

УДК 517.4

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУКРУГЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Т. А. ДУНАЕВА*, А. А. ГУРЖИЙ**, В. В. МЕЛЕШКО**

* Национальный технический университет Украины "КПИ", институт "АПРОДОС", Киев

** Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 09.01.2001 ◊ Пересмотрено 22.03.2001

Рассматривается двумерное течение Стокса, обусловленное периодическим движением круговой и прямолинейной границей в полукруге. Приводятся точные решения для описания поля скорости. Изучаются также особенности поля скорости и их влияние на движение пассивной жидкости в полукруге. Для различных режимов и значений скоростей границ вычисляются и анализируются сечения Пуанкаре, траектории движения пассивных жидких частиц, наибольший показатель Ляпунова, которые позволили выявить зоны интенсивного (хаотического) и слабого (регулярного) перемешивания пассивной области течения жидкости в полукруге.

Розглядається двовимірне течія Стокса у півколі, яка зумовлена періодичним рухом кругового та прямолінійного контуру. Дається точний розв'язок для опису поля швидкості, вивчаються особливості поля швидкості та їхній вплив на рух пасивної рідини у півколі. Для різних режимів та значень швидкостей границь обчислюються перетини Пуанкаре, траєкторії руху пасивних домішок, найбільший показник Ляпунова, які дозволяють виявити зони інтенсивного (хаотичного) й слабого (регулярного) перемішування області течії рідини у півколі.

A two-dimensional Stokes flow due to a periodic motion of a circular and rectilinear boundary in a semicircle is considered. An exact analytical solution for a description of a velocity field is given. It is also studied the peculiarities of the velocity field and their influence on the motion of a surrounding passive fluid in the semicircle. Poincaré section, trajectories of motion of passive fluid particles, largest Lyapunov exponent are calculated and analyzed for various regimes and values of boundary velocities, that allow to determine both zones of intensive (chaotic) and weak (regular) mixing of a marked regions of fluid flow in the semicircle.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы не только в механике жидкости, но и в других областях науки возрастает интерес к задачам хаотической динамики. Это можно объяснить тем, что многие эффекты и свойства сложных нелинейных систем проявляются в аналогичной форме (качественно, и порой количественно) в достаточно простых модельных физических системах [1-3]. Исследования механических систем с меньшим числом степеней свободы позволяют значительно быстрее достичь результатов, изучить особенности и свойства проявления хаоса в детерминированных системах [4-7].

К хаотическим явлениям относятся процессы перемешивания пассивной жидкости ламинарными течениями [8]. Известны такие режимы перемешивания, при которых течение на протяжении достаточно короткого промежутка времени приводит к значительным деформациям области, занятой пассивной жидкостью (например, [9, 10]). Решение таких задач, даже в рамках умеренного проявления хаоса, связано со значительными математическими и численными трудностями, обусловленными необходимостью совместного решения уравнений, описывающих различные механизмы перемешивания жидкости. Здесь можно выде-

лить кинематические процессы, связанные с перемещением выделяемых пассивных лагранжевых частиц (говорят маркеров) в эйлеровом поле скорости, диффузионные эффекты, вызванные тепловым молекулярным движением, и некоторые другие в зависимости от конкретных физических явлений [11-13].

В некоторых случаях анализ масштабов или экспериментальных данных в задаче о перемешивании жидкости позволяет значительно упростить математическую постановку задачи: пренебрегая вторичными эффектами, исследователи принимают во внимание только кинематические процессы. Другими словами, рассматривается задача о перемешивании изначально выделенной области жидкости в поле скорости рассматриваемого течения [8]. В последнее время к этой задаче, получившей название *задача об адвекции* пассивной примеси [14], отмечается повышенный интерес многих исследователей; в научной литературе опубликовано множество экспериментальных и теоретических работ [15-20].

Среди работ по хаотической адвекции можно выделить классы задач, в которых поле скорости наводится либо системой локализованных вихрей [20-22], либо движением границ [8, 10, 15], либо наличием других физических эффектов [12, 13], при-

водящих в движение жидкость. Анализ показывает, что различные области течения жидкости одновременно могут обладать как регулярными, так и хаотическими свойствами. Для того, чтобы выделить их, обычно пользуются техникой построения сечений Пуанкаре. Понятно, что с изменением внешних параметров течения жидкости эти области претерпевают изменения: наблюдается исчезновение, появление новых областей, их дрейф. В каждом конкретном примере закономерности изменения зон регулярного и хаотического перемешивания носят индивидуальный характер.

В настоящей работе исследуется течение жидкости в области, ограниченной полукругом в приближении Стокса. Рассматривается квазипериодическое течение жидкости. Существенной особенностью такого течения является последовательность стационарных режимов, которые сменяются через определенный промежуток времени без каких-либо инерционных эффектов [8, 15].

Целью данной работы является определение эволюции зон интенсивного перемешивания, соответствующих хаотическим режимам, и зон регулярного перемешивания с изменением скоростей движения границ в пределах, вносимых приближением Стокса. Другими словами, существуют ли такие области течения (хаотические или регулярные), которые остаются неизменными при изменении скорости движения границ в широких пределах; существуют ли такие критические режимы, при которых общая картина течения претерпевает резкие изменения.

Работа организована следующим образом: формулировка задачи и аналитическое решение для поля скорости представлены в разделе 1. Анализ траекторий движения пассивных жидких частиц и определение наибольшего показателя Ляпунова приводятся в разделе 2, сечения Пуанкаре для различных режимов и значений скоростей движения границ, процесс растяжения кругового начального контура анализируются в разделе 3. Последний раздел посвящен обсуждению полученных результатов, приводятся некоторые выводы и рекомендации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим двумерное течение несжимаемой вязкой жидкости в полукруге $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$ в полярной системе координат, связанной с центром полукруга (рис. 1).

