УДК 004.8

НЕЧЕТКИЙ ФОНДОВЫЙ ПОРТФЕЛЬ. ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ

Н.А. МУРГА

Изучается нечеткий фондовый портфель, функции принадлежности активов которого имеют треугольный вид. Исследована зависимость риск-доходности портфеля для различных расположений функций принадлежностей активов и критериального значения. Показывается, что общая задача оптимизации может быть сведена к двумерному случаю и приводятся некоторые алгоритмы оптимизации портфеля. Рассмотрены некоторые закономерности поведения зависимости риск-доходность портфеля.

ВСТУПЛЕНИЕ

Задача оптимизации доходности фондового портфеля имеет полувековую историю, но это не уменьшает ее актуальности и сегодня. Впервые математическая модель данной задачи была предложена Марковицем. Однако, предложенная им модель имеет ряд недостатков, например, параболический вид функции полезности, учет как риск, ситуация, когда инвестор получает доход выше ожидаемого и др. Все эти недостатки описаны в работах [1], [2] и мы на них останавливаться не будем. В этих работах предложен путь разрешения данных проблем, выполнив постановку данной задачи в терминах нечеткой логики. В данной работе анализируются определенные аспекты связанные с решением задачи оптимизации фондового портфеля в нечеткой постановке, а также предложены некоторые факты, позволяющие на практике упростить процесс оптимизации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания исследуемой модели обратимся к работам [1] и [2]. Допускается, что значение доходности каждого определенного актива можно задать в виде нечеткого множества с определенной степенью принадлежности данному множеству. Конкретно в данной работе используется треугольный вид нечетких множеств, называемый для простоты «треугольными нечеткими числами». Каждое треугольное нечеткое число задается, де-факто, своим минимальным, *наиболее ожидаемым* (не обязательно средним) и максимальным значением. Запишем, соответственно, символьное выражение этого:

$$r = \left(r_{\min}\ \bar{r}\ r_{\max}\right), \tag{1}$$

где r — треугольное нечеткое число, $r_{\min}$ — минимальное его значение, $\bar{r}$ — наиболее ожидаемое, $r_{\max}$ — максимальное.

Задается в виде треугольного нечеткого числа критериальное (r^*) значение доходности для фондового портфеля целиком и вычисляется функция возможности «попадения» доходности портфеля за значение данного критерия в худшую сторону, то есть — значение доходности портфеля меньше критериального значения. Обозначается данная функция как $\beta(\vec{r}, \vec{x}, r^*)$, где $\vec{r} = (r_1 \ldots r_n)$ — вектор доходностей активов портфеля, а $\vec{x} = (x_1 \ldots x_n)$ — вектор долей активов в портфеле. Эта функция называется уровнем риска портфеля.

Составляется следующая задача:

$$\max\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times \overline{r_r}\right) \wedge \left(\beta\left(\vec{r}, \vec{x}, r^*\right) \le \text{const}\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right) \wedge (0 \le x_i \le 1) \wedge (i = \overrightarrow{1, n}). \quad (2)$$

Данная задача называется прямой задачей.

Существует двойственная к ней задача, записывающаяся следующим образом:

$$\min\left(\beta\left(\vec{r}, \vec{x}, r^*\right)\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times \overline{r_r} \ge \text{const}\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right) \wedge \left(0 \le x_i \le 1\right) \wedge (i = \overrightarrow{1, n}). \quad (3)$$

Цель работы — изучение свойств данной математической модели с целью облегчения процесса оптимизации.

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЧЕТКОГО ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ

В работах [1], [2], [5] показана зависимость вида функции риска β от взаиморасположения r_i, $i = \overrightarrow{1, n}$ и r^* на плоскости «доходность – функция принадлежности».

Зависимость может иметь не очевидную форму.

Рассмотрим конкретный случай и изобразим его для наглядности на рис. 1.

