



УДК 532.5.527

© 2012

Н. С. Городецька, член-кореспондент НАН України В. І. Нікішов,
Л. В. Ткаченко

Чисельне моделювання розвитку вихорів Тейлора–Гертлера в нестационарній течії Куетта

Наводяться результати чисельного моделювання розвитку регулярних збурень завихреності у примежовому шарі під увігнутою поверхнею. Примежовий шар формується під зовнішнім циліндром після його зупинки у круговій течії Куетта між двома циліндрами, що обертаються. Показано, що розвиток поздовжніх вихорів і довжина “лінійної” стадії залежать від початкової енергії збурень, що вносяться в потік, і відстані між місцем внесення і товщиною примежового шару. Виявлено існування початкової стадії розвитку вихорів, на якій енергія затухає і після адаптації до умов течії починає зростати. Проведено аналіз впливу енергії збурень та розташування вводу збурень на протяжність цієї стадії.

Інтерес до вивчення вихорів Гертлера викликаний тим, що динамічні характеристики цих вихорів подібні до характеристик пристінних вихорів у в'язкому підшарі турбулентного примежового шару, що обумовлюють “викид” рідини, яка має низьку швидкість у напрямку основного потоку, у нормальному напрямі і формування грибоподібних структур, в результаті чого формується S -подібний профіль швидкості у трансверсальному напрямку. На основному профілі швидкості виникає точка перегину, утворюються підковоподібні вихори і далі розвивається спалах турбулентності. Вихори Гертлера, як і пристінні вихори, також викликають “викид” рідини з низькою швидкістю від стінки у нормальному напрямі (див. рис. 1), що зрештою призводить до розвитку нестійкості і турбулізації потоку. У роботі [1] показано, що для пристінних вихорів у турбулентному примежовому шарі динамічний масштаб довжини ν/U_τ , де $U_\tau = [\nu(\partial U/\partial y)|_{y=0}]^{1/2}$ — швидкість тертя, ν — кінематичний коефіцієнт в'язкості, $U(y)$ — швидкість основного потоку, приблизно дорівнює 100, тоді як для поздовжніх вихорів Гертлера ця величина становить 112 [2].

Дослідженню розвитку нестійкості течії (лінійна задача) у примежовому шарі, який утворюється над обтічною увігнутою поверхнею, присвячені роботи [3, 4], в яких застосовувався метод нормальних мод. Припускалося, що радіус кривини є асимптотично нескінченний і течія — паралельна, тим самим нехтувалося зміною модової функції вздовж потоку (так званий локально-паралельний підхід). Це дозволило звести систему рівнянь,

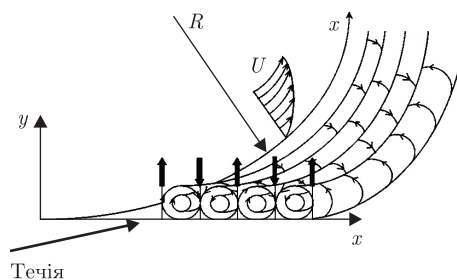


Рис. 1

що описують розвиток збурень у примежовому шарі, до системи звичайних диференціальних рівнянь. Вплив непаралельності потоку на стійкість течії у примежовому шарі було вивчено у роботі [5], де показано, що розв'язок задачі про стійкість течії Блазіуса вздовж увігнутої поверхні зводиться до розв'язання системи параболічних рівнянь. Це призводить до того, що характер збурень у заданій області вище по потоку визначає поле збурень у всій області вниз по потоку, тобто обумовлює сильну залежність збурень, що розвиваються у примежовому шарі, від початкових умов, при яких збурення вводяться у потік. Було показано, що не існує єдиної нейтральної кривої стійкості, а результати залежать від форми початкових збурень і від місцезнаходження їх введення у течію [5]. Огляд робіт, присвячених вивченню характеристик вихорів Гертлера, наведено у роботі [6].

У роботах [7, 8] досліджувалася стійкість до вихорів Тейлора–Гертлера течії між двома коаксіальними циліндрами, що обертаються. Після різкої зупинки зовнішнього циліндра на внутрішній його поверхні виникає нестационарний примежовий шар. Була обчислена крива стійкості.

