)} = \frac{6M_i}{h^2}, \quad \sigma_{ii}^{(2)} = \frac{5\tilde{T}_i}{h}, \quad \sigma_{ii}^{(3)} = \frac{7\tilde{M}_i}{h}, \quad i=1,2, \\
 \sigma_{12}^{(0)} &= \frac{S}{h}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \frac{6H}{h^2}, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \frac{5\tilde{S}}{h}, \quad \sigma_{12}^{(3)} = \frac{7\tilde{H}}{h}, \\
 \sigma_{i3}^{(0)} &= \frac{Q_i}{h}, \quad \sigma_{i3}^{(1)} = \frac{6R_i}{h}, \quad \sigma_{i3}^{(2)} = \frac{5\tilde{Q}_i}{h}, \quad i=1,2, \\
 \sigma_{33}^{(0)} &= \frac{T_0}{h}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \frac{6M_0}{h^2}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Используя полученные формулы и граничные условия (1), находим

$$\sigma_{i3}^{(3)} = \frac{q_i}{2} - \frac{6R_i}{h^2}, \quad \sigma_{i3}^{(4)} = \frac{1}{h}(m_i - Q_i - 5\tilde{Q}_i), \quad i=1,2.$$

Аналогично получаем

$$\sigma_{i3}^{(4)} = \frac{m_3 - T_0}{h} - \sigma_{33}^{(2)}, \quad \frac{6R_i}{h^2}, \quad \sigma_{33}^{(5)} = \frac{q_3}{2} - \frac{6M_0}{h^2} - \sigma_{33}^{(3)}.$$

Представляя компоненты деформации также в виде разложений в ряды по полиномам Лежандра  $e_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} e_{ij}^{(k)} P_k(\zeta)$  непосредственным вычислением находим

$$e_{11}^{(k)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2^{(k)} + k_1 u_3^{(k)},$$

$$e_{22}^{(k)} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1^{(k)} + k_2 u_3^{(k)},$$

$$w_{1z}^{(k)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1^{(k)}, \quad w_{2z}^{(k)} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2^{(k)},$$

$$e_{12}^{(k)} = w_{1z}^{(k)} + w_{2z}^{(k)} \quad (k = \overline{0, 5}).$$

Используя зависимости

$$e_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z},$$

$$e_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial z},$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

а также формулу  $\frac{dP_k}{dz} = \frac{2}{h}(2k-1)P_{k-1} + \frac{dP_{k-2}}{dz}$ , получаем следующие выражения для компонент деформации  $e_{13}^{(k)}$  и  $e_{33}^{(k)}$ :

$$e_{13}^{(0)} = \varepsilon_{13}^* + \frac{2}{h}(u_1^{(3)} + u_1^{(5)}), \quad e_{13}^{(*)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \alpha_1} + \frac{2}{h} u_1^{(1)},$$

$$e_{13}^{(1)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \alpha_1} + \frac{6}{h}(u_1^{(2)} + u_1^{(4)}), \quad e_{13}^{(2)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \alpha_1} + \frac{10}{h}(u_1^{(3)} + u_1^{(5)}),$$

$$e_{13}^{(3)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial \alpha_1} + \frac{14}{h} u_1^{(4)}, \quad e_{13}^{(4)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^{(4)}}{\partial \alpha_1} + \frac{18}{h} u_1^{(5)}$$

( $e_{23}^{(k)}$  — аналогично),

$$e_{33}^{(0)} = \frac{2}{h}(u_3^{(1)} + u_3^{(3)}), \quad e_{33}^{(1)} = \frac{6}{h}(u_3^{(2)} + u_3^{(4)}),$$

$$e_{33}^{(2)} = \frac{10}{h} u_3^{(3)}, \quad e_{33}^{(3)} = \frac{14}{h} u_3^{(4)}. \quad (4)$$

Соотношения упругости в уточненной теории анизотропных оболочек несложно найти непосредственным вычислением, интегрируя соотношения (2) и (3) с весами, равными  $P_0, P_1, P_2, P_3$ :

$$\sigma_{11}^{(k)} = C_{11} e_{11}^{(k)} + C_{12} e_{22}^{(k)} + C_{16} e_{12}^{(k)} - C_{13} e_{33}^{(k)},$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = C_{12} e_{11}^{(k)} + C_{22} e_{22}^{(k)} + C_{26} e_{12}^{(k)} - C_{23} e_{33}^{(k)},$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = C_{16} e_{11}^{(k)} + C_{26} e_{22}^{(k)} + C_{66} e_{12}^{(k)} - C_{36} e_{33}^{(k)},$$

$$\sigma_{13}^{(k)} = K_{11}e_{13}^{(k)} - K_{12}e_{23}^{(k)}, \quad \sigma_{23}^{(k)} = -K_{12}e_{13}^{(k)} + K_{22}e_{23}^{(k)}. \quad (5)$$

Аналогично, используя равенство (4), получаем

$$e_{33}^{(k)} = \tilde{a}\sigma_{33}^{(k)} + C_{13}e_{11}^{(k)} + C_{23}e_{22}^{(k)} + C_{36}e_{12}^{(k)}.$$

Уравнения равновесия и граничные условия получаем интегрированием с весами  $P_0, P_1, P_2, P_3$  уравнений равновесия и граничных условий на боковой поверхности упругого тела.