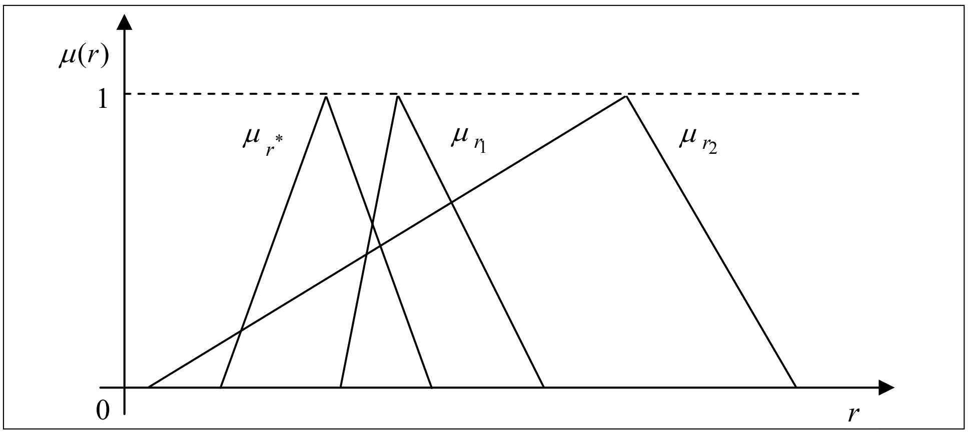

Рис. 1. Особый расположения функций принадлежностей на плоскости «доходность-функция принадлежности»

Рассмотрим особенности этого случая. В работах [1], [2] и [5] показано, что, если обозначить r как доходность всего портфеля активов (очевидно, что $r=\sum_{i=1}^{n} r_i \times x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1)$, к примеру, $\left(r_{\min} < r^*_{\min}\right)$, то функция риска β будет иметь вид β_1. Если рассматривать случай $(r_{\min} > r^*_{\min}) \wedge \wedge (r_{\min} < r^*_{\max})$, то функция риска β будет иметь вид β_2. Из рис. 1 видно, что мы имеем дело как с одним случаем, так и с другим. Мы имеем неопределенность.

Первый подход к разрешению данной неопределенности предложен в работе [5].

Серьезным недостатком данного подхода было то, что он проводил линейную аппроксимацию данной проблемы. Естественно, оптимизация давала не точные результаты.

Позднее был проведен более глубокий анализ проблемы и сделан вывод, что можно нелинеаризировать задачу и вид ее будет достаточно прост.

Количество видов функции риска для нечеткого критериального значения превышает десяток. Подробное рассмотрение каждого случая заняло бы очень много места, и, быть может, отвлекло бы внимание от главных фактов. Аналогичность логических выкладок позволяет ограничиться следующим случаем. Рассмотрим только случаи: $(r_{\min} < r^*_{\min}) \wedge (\bar{r} > \overline{r^*}) \wedge \wedge (r_{\max} > r^*_{\max})$, $(r_{\min} > r^*_{\min}) \wedge (\bar{r} > \overline{r^*}) \wedge (r_{\max} > r^*_{\max})$ и промежуточный между ними случай (далее — промежуточный случай).

Рассмотрим нелинеаризацию промежуточного случая.

Показана подобность случаев, когда в одном случае рассматриваются два актива, а в другом — больше чем два. Для простоты рассуждений подразумевается, что рассматривается случай оптимизации распределения двух активов. Выясним, меняет ли функция β свою структуру один раз при изменении x_1 от 0 до 1. Ответ на данный вопрос положителен, т.к. при $r_{\min} < r^*_{\min}$ функция β имеет структуру β_1, а при $r_{\min} < r^*_{\min}$ функция β имеет структуру β_2. Следовательно, изменение структуры происходит именно в точке $r_{\min} = r^*_{\min}$.

Необходимо ответить на вопрос: происходит ли скачок в данной точке. Ответ на данный вопрос отрицателен. Очевидно, что в данной точке система имеет одно значение уровня риска (доказательство данного факта очевидно и будет лишь загромождать изложение). Скачок же подразумевает существование двух значений. Противоречие. Следовательно, функция риска в данном случае непрерывна.

Отсюда получается очень важное с практической точки зрения следствие. Значения функций β_1 и β_2 в точке $\bar{x} : r_{\min} = r^*_{\min}$ должны совпадать. Расчет интегралов-формул для определения вида данных функций риска весьма трудоемок и высока вероятность ошибок расчетов, а совпадение значений данных функций в вышеуказанной точке является необходимым условием правильности расчета функций. Если же совпадения нет — значит, есть ошибки в расчетах.