Течение жидкости вызвано равномерным попеременным движением круговой (режим А) и пря-

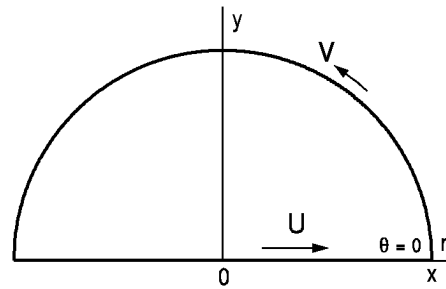


Рис. 1. Геометрия задачи

молинейной границы (режим В) с постоянными касательными скоростями V и U на границах, соответственно. Для каждого из режимов течение жидкости считаем стационарным.

Двумерное поле скорости для каждого из режимов (u_r, u_θ) может быть выражено через функцию тока $\psi(r, \theta)$ [23]:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1)$$

В приближении Стокса ($Re \rightarrow 0$, где Re – число Рейнольдса по отношению к характерной скорости движения границы и радиуса полости), пренебрегая инерционными эффектами в момент переключения одного режима течения на другой, уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости может быть сведено к бигармоническому уравнению относительно функции тока ψ :

$$\Delta \Delta \psi = 0, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

является оператором Лапласа в полярных координатах (r, θ) .

Граничные условия для каждого из рассматриваемых режимов течения записываются в виде: режим А:

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 & \quad \text{при} \quad \theta = 0, \pi; 0 \leq r \leq a, \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -V & \quad \text{при} \quad r = a; 0 \leq \theta \leq \pi; \end{aligned} \quad (4)$$

режим В:

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Ur \quad \text{при} \quad \theta = 0; 0 \leq r \leq a, \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -Ur \quad \text{при} \quad \theta = \pi; 0 \leq r \leq a, \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a; 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Для бигармонического уравнения (2) и граничного условия (4), соответствующего режиму А, имеется точное решение для функции тока $\psi(r, \theta)$ в полярной системе координат, которое может быть представлено в прямоугольной системе координат, связанной с центром полярной системы координат (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \psi_A(x, y) = \frac{2V}{\pi^2 - 4} \left[\frac{\pi(a^2 - (x^2 + y^2)) + 4ay}{2a} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arctg} \left(\frac{2ay}{a^2 - (x^2 + y^2)} \right) - \pi y \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В то же время, для уравнения (2) и граничного условия (5), соответствующего режиму В, аналитическое решение для функции тока может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \psi_B(x, y) = -\frac{2U}{\pi^2 - 4} \left[\frac{\pi ay + a^2 - (x^2 + y^2)}{a} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arctg} \left(\frac{2ay}{a^2 - (x^2 + y^2)} \right) - \frac{1}{2} \pi^2 y \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, используя выражения для функции тока для каждого из режимов (6), (7) и связь между функцией тока и компонентами поля скорости (1), можно определить значение вектора скорости течения в произвольной точке с координатами (x, y) для каждого из рассмотренных режимов течения.

Движение пассивной жидкой частицы (маркера) с текущими координатами $[x(t), y(t)]$ в поле скорости $\mathbf{V}[V_x(x, y), V_y(x, y)]$ описывается дифференциальным уравнением первого порядка (задача Коши):

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = V_x(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{dY}{dt} = V_y(x, y) = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$X(0) = X^0, \quad Y(0) = Y^0. \quad (9)$$

Пусть внутри временного интервала $(kT, kT + T/2)$ (где $k = 0, 1, \dots$, а T – период движения внешних границ рассматриваемой области) движется

только круговая граница, а прямолинейная покоится (действует режим А). Затем вступает в силу второй режим, который действует на протяжении $(kT + T/2, kT + T)$, где $k = 0, 1, \dots$. В этом случае функцию тока можно представить в виде комбинации

$$\psi(x, y) = v(t)\psi_A(x, y) + u(t)\psi_B(x, y), \quad (10)$$

где $v(t)$ и $u(t)$ – единичные функции, определяемые как

$$\begin{aligned} \text{режим А:} \quad v(t) = 1, \quad u(t) = 0, \\ \text{режим В:} \quad v(t) = 0, \quad u(t) = 1, \end{aligned} \quad (11)$$

Для каждого из временных интервалов, соответствующих режиму А или В, функция тока ψ явно не зависит от времени, поэтому система (10) является интегрируемой и обладает первым интегралом движения $\psi(x, y) = \text{const}$. Следовательно, частица, изначально расположенная на линии тока с координатами (x_{in}, y_{in}) , движется вдоль той же линии тока $\psi(x, y) = \psi(x_{in}, y_{in}) = \text{const}$ на протяжении первого полупериода, $0 < t < T/2$. В момент времени $t = T/2$ картина мгновенно меняется. Теперь частица движется вдоль новой линии тока $\psi(x, y) = \psi(x_{in}^*, y_{in}^*) = \text{const}$ на протяжении второго полупериода, $T/2 < t < T$. Затем движение повторяется с периодом T . Отметим, что пространственное движение частицы непрерывно, а ее скорость имеет разрыв в каждый из моментов переключения режимов, $t_k = kT/2$.

2. АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ ПАССИВНЫХ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ

Наиболее распространенным методом для идентификации глобальных регулярных и хаотических областей движения жидких частиц является метод отображения Пуанкаре (сечение Пуанкаре). Этот подход оказывается весьма эффективным в тех случаях, когда известны аналитические выражения, определяющие компоненты поля скорости течения [4, 6, 8].

В общем случае движение произвольной жидкой частицы можно представить в виде траектории в трехмерном фазовом пространстве. Если в нем определить пространственно ориентированную плоскость и следить за теми точками траектории, которые получаются в результате пересечения этой плоскости траекторией в выбранном направлении, то получается двумерная последовательность точек, которая и определяет сечение Пуанкаре. Для двумерного периодического течения обычно [4, 8] вводят третью фазовую перемен-

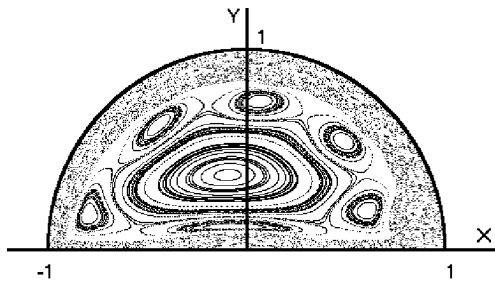


Рис. 2. Сечение Пуанкаре; $V = 0.5$, $U = 1.5$

ную вида $\dot{z} = \sin(2\pi t/T)$, где T – период движения. Затем определяют ориентированную плоскость (например, $z = 0$) и по методике, приведенной выше, строят сечение Пуанкаре.

В двумерных периодических течениях сечение Пуанкаре представляет собой наложение серии моментальных снимков, фиксирующих положение выбранной материальной точки (или системы точек) через равные интервалы времени, соответствующие периоду движения границ. Вид сечения Пуанкаре дает возможность определить области регулярного и хаотического движения: бесформенный набор точек соответствует нерегулярному, хаотическому движению, а конечный набор точек или замкнутая кривая свидетельствуют, что рассматриваемое движение является регулярным (подробная классификация приведена в [4, 6]).

Рассмотрим случай, при котором в течение первого полупериода движется только круговая граница (режим А) со скоростью $V = 0.5$, а в течение второго полупериода – только прямая граница (режим Б) со скоростью $U = 1.5$. Здесь и в дальнейшем используются безразмерные координаты, отнесенные к радиусу a , время, отнесенное к полупериоду $T = 2$, и скорости, отнесенные к a/T . На рис. 2 представлено сечение Пуанкаре, для построения которого использованы вычисленные траектории для 24 маркеров (уравнения (8)), изначально расположенных в различных точках полости. Последовательность зафиксированных точек соответствует моментам времени Tn , где $n = 1, \dots, 2000$.

Центральную часть полукруга занимает регулярная область, центр которой смещен в сторону отрицательных значений оси Ox с периодической эллиптической точкой первого порядка $(-0.0965, 0.372)$ в центре. Это значит, что пассивный маркер, изначально помещенный в эту точку течения, движется по регулярной траектории и через один период в точности возвращается в исходную точ-

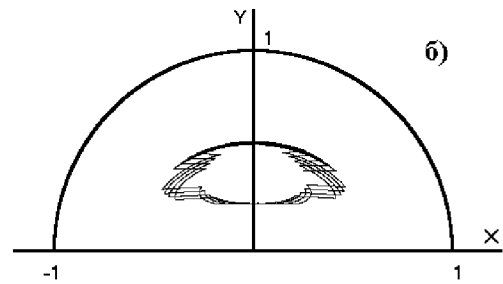
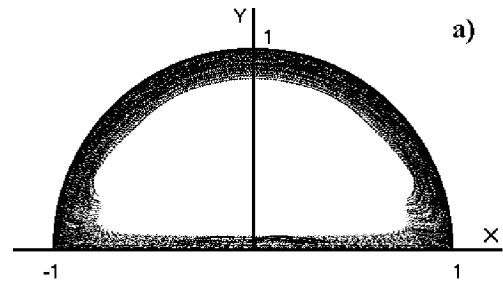


Рис. 3. Траектории частиц, первоначально расположенных в точках (а) $(0.8, 0.1)$ и (б) $(0.25, 0.4)$

ку поля течения. На рис. 2 заметно, что хаотическая область примыкает к контуру полукруга. Между хаотической и регулярной зонами хорошо видны шесть больших островов с эллиптическими точками шестого порядка. Между этими островами имеются гиперболические точки шестого порядка – области, соответствующие хаотическим зонам течения жидкости.

Для подтверждения характера движения пассивной жидкой частицы на рис. 3, а показана траектория частицы, помещенной в начальный момент времени в точку с координатами $X_1^0 = 0.8$, $Y_1^0 = 0.1$, которая соответствует хаотической зоне сечения Пуанкаре. Траектория частицы носит нерегулярный характер, она полностью покрывает хаотическую зону сечения Пуанкаре. В то же время, вторая частица, которая изначально располагалась в регулярной области ($X_2^0 = 0.25$, $Y_2^0 = 0.4$), движется по регулярной траектории, занимающей центральную область течения (рис. 3, б).