Найбільший інтерес у досліджуваній проблемі викликає вивчення сприйнятливості примежовим шаром збурень, що вносяться у потік [9], у вигляді поздовжніх вихорів, їх селекції, нелінійного розвитку з метою розробки методів керування примежовим шаром. У роботі основну увагу приділено проблемі сприйнятливості примежовим шаром, що розвивається у течії між двома коаксіальними циліндрами після різкої зупинки зовнішнього циліндра, до штучних вихрових збурень, які вносяться до пристінної області течії. Циліндри обертаються в один бік з кутовою швидкістю Ω_2 . На основі чисельного моделювання аналізується вплив початкової енергії і місцезнаходження введення вихрових збурень на характер розвитку поздовжніх вихорів.

Схематично розташування циліндрів та системи координат зображено на рис. 2. Радіус внутрішнього циліндра дорівнює r_1 , зовнішнього — r_2 . Вісь z направлена вгору, вісь r — вздовж радіуса з початком відліку на осі обертання, вісь φ направлена по дотичній до кола. Вважається, що циліндри мають необмежену довжину. Зупинка зовнішнього циліндра відбувається в момент $t = 0$.

Система рівнянь Нав'є–Стокса, що описує розвиток осесиметричної течії у зазорі між циліндрами, у змінних функція струму ψ і завихреність ζ має вигляд [10]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial r} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + w \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right), \quad r^2 \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

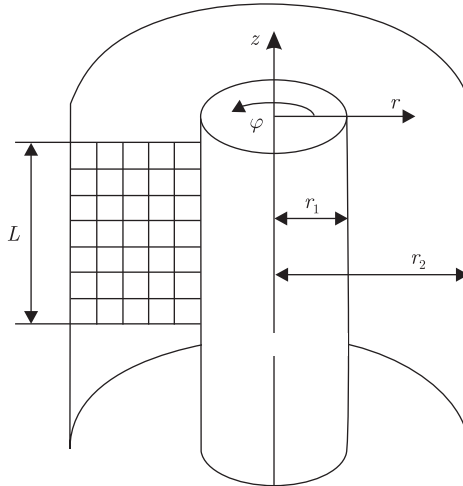


Рис. 2

де

$$\Gamma = rv, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \zeta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

u, v, w — компоненти вектора швидкості вздовж координат r, φ, z , відповідно.

Області зміни змінних: $0 \leq t < \infty, r_1 \leq r \leq r_2, -\infty < z < \infty$.

Використовуючи характерні масштаби довжини $L_{ch} = r_2$ і часу $T_{ch} = \Omega_2^{-1}$, рівняння руху було приведено до безрозмірного вигляду. Для розрахунків вздовж осі z використовувалося періодичне продовження обмеженої області довжиною L , у якій проводилося обчислення (див. рис. 2). Використовуючи умови непротікання на стінках циліндрів, вважаємо функцію струму сталою. Враховуючи, що розглядається випадок, коли відсутній розхід рідини вздовж осі z , можна записати

$$\psi = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{і} \quad r = 1.$$

Гранична умова для циркуляції визначається специфікою конкретної задачі. Розглядався випадок, коли рідина рухається у зазорі між циліндрами в режимі “твердого обертання”. Тоді початкові умови мають вигляд

$$v(0, r) = r \quad \text{при} \quad \frac{r_1}{r_2} < r < 1. \quad (1)$$

Граничні умови для завихреності використовувалися у вигляді, що були запропоновані Тома або Йенсеном [11].

Для чисельного розв’язання поставленої задачі використовувався явний за часом кінцево-різницевий метод. Просторові похідні апроксимувалися за допомогою центральних різниць з другим порядком точності по Δr та Δz (кроки інтегрування), а похідна за часом — з першим порядком точності по Δt . Конвективні доданки апроксимувалися різницями проти вітру з другим порядком точності [11].

Після зупинки зовнішнього циліндра внутрішній циліндр продовжує обертатися з початковою швидкістю. На його внутрішній поверхні формується примежовий шар, характеристики якого дещо відрізняються від звичайного примежового шару на пластині: профіль

основної швидкості у даному випадку має максимум, положення якого з розвитком примежового шару зміщується у напрямку нормалі [7].