Находится значение данной точки для случая двух активов. Итак, $\sum_{i=1}^{2} x_i = 1$, $\sum_{i=1}^{2} r_{i_{\min}} \times x_1 = r^*_{\min}$. Таким образом, получается: $r_{i_1} \times x_1 + r_{i_2} \times$ $\times (1 - x_1) = r^*_{\min}$. Решая данное уравнение относительно x_1, получается:

$$x_1 = \frac{r^*_{\min} - r_{i_2}}{r_{i_1} - r_{i_2}}. \tag{4}$$

И, соответственно:

$$x_2 = 1 - x_1 = \frac{r^*_{\min} - r_{i_1}}{r_{i_2} - r_{i_1}}. \tag{5}$$

Рассматривается вопрос оптимизации распределения активов.

Рассуждения, предложенные ниже будут касаться как прямой, так и обратной задачи, но упоминаться будет только прямая задача. Вызвано это тем, что логика рассуждений в этих случаях аналогична, отличаться будут только методы решения. Наибольший интерес будет представлять решение прямой задачи, упоминания и детальные рассуждения касательно двойственной задачи будут только загромождать даные.

Следующий вопрос, на который необходимо найти ответ: существует ли единственное решение для прямой задачи оптимизации в общем n - мерном случае, если решение есть. Ответ на данный вопрос отрицателен. Рассматривается случай двух активов. Значение доходности портфеля может быть представлено в виде $\overline{r} = \overline{r_1} \times x + \overline{r_2} \times (1 - x)$, $1 \geq x \geq 0$. Очевидно, что каждому $x \in [0;1]$ соответствует однозначно в обе стороны свое $\overline{r}$.

В случае трех активов $\overline{r} = \overline{r_1} \times x_1 + \overline{r_2} \times x_2 + \overline{r_3} \times x_3$, $1 \geq x_i \geq 0$. Здесь $\overline{r}$ уже соответствует отрезок прямой.

Индуктивно продолжая эти рассуждения, приходим к выводу, что в общем n-мерном случае портфель может иметь множество решений мощностью алеф-один. Здесь можно сделать замечание, что имеется еще функция риска, которая ограничена.

Для прояснения картины рассмотрим следующий случай. Пусть есть три актива $r_i = (r_{i\min}, \overline{r_i}, r_{i\max})$, $i = 1,2,3$. Для определенности принимается $r_{1\min} > r_{2\min} > r_{3\min}$, $\overline{r_3} > \overline{r_2} > \overline{r_1}$ и $r_{1\max} < r_{2\max} < r_{3\max}$. Допускается, что получен некоторый оптимум $\overline{r_{\text{opt}}} = \alpha \times \overline{r_1} + (1 - \alpha) \times \overline{r_3}$ согласно рассмотренному выше индуктивному рассуждению $\exists (1 \geq x_1 \geq 0) \wedge (1 \geq x_2 \geq 0) \wedge$ $\wedge (1 \geq x_3 \geq 0) \wedge \left(\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \right) : \overline{r_{\text{opt}}} = \sum_{i=1}^{3} x_i \times \overline{r_i}$. Введя данные x_i риск лишь уменьшается (в некоторых случаях). Следовательно, в общем случае нельзя говорить о существовании единственного решения.

Таким образом, метод, не обеспечивающий в случае необходимости множественности решений, не может считаться универсальным для данной задачи.

Но данную задачу можно упростить следующим образом. У заказчиков оптимизации могут быть различные запросы: предпочтение какому-либо активу (активам), желание диверсифицировать портфель, желание минимизировать риск при максимизации доходности и т.д.

Для конкретных запросов пользователя было построено два алгоритма решения задачи.

Самый простой — алгоритм построения диверсифицированного портфеля.

Суть алгоритма состоит в том, чтобы максимально диверсифицировать (дробить) портфель при одновременной максимизации доходности портфеля.

Множество средних доходностей портфеля — n-мерный симплекс $\sum_{i=1}^{n} x_i \times \overline{r_i}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $1 \ge x_i \ge 0$, $i = \overrightarrow{1,n}$. Если максимальному значению доходности соответствует наименьший риск — оптимальное значение. Иначе рассчитывается центр масс симплекса. Если уровень риска центра масс выше заданного значения — удаляется значение с максимальным риском и ставится центр масс на его место, если ниже, то удаляется вершина симплекса с наименьшим средним значением и наименьшим риском и ставим центр масс на ее место. Если отклонение уровня риска центра масс от заданного значения в меньшую сторону ниже допуска, то рассчитывается центр масс оптимальным значением. Так же рассчитывается центр масс оптимальным значением, если средняя доходность образуемая ним — максимальна, а риск ниже допуска.