Помимо сечения Пуанкаре существуют другие диагностические критерии, позволяющие определить в каком режиме движения находится пассивная жидкая частица в исследуемом поле скорости. Одним из наиболее распространенных критериев является наибольший показатель Ляпунова L [4, 6, 8]. Для его определения необходимо решить

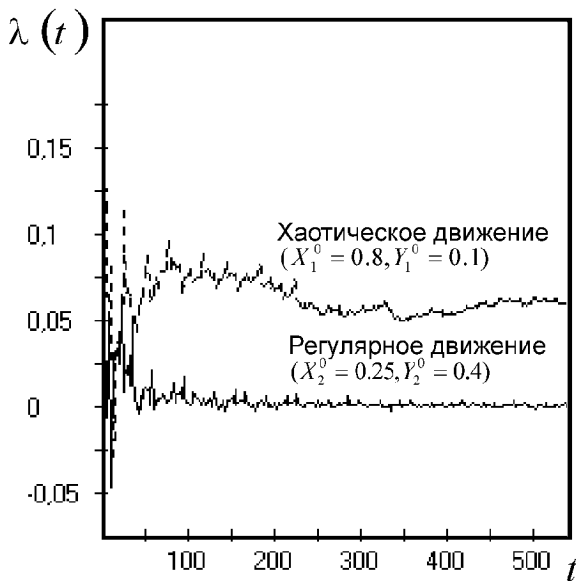


Рис. 4. Изменение наибольшего показателя Ляпунова $\lambda(t)$ для обеих частиц, рассмотренных на рис. 3.

вариационное уравнение

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathbf{A} \cdot \eta, \quad \eta(0) = \eta^0. \quad (12)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

в соответствии с обозначениями, принятыми в уравнении (8). Начальные условия для $\eta(t)$ принципиального значения не имеют [4, 6]. Обычно в начальный момент полагают $|\eta(0)| = 1.0$. Матрица \mathbf{A} оценивается вдоль траектории маркера $(X(t), Y(t))$. Другими словами, уравнения (1) и (12) необходимо интегрировать одновременно. Затем вычисляется функция

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\eta(t)|}{|\eta^0|}. \quad (14)$$

Фактически наибольший показатель Ляпунова определяет, с каким средним экспоненциальным показателем расходятся (или сходятся) близлежащие траектории жидких частиц вблизи траектории исследуемого маркера. Детерминистические критерии в терминах наибольшего показателя Ляпунова следующие: если $\lambda > 0$, то пассивный маркер движется по хаотической траектории; если $\lambda \leq 0$ – траектория маркера оказывается регулярной.

На рис. 4 показано изменение со временем наибольшего показателя Ляпунова для рассмотренных ранее маркеров. Для первого маркера $\lambda(t)$ стремится к положительному значению $\lambda \sim 0.07$, в то время как для второго маркера наибольший показатель Ляпунова стремится к нулю.

Таким образом, приведенный анализ свидетельствует, что обе пассивные частицы имеют различные типы движения. Критерий типов движения пассивных маркеров, основанный на анализе сечения Пуанкаре, дает адекватные результаты другим глобальным критериям, используемым при анализе типов движения пассивных жидких частиц в поле скорости, наведенном попеременным движением границ в полукруге.

3. АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Исследование режимов перемешивания проведем на основе анализа сечений Пуанкаре и изучения свойств периодических точек для двух случаев. В первом из них зафиксируем скорость нижней границы полукруга на значении $U = 1.5$, а скорость круговой границы V будем менять в диапазоне 0.1–1.5. Во втором случае, наоборот, фиксируем скорость круговой границы на значении $V = 1.5$, а скорость нижней границы полукруга U изменяем в диапазоне значений от 0.1 до 1.5.

При изменении скорости круговой границы V от 0.1 до 0.5 можно наблюдать за достаточно сложным процессом появления и развития островов упорядоченного движения жидких частиц в центральной, регулярной зоне движения жидкости, в полукруге. Так, при значениях скорости $U = 1.5$ и $V = 0.1$ (рис. 5, а) большую часть полукруга занимает область регулярного движения с уже наметившимися шестью достаточно большими островами, лежащими между двумя замкнутыми кривыми в центре регулярной области. С внешней стороны замкнутой кривой, разделяющей участок хаотического и регулярного движений, прослеживается цепочка (из шести небольших островов), количество которых при увеличении скорости V постепенно возрастает. При $V = 0.3$ (рис. 5, б) количество островов в периферийной области регулярного движения возрастает до 13, отделяя центральную зону упорядоченного движения жидких частиц от хаотического движения в пристеночной области течения. В центральной части течения уже достаточно отчетливо сформировались шесть больших эллиптических островов с периодическими точками шестого порядка.

В целом, с увеличением скорости круговой границы от 0.1 до 0.5 размеры островов увеличива-