На початку розрахунків задавалося значення циркуляції $\Gamma(0, r, z)$ відповідно (1). Після цього у заданий момент часу T_m (деякий проміжок часу після зупинки циліндра) у потік вносилися збурення завихреності, які було розташовано вздовж циліндричної поверхні радіуса r_d . Їх інтенсивність змінювалася періодично вздовж вертикальної координати із заданим періодом і задавалася виразом $\zeta(T_m, r_d, z) = \sin(2\pi z/\lambda) \cdot 10^{-k}$, де λ — довжина хвилі збурень, k — параметр, що характеризує інтенсивність збурень. Також використовувався інший тип збурень — точкові збурення завихреності, які розташовувалися на аналогічній циліндричній поверхні із заданим кроком уздовж координати z :

$$\zeta(T_m, r_d, z) = \tilde{A}(-1)^n \delta[z - z_1(n + 1)] \cdot 10^{-k},$$

де параметр n змінювався від 0 до 25. Основні розрахунки у роботі проводилися з використанням неперервного розподілу завихреності, дискретний розподіл завихреності застосовувався в окремих випадках. Аналіз показав, що результати розрахунків практично збігаються для обох розподілів завихреності. Обчислення розвитку збурень виконувалося для одного режиму течії.

Однією з основних характеристик збурень, що розвиваються, є їх енергія, яка розраховувалася за формулою

$$E(t) = \pi \rho \int_0^L \int_{r_1}^{r_2} (u^2 + (v')^2 + w^2) r dr dz, \quad (2)$$

де v' — азимутальна компонента збудження швидкості.

Важливим питанням, якому в літературі приділялося недостатньо уваги, є поведінка збурень на початковій стадії відразу після їх введення у потік. Зрозуміло, що збурення, що вводяться, спочатку пристосовуються до умов примежового шару, який розвивається, а потім їх розвиток відбувається згідно з лінійною теорією, коли амплітуда збурень лишається малою. Процес пристосування залежить від місця введення збурень у потік і їх енергії.

Для вивчення залежності зростання енергії збурень від їх початкової енергії для різних моментів T_m їх введення у примежовий шар (по суті при різних товщинах примежового шару) розрахунки проводилися для таких значень: $T_m = 0,01; 0,05; 0,5; 2,0$. Радіус поверхні, на якій було розташовано початкові збурення, становив $r_d = 0,994$, тобто відстань від внутрішньої стінки дорівнювала 0,006. Розрахункова сітка при обчисленнях становила 200×600 , просторові кроки інтегрування дорівнювали $\Delta r = 0,001$, $\Delta z = 0,005$, крок за часом — $\Delta t = 0,001$.

На рис. 3 наведено криві, що характеризують зміну енергії збурень з часом залежно від їх початкової енергії для випадку, коли час введення збурень у потік дорівнював 0,01. Відзначимо, що в кожному випадку значення енергії нормувалися на своє початкове значення. З рисунка видно, що з часом спостерігається експоненціальне зростання енергії, що відповідає лінійній теорії. Відхилення від даного закону відбувається у різні моменти часу залежно від інтенсивності збурень, що вносяться у потік: чим більше амплітуда збурень, тим раніше відбувається відхилення від “лінійного” закону.

Вказані відхилення зумовлені істотним зростанням нелінійних ефектів, які призводять до перебудови течії у примежовому шарі. Як видно з рис. 3, лінійна теорія справедлива лише до певної межі, яка залежить від початкової енергії збурень.