Более сложный алгоритм — алгоритм целенаправленного поиска. Цель его работы — найти такое распределение активов, которое будет обеспечивать как можно большее значение доходности портфеля, но при этом уровень риска должен быть меньше заданного.

Рассмотрим его более подробно.

Пусть r_i — треугольное нечеткое число, характеризующее доходность i-го актива.

Тогда доходность всего портфеля можно представить в виде:

$$r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times r_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \in [0;1]. \tag{6}$$

Выберем самый доходный актив.

Для удобства считается, что все наши активы проранжированы по убыванию наиболее ожидаемой доходности.

Преобразуем формулу (6) к виду:

$$r = \alpha_1 \times r_1 + (1 - \alpha_1) \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} r_i . \tag{7}$$

Введем обозначения:

$$\beta_i = \frac{\alpha_{i+1}}{1 - \alpha_1}, \quad i = \overrightarrow{1, n-1}. \tag{8}$$

Обозначим:

$$r'_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \times r_{i+1} \,. \tag{9}$$

Отметим, что из $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ следует

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = 1 \,. \tag{10}$$

Доказательство этого факта очевидно.

Согласно указанному выше, выражение (7) корректно записать в виде:

$$r = \alpha_1 \times r_1 + (1 - \alpha_1) \times r'_2, \tag{11}$$

r'_2 аналогично можно привести к виду (7). При помощи (8) получим r'_3 аналогично (9). Получаем

$$r'_2 = \beta_1 \times r_2 + (1 - \beta_1) \times r'_3 \,.$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не будет получено r'_i, где $i = n - 1$.

Итак, такое разбиение корректно.

Т.к. целью работы является максимизация доходности портфеля, но с условием, что уровень риска будет менее или равен заданному ранее значению, будет логично поступить следующим образом.

(а) Принимается $\alpha_1 = 1$, а $\alpha_i = 0$, $i \neq 1$. Отмечается значение уровня риска. Если оно меньше заданного значения, то процесс оптимизации считается завершенным. Если минимальный уровень риска больше допуска — задача считается неразрешимой.

(в) Далее, задаются начальные $\alpha_1 = \alpha \in (0;1)$ и согласно (7)–(9) выделяется r'_2. Процедура (в) повторяется до тех пор, пока не получим r'_{n-1}.

(с) В итоге получается задача двухмерной оптимизации. Она решается и выполняется подъем на уровень выше. Повторяется (с), пока не будет достигнут первый уровень.

Достигнув первого уровня, повторяется процедура (в)–(с), пока не выполнится следующее условие $|\alpha'_i - \alpha''_i| < \varepsilon$, где α'_i — значение α_i на предыдущей итерации, α''_i — полученное после текущей, $i = \overrightarrow{1,n}$, ε — допуск. После получения данного результата, процесс оптимизации считается завершенным.

Таким образом, процесс многомерной оптимизации сводится к определенному количеству процессов двумерной оптимизации.

Работу завершает исследование случая двумерной оптимизации.

Необходимо отметить, что функция зависимости риска портфеля от наиболее ожидаемого его значения непрерывна. Доказательство этого факта аналогично доказательству непрерывности функции риска в переходном случае, рассмотренном раннее в данной работе.

Исследования проводились следующим образом. Для трех оговоренных случаев написана программа, которая по введенным минимальным, наиболее ожидаемым, максимальным значениям доходностей активов и критерия при заданном шаге строим сетку-массив, содержащую значения долей активов, соответствующие значения доходности портфеля и уровень риска.

Пример работы программы при шаге 0,1 приведен в табл. 1.