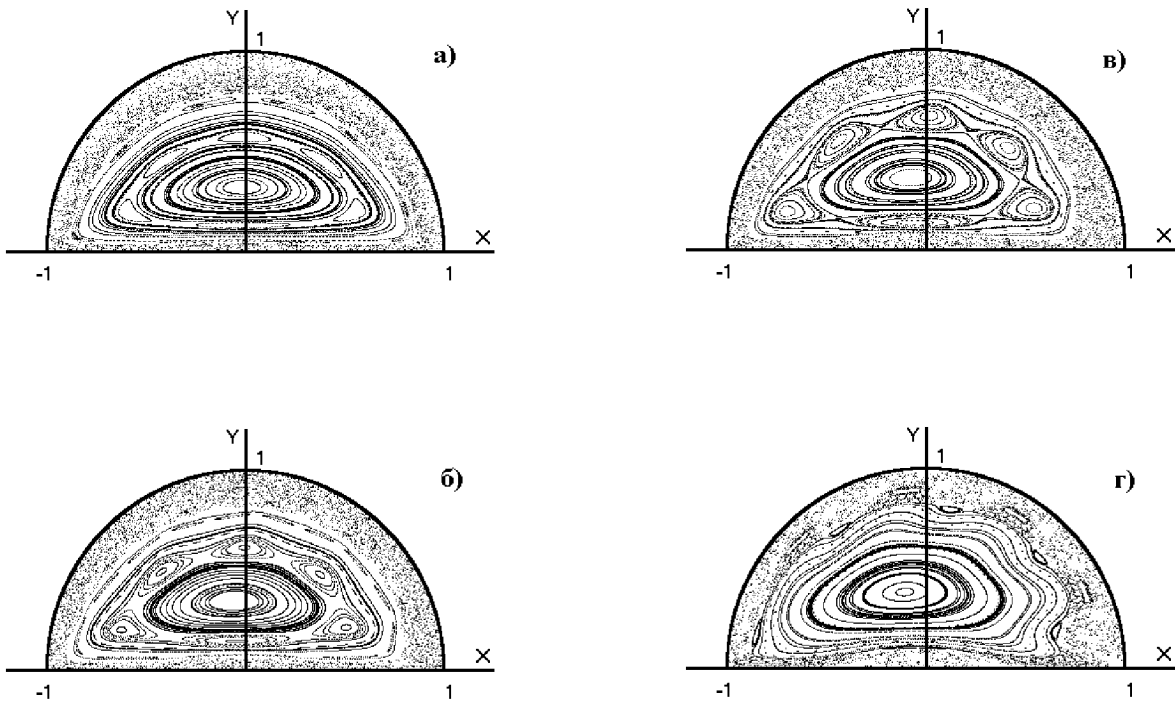


Рис. 5. Сечение Пуанкаре при $U = 1.5$ для случаев: а – $V = 0.1$, б – $V = 0.3$, в – $V = 0.4$, г – $V = 0.57$

ются и заполняют собой большую часть регулярной области (см. также рис. 2). Если скорость V принимает значение, незначительно превышающее 0.5, большая часть островов сечения Пуанкаре исчезает. Случай $V = 0.57$ представлен на рис. 5, г. При последующем увеличении скорости окружной границы регулярные острова в центральной части течения исчезают вовсе. Качественная картина сечений Пуанкаре не меняется при дальнейшем увеличении скорости окружной границы вплоть до значения $V = 1.5$. Течение отчетливо разделяется на две области: центральную, упорядоченную область течения жидкости, и периферийную, пристеночную область, которая проявляет хаотические свойства.

Теперь зафиксируем скорость круговой границы на значении $V = 1.5$. При изменении скорости нижней границы U в пределах $U = 0.1..0.5$ качественная картина сечений Пуанкаре остается неизменной: основную, центральную часть области течения занимает область регулярного движения с большим островом в центре (рис. 6, а). Внутри острова располагается эллиптическая точка первого порядка. Следует отметить также небольшое общее смещение сечения Пуанкаре в сторо-

ну отрицательных значений оси OX . В этом случае область хаотического движения располагается вдоль контура полукруга, сужаясь вдоль круговой границы.

При увеличении скорости U регулярная зона постепенно уменьшается, а хаотическая область увеличивается. Случай $U = 0.7$ представлен на рис. 6, б. Следует отметить, что, начиная с этого значения скорости прямолинейной границы, в области хаотического движения жидкости отчетливо сформировались пять больших регулярных островов.

При последующем изменении скорости, $U = 0.8$ (рис. 6, в), хаотическая область увеличивается, а центральный остров еще более смещается влево. Большой остров соответствует эллиптической точке первого порядка с координатами $(-0.116, 0.560)$, а небольшие острова, расположенные в пристеночной области течения, соответствуют эллиптическим периодическим точкам пятого порядка, $(0.495, 0.756)$. Если рассматривать движение пассивной жидкой частицы, изначально расположенной в точке с указанными ранее координатами эллиптической точки, то ее движение в дальнейшем происходит следующим образом:

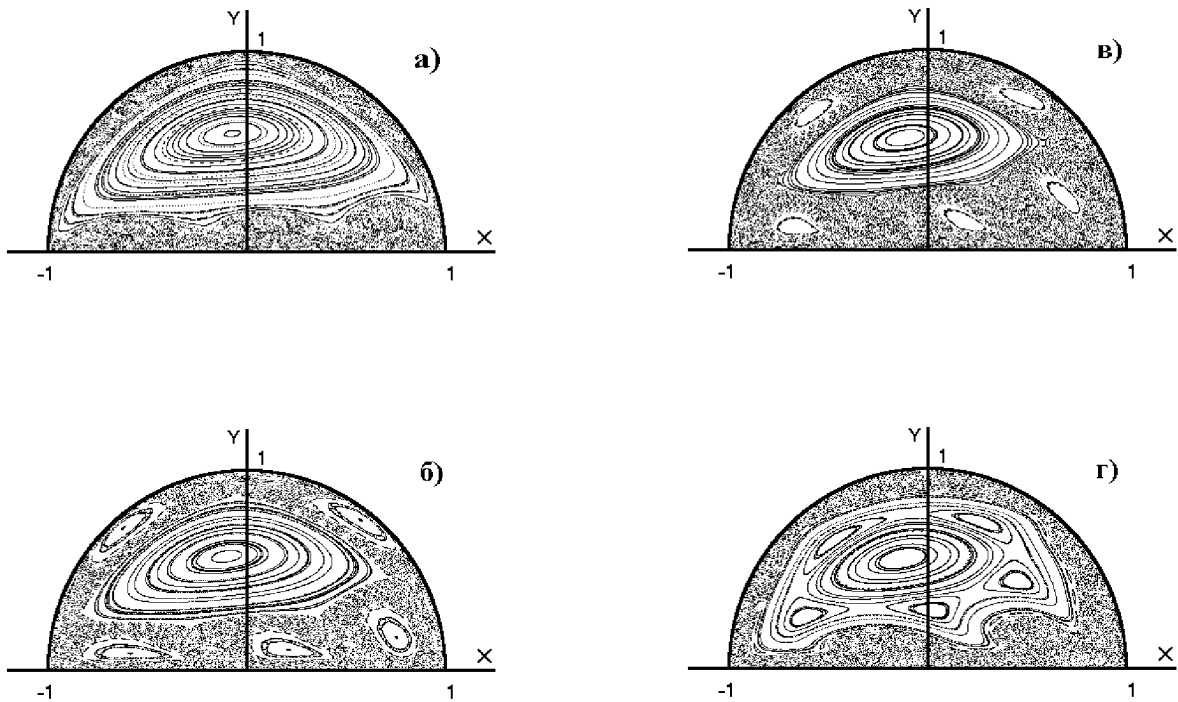


Рис. 6. Сечение Пуанкаре при $V = 1.5$ для случаев: а – $U = 0.5$, б – $U = 0.7$, в – $U = 0.8$, г – $U = 0.9$

в начальный момент времени частица находится в центре правого верхнего острова в сечении Пуанкаре. Через один период движения исследуемая частица перемещается в центр второго острова, расположенного в верхней части полукруга слева от оси OY . Еще через период частица "посещает" третий остров в нижней части полукруга, после третьего периода – четвертый и через пять периодов возвращается в исходную точку.

В хаотической области течения были обнаружены две гиперболические точки пятого порядка с координатами $(-0.040, 0.020)$ и $(-0.302, 0.256)$ соответственно. Траектория частицы, изначально помещенной в гиперболическую точку с координатами $(-0.302, 0.256)$, в отличие случая, рассмотренного ранее для эллиптической точки, огибает каждый остров в той же последовательности, не заходя внутрь них. Интересно отметить, что наличие гиперболических точек в области, близлежащей к эллиптическим точкам одинакового порядка, является типичным для многих периодических течений [8].

Картина сечения Пуанкаре претерпевает резкие изменения при дальнейшем увеличении скорости прямолинейной границы (рис. 6, г при

$U = 0.9$). Видно, что в этом случае пять периферийных островов смещаются из области хаотического движения в центральную часть – область регулярного движения жидкости. Как следствие, размеры регулярной области увеличиваются. Наличие островов подтверждается существованием эллиптических точек первого $((-0.130, 0.550))$ для центрального острова и пятого $(0.266, 0.735)$ порядков соответственно. Между островами располагается гиперболическая точка пятого порядка $(-0.304, 0.304)$.

Для подтверждения проведенного анализа сечений Пуанкаре и динамики изменений периодических точек течения проведем прямое моделирование процесса адвекции произвольной пассивной жидкой области в полукруге для случая $U = 0.8$, $V = 1.5$, который соответствует рис. 6, в. Для этого в начальный момент времени окружим гиперболическую точку с координатами $(-0.3029, 0.2568)$ системой маркеров, формирующих окружность с радиусом 0.05 , и проследим за деформацией изучаемого контура во времени. Для проведения численного анализа воспользуемся методом кусочной сплайн-интерполяции [25], который позволяет с достаточно высокой точностью про-