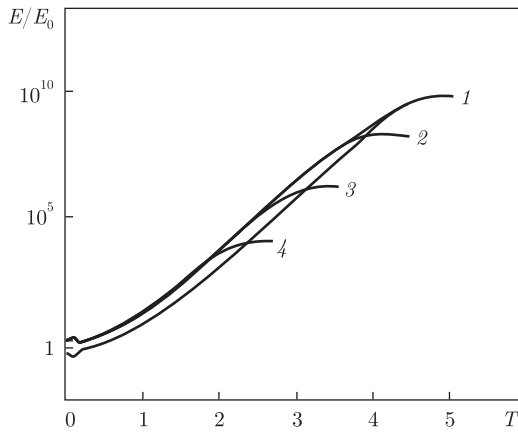


Рис. 3

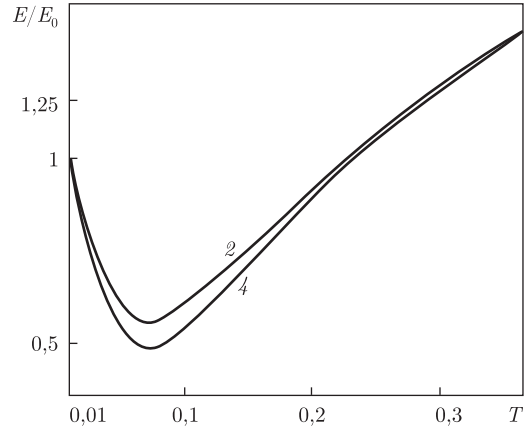


Рис. 4

Слід відзначити, що після введення збурень їх енергія зменшується, що пов'язано з етапом пристосування збурень до місцевих умов течії. У даному випадку в момент введення збурень товщина примежового шару дорівнювала $\delta = 0,005$, тобто центр збурень у момент введення в потік знаходився вище верхньої межі примежового шару. На рис. 4 наведено результати розрахунку залежності енергії збурень від часу на початковій стадії розвитку. Видно, що спочатку енергія вихорів помітно зменшується. Це пов'язано з тим, що центри вихорів знаходяться поза примежовим шаром, у зоні стійкості, тобто в області, де практично відсутній зсув швидкості і відсутня взаємодія вихорів з потоком. З часом товщина примежового шару збільшується, і вихори (хоча і з меншою енергією) потрапляють у зону зсувної течії і поступово їх енергія зростає.

На початковій стадії має місце значне зменшення енергії вихорів (більш ніж у два рази), але протяжність початкової стадії розвитку вихорів, коли їх енергія зменшується і потім досягає первинного значення, досить значна. Це свідчить про важливість врахування стадії пристосування вихрових збурень до умов течії при використанні цих збурень з метою керування характеристиками примежового шару.

Розрахунки показали, що при більш пізньому введенні збурень у потік характер змін їх енергії принципово не змінюється, і відмінності є лише кількісними. В даному випадку також можна виділити початкову стадію, на якій збурення пристосовуються до умов потоку. Відмінність полягає у факті, що падіння енергії збурень на початковій стадії при пізнішому їх введенні у потік менше і протяжність початкової стадії зменшується.

Одним з важливих параметрів, що характеризує розвиток збурень, є відношення між товщиною примежового шару і відстанню між місцем введення до стінки циліндра $\Delta = 1 - r_d$. Для вивчення характеру розвитку збурень залежно від відстані місця введення від стінки циліндра були проведені розрахунки зміни енергії збурень у часі, коли відстань від цієї поверхні до стінки циліндра відповідно приймалась: 0,1; 0,05; 0,02; 0,006. У всіх випадках збурення вносилися у потік у момент часу $T_m = 0,5$, початкова енергія збурень була однаковою ($k = -1$).

Товщина примежового шару у даний момент дорівнювала $\delta = 0,04$. Виявлено, що енергія збурень, що вносяться до області поза примежовим шаром, починає зростати із істотним запізнюванням порівняно з випадком, коли збурення вносяться всередину примежового шару. Показано, що чим більше відстань від місця введення збурень до верхньої межі примежово-

го шару, тим з більшою затримкою відбувається наростання енергії збурень. Це пов'язано з тим, що спочатку вихорі знаходяться за межами області зсуву течії, де потік є стійким, а їх енергія може тільки згасати.

Аналіз показує, що вплив нелінійних ефектів виявляється пізніше для збурень, що вносяться на великих відстанях від межі примежового шару, оскільки сповільнюється зростання їх енергії. Але значення енергії збурень, коли відбувається відхилення від лінійного зростання, істотно зростає. Це обумовлено тим, що примежовий шар стає більш розвиненим, і для нелінійної взаємодії збурень з цим шаром необхідно, щоб їх енергія була досить великою. Важливо відзначити, що зростання енергії збурень, які внесені ближче до твердої стінки, де зсув швидкості більше, починається раніше, порівняно зі збуреннями, які внесені на більшій відстані від стінки, проте коефіцієнт наростання їх дещо менший. В результаті їх енергія стає значною і прояв нелінійних ефектів відбувається раніше.