Таблица 1. Данные, подающиеся на вход программы для демонстрации работы

Нечетное число	**Параметр**		
	Min	**Mid**	**Max**
Krit	0,1	0,3	0,4
Akt1	0,2	0,5	0,6
Akt2	0,25	0,45	0,55

На выходе программы получаем результаты, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2. Данные, полученные после обработки программой данных табл. 1

Актив		**Profit**	**Risk**
First	**Second**		
0	1	0,45	0,028426
0,1	0,9	0,455	0,029374
0,2	0,8	0,46	0,030322
0,3	0,7	0,465	0,031269
0,4	0,6	0,47	0,032217
0,5	0,5	0,475	0,033164
0,6	0,4	0,48	0,034112
0,7	0,3	0,485	0,035059
0,8	0,2	0,49	0,036007
0,9	0,1	0,495	0,036954
1	0	0,5	0,037902

Таким образом, для различных значений вводимых данных произведено более 400 опытов и построены графики зависимости уровня риска от наиболее ожидаемой доходности портфеля. Здесь описаны лишь обнаруженные закономерности и сделанные выводы. Ниже приводятся следующие примеры.

Пример 1. Значения всех параметров нечеткого числа критериального значения меньше значений соответствующих параметров нечетких чисел активов.

Таблица 3. Данные, которые подаются на вход программы для примера 1.

Нечетное число	**Параметр**		
	Min	**Mid**	**Max**
Krit	0,1	0,3	0,4
Akt1	0,2	0,7	0,9
Akt2	0,25	0,42	0,8

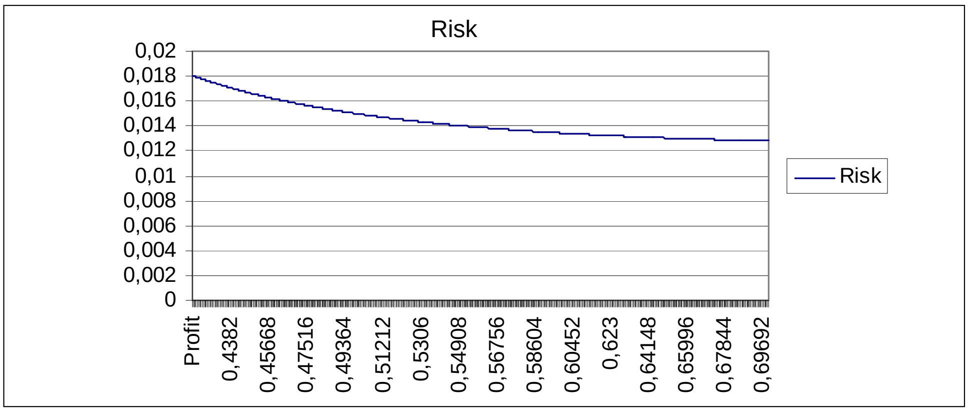

Рис. 2. График зависимости уровня риска портфеля от доходности для примера 1

Изобразим данную ситуацию на рис. 3.

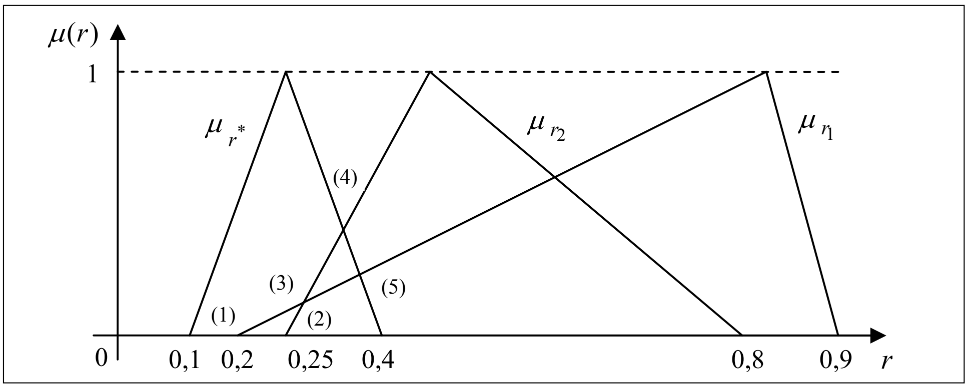

Рис. 3. График расположения функций принадлежности активов и критерия «доходность — функция принадлежности» для примера 1

Необходимо отметить, что точка пересечения левых «крыльев» находится за пересечением их с правым «крылом» критериального значения. Это очень важный факт, т.к. это влияет на вид зависимости риск-доходности были произведены расчеты.

Далее были произведены расчеты: определение точек (А), (Б), (В), (Г), (Д) и площадей: S_1, треугольника (А)(Б)(В) и S_2 — (В)(Г)(Д).