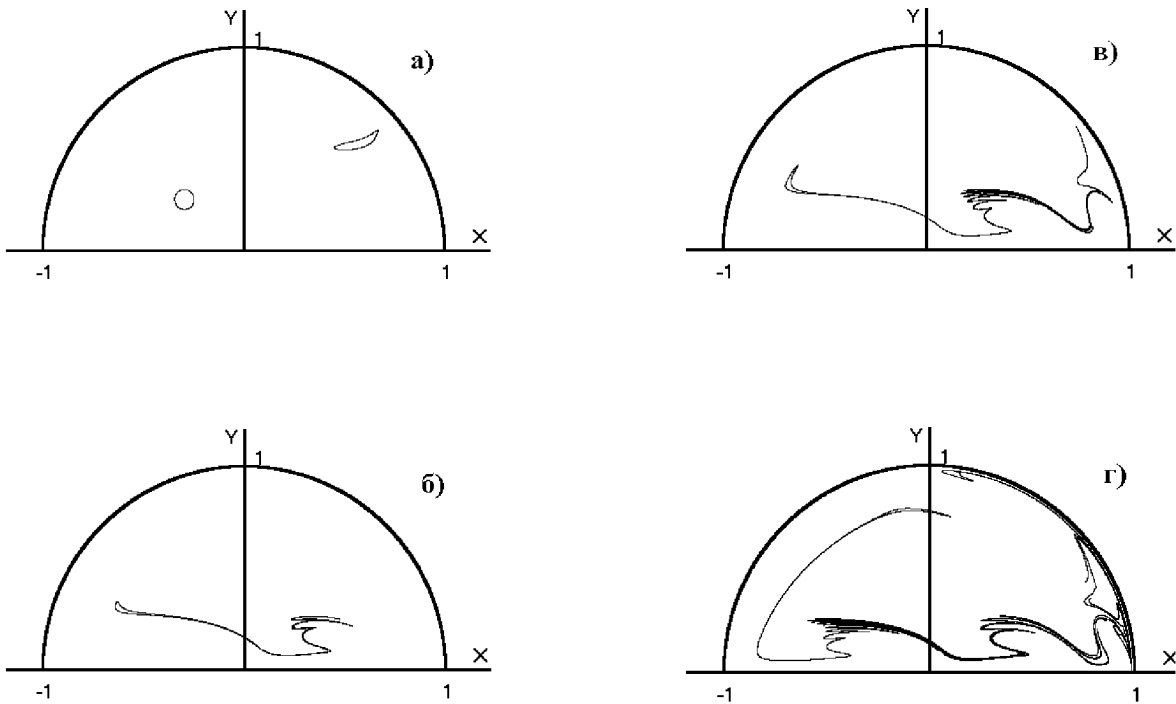


Рис. 7. Адвекция кругового контура $r = 0.05$ с центром в точке $(-0.302, 0.256)$ при $V = 1.5, U = 0.8$ во времени: $a - t = 12T, б - t = 35T, в - t = 50T, г - t = 64T$

слеживать процесс адвекции границ отмеченных областей в произвольном поле скорости.

С течением времени изначально круговая область деформируется. Однако на начальных фазах процесса адвекции выделенный контур не подвергается существенным деформациям: длина контура фактически не претерпевает изменений. На рис. 7, а показано положения контура в начальный момент времени и в момент $t = 12T$, который соответствует полутора оборотам исследуемого контура вокруг центральной области течения.

Интенсивный режим процесса перемешивания можно отметить, начиная только с момента времени $t = 35T$, представленного на рис. 7, б. За это время контур сильно вытянулся и деформировался почти в тонкую линию, которая занимает нижнюю часть течения. Интересно отметить, что контур постепенно перемещается в хаотическую пристеночную область течения. В дальнейшем эта тенденция продолжается: в моменты времени $t = 50T$, и $t = 64T$ контур растянут почти по всей хаотической зоне (рис. 7, в, г).

В противоположность этому случаю, процесс

адвекции пассивного контура, охватывающего в начальный момент времени эллиптическую точку, протекает во времени менее интенсивно. На рис. 8 показано движение контура в течение первых пяти периодов при $U = 0.8, V = 1.5$, (что соответствует рис. 6, в) с центром в эллиптической точке с координатами $(-0.1169, 0.5605)$. Для наглядности радиус контура был увеличен до 0.1. Анализ показывает, что форма контура меняется с течением времени незначительно. Границы исследуемой области не выходят за пределы эллиптического острова сечения Пуанкаре даже для моментов времени одного порядка по сравнению со случаем, рассмотренным на рис. 7.

На рис. 9 показано изменение длины кругового контура с течением времени. Сплошная линия соответствует круговому контуру, центр которого изначально помещен в гиперболическую точку (рис. 7), а штриховая линия – круговому контуру, центр которого помещен в эллиптическую точку (рис. 8). Видно, что на начальных фазах процесса адвекции выделенные контуры не подвергаются существенной деформации. Растяжение областей за время $0 < t < 35$ оказывается незначитель-

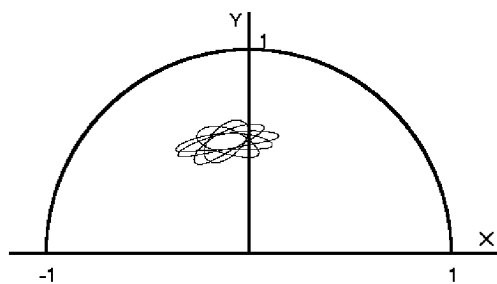


Рис. 8. Изменение кругового контура $r = 0.1$ за пять периодов в окрестности эллиптической точки $(-0.1169, 0.5605)$ при $U = 0.8, V = 1.5$

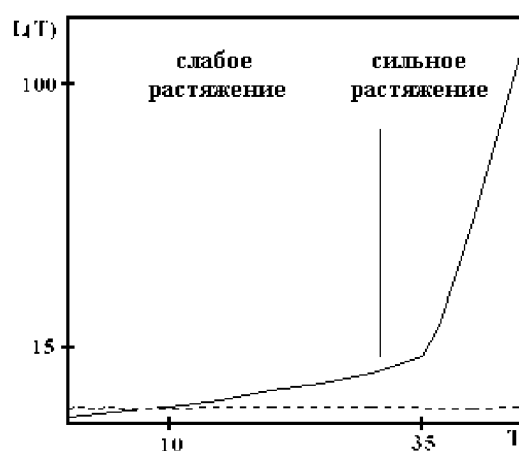


Рис. 9. Изменение во времени длин контуров, изначально расположенных в хаотической (сплошная линия) и регулярной (штриховая) областях. Описание в тексте

ным в обоих случаях. Затем длина первого контура начинает увеличиваться экспоненциально, что свидетельствует о наступлении режима хаотической адвекции [8, 12, 14, 20, 22]. В то же время, длина второго контура практически не меняется, что является характерным для регулярных режимов перемешивания пассивных областей жидкости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Траектория движения жидкой частицы определяется начальным ее положением в исследуемом течении: пассивная частица (маркер) может участвовать как в регулярном, так и в хаотическом движении. При хаотическом движении траектории соседних частиц сильно зависят от начального положения. Как результат, изначально компактная область течения претерпевает значительные деформации, наступает интенсивный режим перемешивания. В то же время, если жид-

кие частицы участвуют в упорядоченном движении, жидкие контуры, изначально расположенные в этих областях, с течением времени не испытывают существенных деформаций.

Для того, чтобы определить области интенсивного перемешивания, необходимо установить зоны хаотического движения, используя при этом различные методы и критерии хаотической динамики: фазовые траектории, сечение Пуанкаре, наибольший показатель Ляпунова, тип периодических точек течения.