Одержані результати показують, що при введенні у потік регулярних вихрових збурень спочатку спостерігається значне падіння їх енергії, яке пов'язане з пристосуванням до особливостей потоку. Протяжність початкової стадії залежить від співвідношення між відстанню від місця введення збурень до стінки і товщиною примежового шару. У випадку, коли товщина примежового шару мала і центри вихрових збурень знаходяться поза ним, основна частина вихорів знаходиться за межами зсувної (у стійкій) зони, що призводить до значного зменшення енергії збурень, і, відповідно, тривалість початкової стадії збільшується. Після початкової стадії розвитку вихрові збурення починають розвиватися відповідно до лінійної теорії. З часом з розвитком вихрових збурень їх енергія зростає і стають важливими нелінійні ефекти. Вплив останніх призводить до відхилення кривих зростання енергії від експоненціального закону. Проміжки часу, при яких спостерігаються такі відхилення, залежать від початкової енергії збурень: чим вище початкова енергія, тим раніше спостерігаються відхилення.

1. *Swearingen J. D., Blackwelder R. F.* The growth and the breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall // *J. Fluid Mech.* – 1987. – **182**. – P. 225–290.
2. *Mitsudharmadi H., Winoto S. H., Shah D. A.* Development of boundary-layer flow in the presence of forced wavelength Görtler vortices // *Phys. Fluids.* – 2004. – No 4. – **16**. – P. 3983–3996.
3. *Görtler H.* Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden // *Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Neue Folge.* – 1940. – **2**, No 1. – P. 1–26.
4. *Smith A. M. O.* On the growth of Taylor–Görtler vortices along highly concave wall // *Quart. of Applied Math.* – 1955. – **13**, No 3. – P. 233–262.
5. *Hall P.* The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers // *J. Fluid Mech.* – 1983. – **130**. – P. 41–58.
6. *Saric W.* Görtler vortices // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1994. – **26**. – P. 379–409.
7. *Neitzel G. P.* Marginal stability of impulsively initiated Couette flow and spin-down // *Phys. Fluids.* – 1982. – **25**. – P. 226–232.
8. *Kim M. C., Choi C. K.* Energy stability analysis for impulsively decelerating swirl flows // *Ibid.* – 2008. – **20**, 064101. – P. 1–5.
9. *Saric W. S., Reed H. L., Kerschen E. J.* Boundary-layer receptivity to freestream disturbances // *Annual Rev. Fluid Mech.* – 2002. – **34**. – P. 293–319.
10. *Liu D. C. S., Chen C. F.* Numerical experiments on time-dependent rotational Couette flow // *J. Fluid Mech.* – 1973. – **59**. – P. 77–95.
11. *Рочуц П.* Вычислительная гидродинамика. – Москва: Мир, 1980. – 616 с.

Н. С. Городецкая, член-корреспондент НАН Украины **В. И. Никишов**,
Л. В. Ткаченко

Численное моделирование развития вихрей Тейлора–Гертлера в нестационарном течении Куэтта

Представлены результаты численного моделирования развития регулярных возмущений завихренности в пограничном слое под вогнутой поверхностью. Пограничный шар формируется под внешним цилиндром после его остановки в круговом течении Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами. Показано, что развитие продольных вихрей и длина “линейной” стадии зависят от начальной энергии возмущений, которые вносятся в поток, и от расстояния между местом внесения возмущений и толщиной пограничного слоя. Выявлено существование начальной стадии развития вихрей, на которой энергия затухает и после адаптации к условиям течения начинает расти. Проведен анализ влияния энергии возмущений и местоположения ввода возмущений на протяженность этой стадии.

N. S. Gorodetska, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. I. Nikishov**,
L. V. Tkachenko

The numerical modeling of the development of Taylor–Görtler’s vortices in unsteady Couette’s flow

The results of numerical simulation of the development of regular disturbances of vorticity in the boundary layer under a concave surface are presented. The boundary layer is formed under the external cylinder after its stopping in circular Couette’s flow between two rotating cylinders. It is shown that the development of longitudinal vortices and the “linear” stage length depend on the initial energy of introduced disturbances and the distance between the ejection location and the thickness of the boundary layer. The existence of the initial stage of the vortex development is found. On this stage, the energy of vortices decays firstly, but, then, after adapting the flow conditions, it begins to grow. The influence of the initial energy of disturbances and the ejection location on the duration of this stage is analyzed.