Соответствующие значения равны: (А) — (0,2; 0), (Б) — (0,25; 0), (В) — (0,27576; 0,15152), (Г) — (0,3444; 0,55556), (Д) — (0,36667; 0,33333); $S_1 \approx 0{,}012$, $S_2 \approx 0{,}0037$.

Пример 2. Соотношение параметров аналогично предыдущему примеру, но максимальное значение для второго актива по сравнению с предыдущим примером значительно меньше. Значения параметров представлены в табл. 4.

Таблица 4. Данные, которые подаются на вход программы для примера 2

Нечетное число	**Параметр**		
	Min	**Mid**	**Max**
Krit	0,1	0,3	0,4
Akt1	0,2	0,7	0,9
Akt2	0,32	0,42	0,47

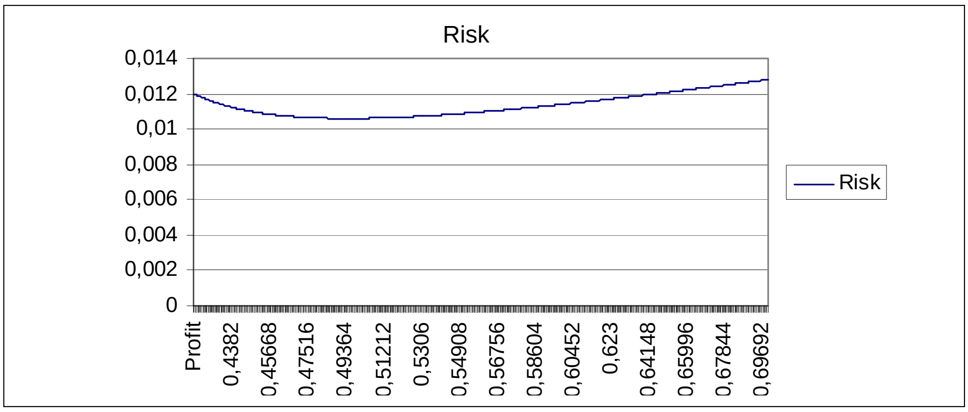

Рис. 4. График зависимости уровня риска портфеля от доходности для примера 2

Данная ситуация изображена на рис. 5.

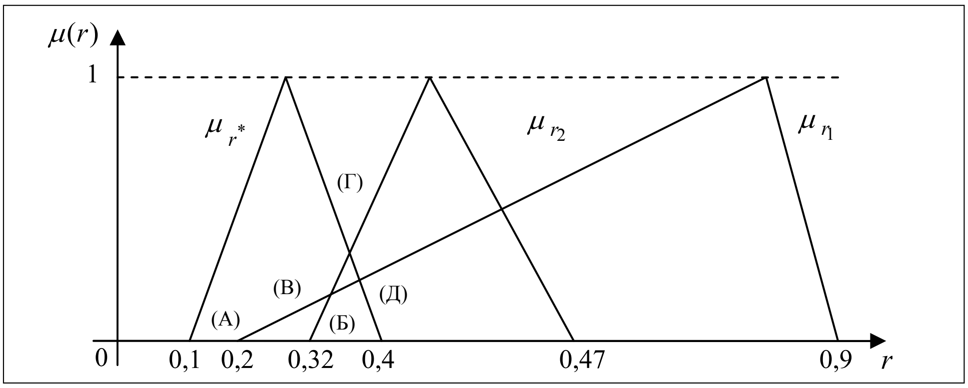

Рис 5. График расположения функций принадлежности активов и критерия «доходность — функция принадлежности» для примера 2

Отмечается, что точка пересечения левых «крыльев» находится за пересечением их с правым «крылом» критериального значения.

Произведены следующие расчеты: определены точки (А), (Б), (В), (Г), (Д) и площадей: S_1, треугольника (А)(Б)(В) и S_2 — (В)(Г)(Д).

Соответствующие значения равны: (А) — (0,2; 0), (Б) — (0,32; 0), (В) — (0,35; 0,3), (Г) — (0,36; 0,4), (Д) — (0,36667; 0,33333); $S_1 \approx 0{,}00066685$, $S_2 \approx 0{,}18$.

Пример 3. Соотношение параметров аналогично предыдущему примеру, но наиболее ожидаемое значение второго актива значительно больше случая примера 1. Значении параметров приведены в табл. 5. График зависимости риск-доходность приведен на рис. 6.