Анализ периодических точек является фундаментальным составляющим при решении задач хаотической адвекции. Обычно периодические точки классифицируют как эллиптические и гиперболические в зависимости от движения жидкости вокруг них. Движение жидкости в области, близлежащей к гиперболической точке, включает в себя процессы растяжения и сжатия. Как результат, эти области течения обладают достаточно сильным перемешиванием, а длина контура с течением времени экспоненциально увеличивается. В то же время, движение жидкости вокруг эллиптических точек характеризуется вращением. При этом расстояние между двумя произвольными близлежащими точками с течением времени существенно не меняется. Как результат, процессы адвекции не сопровождаются существенным растяжением, длина замкнутого контура увеличивается с течением времени по линейному закону. Эллиптические точки окружены инвариантными замкнутыми кривыми. Частица, изначально лежащая внутри такой кривой, останется внутри нее все время. В силу несжимаемости течения жидкость, находящаяся внутри замкнутой кривой, никогда не сможет пересечь замкнутую кривую, охватывающую эллиптическую точку. Следовательно, процессы перемешивания в областях, близлежащих к эллиптическим точкам, оказываются слабыми и не приводят к существенным процессам перемешивания за достаточно большие временные интервалы.

В целом, можно заключить, что определение зон интенсивного перемешивания, основанное на анализе сечения Пуанкаре, в задаче об адвекции пассивных жидких областей в периодических течениях в полукруге оказывается достаточно эффективным. Другие диагностические критерии (траектории движения жидких частиц, наибольший показатель Ляпунова, анализ периодических точек и их эволюция при изменении параметров течения) свидетельствуют о том, что процессы перемешивания жидкости в области, ограниченной полукругом, определяются свойствами сечения Пу-

анкаре: интенсивное перемешивание следует ожидать только в тех областях течения, в которых сечение Пуанкаре обладает хаотическими свойствами.

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Л.И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // Усп.Физ.Наук.– 1979.– **128**.– С. 579-624.
2. Whelan D. N., Goodings D. A., Cannizzo J. K. Two balls in one dimension with gravity // Phys. Rev. A.– 1990.– **42**.– P. 742–754.
3. Levin P. W., Koch B. P. Chaotic behavior of a parametrically excited damped pendulum // Phys. Lett.– 1981.– **A86**.– P. 71–74.
4. Мун Ф. Хаотические колебания.– М.: Мир, 1990.– 312 p.
5. Заславский Г. М., Сагдеев Р. Э. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса.– М.: Наука, 1988.– 368 с.
6. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение.– М.: Мир, 1988.– 240 с.
7. Pasmantier R. A. From chaotic advection to chaotic Schrödinger-type equation // Phys. Rev.– 1990.– **42**.– P. 3622–3625.
8. Ottino J. M. The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 364 p.
9. Kusch H. A., Ottino J. M. Experiments on mixing in continuous chaotic flows // J. Fluid Mech.– 1992.– **236**.– P. 319–348.
10. Hellou M., Coutanceau M. Cellular Stokes flow induced by rotation of a cylinder in a closed channel // J. Fluid Mech.– 1992.– **236**.– P. 557–577.
11. Jones S. W. The enhancement of mixing by chaotic advection // Phys. Fluids.– 1991.– **A3**.– P. 1081–1086.
12. Tangborn A. V., Silevitch D. M., Howes T. Chaotic advection in a 2-D mixed convection flow // Chaos.– 1995.– **5**.– P. 432–438.
13. Ghosh S., Chang H.-C., Sen M. Heat-transfer enhancement due to slender recirculation and chaotic transport between counter-rotating eccentric cylinders // J. Fluid Mech.– 1992.– **238**.– P. 119–154.
14. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Trans. R. Soc. London.– 1990.– **333**.– P. 273–288.
15. Jana S. C., Metcalfe G., Ottino J. M. Experimental and computational studies of mixing in complex Stokes flows: the vortex mixing flow and multicellular cavity flows // J. Fluid Mech.– 1994.– **269**.– P. 199–246.
16. Ryrie S. C. Mixing by chaotic advection in a class of spatially periodic flows // J. Fluid Mech.– 1992.– **236**.– P. 1–26.
17. Jones S. W., Young W. R. Shear dispersion and anomalous diffusion by chaotic advection // J. Fluid Mech.– 1994.– **280**.– P. 149–172.
18. Babiano A., Boffetta G., Provenzale A., Vulpiani A. Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence // Phys. Fluids.– 1994.– **6**.– P. 2465–2474.
19. Saadtjian E., Midoux N., André J. C. On the solution of Stokes' equations between confocal ellipsis // Phys. Fluids.– 1994.– **6**.– P. 3833–3846.
20. Meleshko V. V., Konstantinov M. Yu., Gurzhi A. A., Konovalyuk T. P. Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices // Phys. Fluids.– 1992.– **A4**.– P. 2779–2797.
21. Aref H. Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // Ann. Rev. Fluid Mech.– 1983.– **15**.– P. 345–390.
22. Meleshko V. V., van Heijst G. J. F. Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties // Chaos, Soliton & Fractals.– 1994.– **4**.– P. 977–1010.
23. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
24. Meleshko V. V., Gomilko A. M. Two-dimensional Stokes flow in a semicircle // Applied Hydromechanics.– 1999.– **1**. N.1.– P. 35–37.
25. Гуржій О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г. Я. Ф. Метод кускової сплайн-інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доп. НАН України.– 1996.– **N.8**.– P. 54–62.