Температурное поле для  $i$ -того слоя оболочки определяется из уравнения теплопроводности, которое в цилиндрической системе координат выражается в виде [4]

$$K_r^i \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T^i}{\partial r} \right) + rK_z^i \frac{\partial^2 T^i}{\partial z^2} + \frac{K_\theta^i}{r} \frac{\partial^2 T^i}{\partial \theta^2} = 0, \quad (6)$$

где  $K_r^i = K_r^i(r)$ ,  $K_z^i = K_z^i(r)$ ,  $K_\theta^i = K_\theta^i(r)$  — коэффициенты теплопроводности, действующей в направлениях  $r, z, \theta$ . Предполагается, что выполняются условия тепловой непрерывности по всей поверхности контакта слоев:

$$T^i = T^{i+1}; \quad K_r^i \frac{\partial T^i}{\partial r} = K_r^{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial r}.$$

В рассматриваемом случае торцы цилиндра  $z = 0, z = 1$  не смещаются в своих плоскостях и не подвержены воздействию нормальной нагрузки. При построении разрешающей системы уравнений мы полагали, что входящие в нее неизвестные функции должны удовлетворять условиям сопряжения смежных слоев и условиям на ограничивающих поверхностях  $r = r_0, r = r_N$ .

После совместного преобразования уравнений обобщенного закона Гука (1) и теплопроводности (6) с последующим применением метода разделения переменных для каждой пары значений  $k$  и  $n$  для  $i$ -го слоя получаем разрешающую систему уравнений.

## ОЦЕНКА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКТИВНОГО ОБОЛОЧЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Исследуется термонапряженное состояние конструктивного оболочечного элемента с учетом полученных экспериментальных данных. Оценка термонапряженного состояния конструктивного оболочечного элемента в виде цилиндрической оболочки из стеклотекстолита на полимерной матрице для условий, моделирующих реальные при спуске СА с орбиты, выполнена в соответствии с фактическим распределением температуры в слое теплозащиты в процессе спуска аппарата в плотных слоях атмосферы [2].

Физико-механические характеристики для расчета температурных напряжений определены экспериментально. Коэффициенты температурного расширения  $\alpha$  соответствовали условиям, моделирующие реальные; модули упругости  $E$  при растяжении и сжатии и сдвига  $G_{z\theta} = G_{r\theta} = G_{\gamma\theta}$  получены в

интервале температур 20...1000 °С при нагреве со скоростью 100 град/мин в нейтральной газовой среде [3].

Расчет выполнен для нагреваемой внешним температурным воздействием полый цилиндрической оболочки из стеклотекстолита на основе фенол-формальдегидной смолы длиной  $L=340$  мм, радиусом срединной поверхности  $R=90$  мм и толщиной стенки  $\delta=5$  мм. Некоторые результаты решения задачи в виде распределения максимальных величин перемещений  $u_r$  и тангенциальных напряжений  $\tau_{z\theta}$  и  $\tau_{r\theta}$  по длине и толщине теплозащитного покрытия приведены соответственно на рис. 1 и рис. 2.

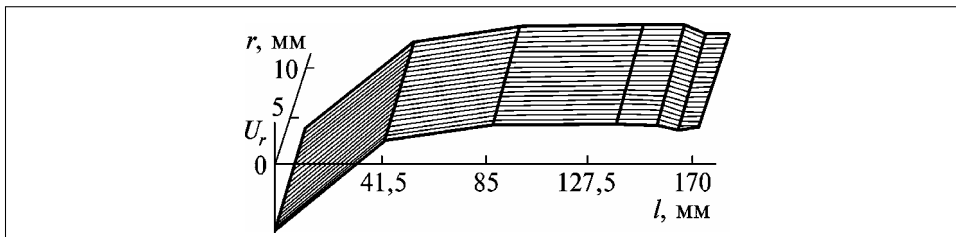


Рис. 1. Распределение радиальных перемещений  $u_r$  по длине и толщине теплозащитного покрытия из стеклотекстолита на основе ФФС