Таблица 5. Данные, которые подаются на вход программы для примера 3

Нечетное число	Параметр		
	Min	**Mid**	**Max**
Krit	0,1	0,3	0,4
Akt1	0,2	0,7	0,9
Akt2	0,25	0,65	0,8

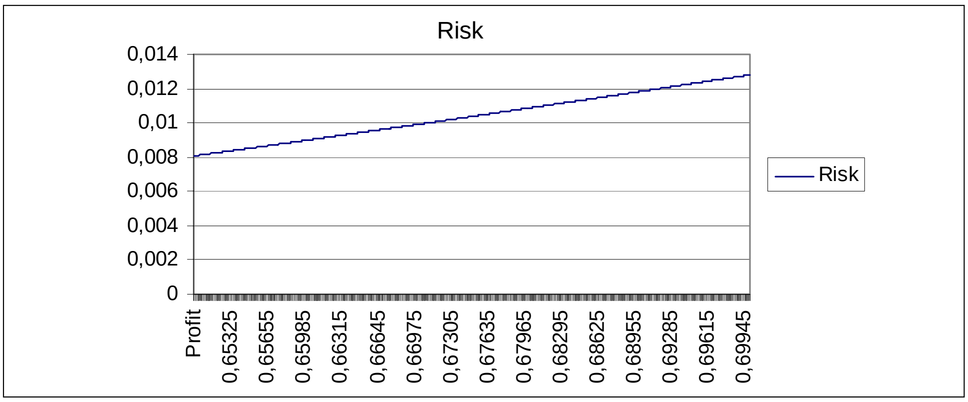

Рис. 6. График зависимости уровня риска портфеля от доходности для примера 3

Данная ситуация изображена на рис. 7.

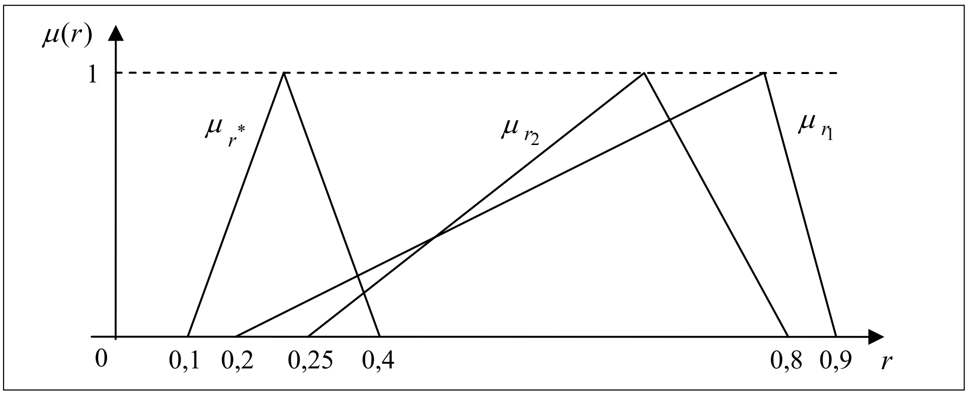

Рис. 7. График расположения функций принадлежности активов и критерия «доходность — функция принадлежности» для примера 3

Как видно из изложенного выше, если точки пересечения левых «крыльев» функций принадлежности доходностей активов пересекутся между собой до их пересечения с критериальным значением (рис. 7), то график зависимости риска от доходности будет иметь вид, показанный на рис. 6.

В противном случае: если $S_1 > S_2$, то будет иметь место нелинейная зависимость, изображенная на рис. 2; иначе, зависимость будет иметь вид, изображенный на рис. 4.

Данная закономерность подтвердилась для большинства проведенных опытов. Но есть опыты, свидетельствующие о том, что данную закономерность можно опровергнуть (табл. 6).

Таблица 6. Значения параметров к примеру опровержения общности найденной закономерности

Нечетное число	Параметр		
	Min	**Mid**	**Max**
Krit	0,1	0,3	0,4
Akt1	0,2	0,52	0,9
Akt2	0,3	0,42	0,48

Зависимость риск-доходность для данного случая представлена на рис. 8.

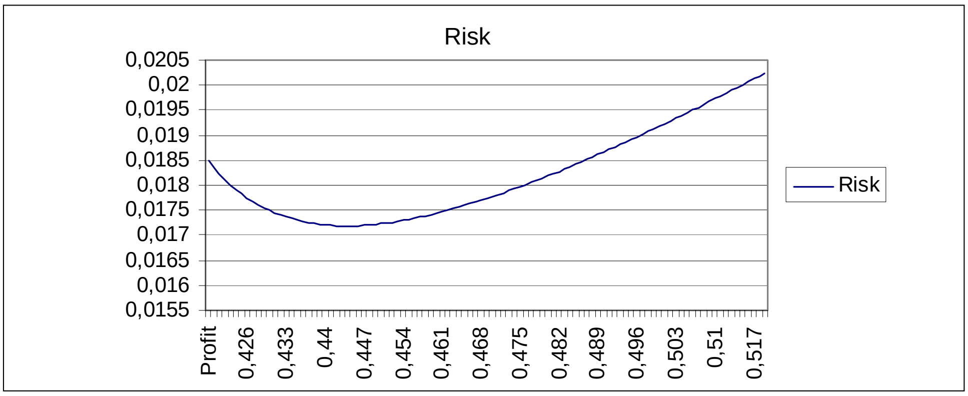

Рис. 8. График зависимости уровня риска портфеля от доходности для контрпримера

Пересечение «крыльев» в данном случае произошло до их пересечения с критериальным значением.

Проведено ряд опытов, подтверждающих несостоятельность приведенной ранее закономерности.

Но полностью отрицать ее не стоит. Установлено, что если значения доходностей активов находятся достаточно «близко» друг к другу (параметры близко друг к другу) или при значительном отдалении наиболее ожидаемого значения одного актива от другого и максимальные значения так же отдалены, то эта закономерность имеет место.

Но поиск универсальной закономерности все еще продолжается.

Поиск этой закономерности связан и определен поиском минимума функции риска, точнее, его местоположением на плоскости риск-доходность.

Этот критерий существует в следствии существования процедуры определения минимума функции на отрезке, а функция риска дифференцируема. Вывод: критерий существует.

До обнаружения данного критерия целесообразно использовать различные методы нелинейного программирования. Например, шоковый метод или генетический алгоритм, очень хорошо описанные в [3], [4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача оптимизации фондового портфеля в нечетко-множественной постановке. В процесе работы произведен более тонкий анализ проблемы, рассмотренной в [5] и получен нелинейный вид зависимости риск-доходность, в отличие от линейного, рассмотренного в той же работе, установлен необходимый критерий правильности расчета формул зависимости риска от доходностей активов портфеля. Показано, что в общем случае задача оптимизации имеет не одно решение, а множество решений мощностью алеф-один. В соответствии с данным фактом сделан вывод, что для решения данной задачи необходим метод, позволяющий на выходе получать множество решений. Предложены методы решения частных задач оптимизации, дающие на выходе одно решение: метод диверсифицированного портфеля и метод целенаправленного поиска. Показано, что общую задачу оптимизации можно упростить к задаче двумерной оптимизации. Вследствие этого рассмотрены частные случаи задачи двумерной оптимизации и предложены обнаруженные закономерности относительно поведения зависимости риск-доходность. Отмечено, что общей закономерности для данной зависимости пока не найдено, однако она существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайченко Ю.П., Есфандиярфард М.* Анализ инвестиционного портфеля для различных видов функций принадлежности // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 2. — С. 59–76.
2. *Зайченко Ю.П., Есфандиярфард М.* Нечеткий метод индуктивного моделирования для прогнозирования курсов акций в задачах портфельной оптимизации // Вісн. Черкаського держ. технологічного ун-ту. — 2008. — № 1. — С. 9–14.
3. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. — Киев: Изд. дом «Слово», 2003. — 688 с.
4. *Зайченко Ю.П.* Основи проектування інтелектуальних систем. Навчальний посібник. — Київ: Видав. дім «Слово», 2004. — 352 с.
5. *Мурга Н.А.* Задачи квазиоптимиста и квазипессимиста в задаче оптимизации доходности нечеткого фондового портфеля при заданном риске // Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали IX міжнар. наук.-техн. конф. 15–19 травня 2007 р. — Київ: Видав. дім «Экмо», 2007. — 122 с.

Поступила 24.05.2007