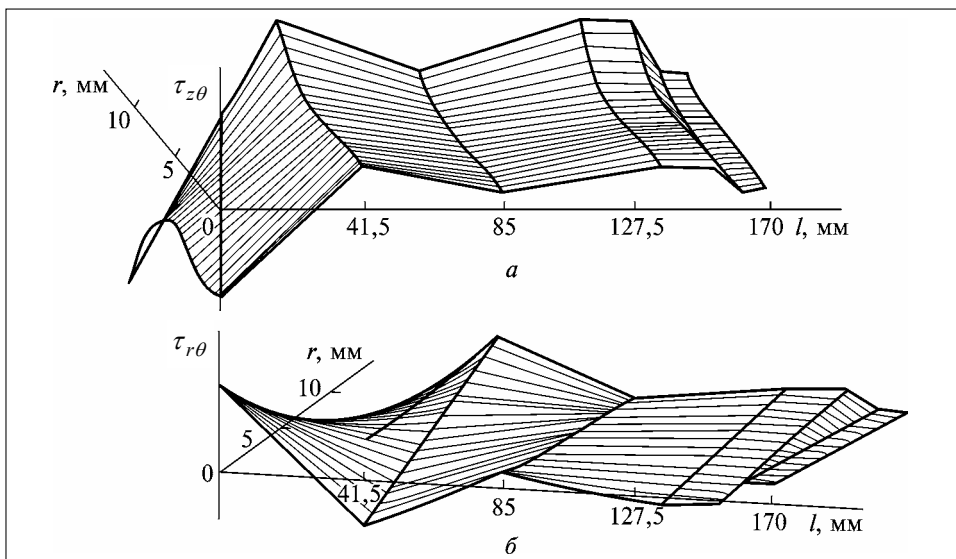


Рис. 2. Распределение величин тангенциальных напряжений  $\tau_{z\theta}$  и  $\tau_{r\theta}$  по длине и толщине теплозащитного покрытия из стеклотекстолита на основе ФФС

Тангенциальные напряжения  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{rz}$  изменяются как по толщине, так и вдоль длины цилиндра по нелинейному закону. Наибольшими являются растягивающие тангенциальные напряжения, действующие на глубине 2–2,5 мм от наружной поверхности цилиндра в диапазоне температур 300...700 °С.

В соответствии с полученными данными, наибольшие термические напряжения для теплозащитной оболочки с толщиной  $\delta=5$  мм получены в наружных слоях нагреваемой поверхности;  $\tau_{z\theta} = -115,36$  МПа.

В рассмотренном случае тангенциальные термические напряжения в цилиндрической оболочке из стеклотекстолита на основе ФФС развиваются вследствие анизотропии температурного расширения композита: при нагреве в результате термодеструкции в плоскости армирования теплозащитного материала в одной точке одновременно могут происходить расширение и усадка, что неизбежно приводит к деформациям сдвига, которые, накладываясь на термические напряжения в материале вследствие температурных градиентов, являются причиной возникновения трещин без приложения каких-либо внешних сил.

## ВЫВОДЫ

Проведенные исследования и сопоставление полученных результатов с расчетами, выполненными на основании уравнений теории упругости [5] показали, что привлечение предлагаемой здесь уточненной теории анизотропных оболочек, построенной методом гипотез, позволяет получать результаты исследований, совпадающих до 5–7% с расчетами в трехмерной постановке.

Использование уточненной теории анизотропных оболочек, построенной методом гипотез, позволит проводить расчеты конструктивных оболочечных элементов с различными вариантами граничных условий и в широком диапазоне изменения физико-механических характеристик композиционного материала.

Проведение вычислительного эксперимента позволит выбирать материалы с оптимальными физико-механическими характеристиками, обеспечивающими прочность и надежность функционирования СА.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных оболочек. — СПб.: Изд-во С-Петербургского университета, 1996. — 278 с.
2. Грачева Л.И. Термическое деформирование и работоспособность материалов тепловой защиты. — Киев: Наукова думка, 2006. — 294 с.
3. Gracheva L.I. Experimental Modeling of Actual Thermal Loading in the Investigation into Deformation of Decomposing Coatings on the Descent Trajectory / Modeling, Simulation and Optimization (MSO 2004): Proc. of the IASTED Int. Conference (August 17–19 2004, Kauai, USA). — Canada: IASTED, 2004. — P. 281–286.
4. Pankratova N.D. Thermo-stressed State of Anisotropic Non-homogeneous Constructiv Elements // Recent Advances in Solids/Structures and Application of Metallic Materials-1997-ASME International Mechani-Engineering Congress, Dallas, Texas. Pvp-vol. 369, New York, 1997. — P. 203–210.
5. Pankratova N.D. Deformation of the Anisotropic Non-homogeneous Cylinder // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. —1996. — 34. — № 4. — P. 733–748.

Поступила 14.01.2010