

УДК 532.5

ОБТЕКАНИЕ СИСТЕМЫ КОЛЬЦЕВЫХ ДИСКОВ ПОТОКОМ СТОКСА

А. М. ГОМИЛКО*, В. С. МАЛЮГА*, В. В. МЕЛЕШКО*, М. ВЕРБРЮГГЕН**,

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

** Eindhoven University of Technology

Получено 10.02.99

Рассматривается осесимметричное течение Стокса вне трех тонких кольцевых дисков. На основании теории гидродинамических потенциалов и метода ортогональных полиномов соответствующая граничная задача для уравнений Стокса сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода. В результате численных расчетов проанализирована зависимость значения силы сопротивления от геометрического параметра и представлены линии тока, описывающие кинематическую картину течения.

Розглянуто осесиметричну течію Стокса поза трьох тонких кільцевих дисків. На основі теорії гідродинамічних потенціалів і методу ортогональних поліномів відповідна гранична задача для рівнянь Стокса зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. В результаті чисельних розрахунків проаналізовано залежність сили опору від значення геометричного параметра та представлено лінії течії, що описують кинематичну картину потоку.

The axisymmetric Stokes flow past three thin annular disks is considered. The system of Fredholm integral equations of the first kind with a logarithmic singularity, obtained from the condition of zero velocity at the disks, is transformed into an infinite linear system of algebraic equations of the second kind. The expansions of unknown densities in terms of the Chebyshev polynomials are used for this reducing. The geometrical parameter value dependence of the drag forces is analysed. The streamlines are presented to describe the kinematics of the flow.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача о стационарном осесимметричном течении Стокса вязкой несжимаемой жидкости при обтекании набегающим из бесконечности равномерным потоком трех коаксиально расположенных тонких жестких кольцевых дисков. Разработка алгоритма расчетов и анализ такой модельной задачи может быть полезным при изучении более сложных течений, вызываемых движением геликоидальных импеллеров [1].

Стационарное течение Стокса в различных областях является объектом многих исследований. Наряду с получением точных решений уравнений Стокса [2], активно развиваются численные методы решения граничных задач (см. обзор [3]). При этом важным является анализ значения коэффициента сопротивления рассматриваемого обтекаемого препятствия, исследование поведения линий тока в стационарных течениях Стокса и динамики Лагранжевых частиц [2, 4].

Граничным задачам теории потенциала для кольцевого диска посвящены работы [5, 6]. В [7] приведены результаты экспериментальных и численных исследований значения сопротивления кольцевого диска, возникающего при его обтекании потоком Стокса, для численного моделирования использовалась модель точечных источников, расположенных на поверхности диска (“beads-on-a-shell model”). В статьях [8, 9] на основании ме-

тода тройных интегральных уравнений дано сведение задачи о движении кольцевых дисков в жидкости Стокса к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

В данной работе, по аналогии с [5], для сведения граничной задачи для уравнений Стокса к системе интегральных уравнений используется гидродинамический потенциал простого слоя [10]. В результате получается система интегральных уравнений первого рода с ядрами, имеющими логарифмические особенности. Одним их эффективных методов численного решения таких систем является метод ортогональных полиномов (см. [12, 13]): использование разложений неизвестных плотностей по полиномам Чебышева первого рода дает возможность свести интегральные уравнения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода. В статье дано обсуждение эффективности разработанного численного аналитического подхода. Проанализированы полученные численные результаты, относящиеся к изменению поведения линий тока и значения коэффициентов сопротивления дисков при вариации геометрических параметров задачи.

1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим стационарное течение Стокса вне трех тонких жестких кольцевых дисков. В цилиндрической системе координат (ρ, θ, z) диски

D_j , $j = 0, \pm 1$ с внутренним и внешним радиусами a_0, a_1 определяются соотношениями

$$D_0: \quad a_0 < \rho < a_1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z = 0,$$

$$D_{\pm 1}: \quad a_0 < \rho < a_1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z = \pm h_0, \quad h_0 > 0.$$

Осесимметричное поле скорости течения \mathbf{v} определяется компонентами $v_\rho(\rho, z)$ и $v_z(\rho, z)$, а движение жидкости описывается уравнениями Стокса, приведенными в безразмерной форме:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где p – скалярное поле давления. Считаем, что набегающий поток имеет на бесконечности безразмерную скорость $\mathbf{v}_\infty = (0, 0, -1)$. При этом граничные условия на поверхности дисков и на бесконечности имеют вид:

$$v_\rho(\rho, 0) = v_z(\rho, 0) = 0, \quad \rho \in (b, 1), \quad (2)$$

$$v_\rho(\rho, \pm h) = v_z(\rho, \pm h) = 0, \quad \rho \in (b, 1), \quad (3)$$

$$v_\rho(\rho, z) \rightarrow 0, \quad v_z(\rho, z) + 1 \rightarrow 0, \quad (\sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow \infty), \quad (4)$$

где $b = a_0/a_1$, $h = h_0/a_1$.

Сведение задачи (1) – (4) к системе интегральных уравнений проведем на основании теории гидродинамических потенциалов [10], а именно представим поле скорости в форме гидродинамического потенциала простого слоя. Для потока вблизи осесимметричного тела интегрирование по угловой координате θ от 0 до 2π в выражении для потенциала простого слоя может быть выполнено аналитически, а результат выражен через полные эллиптические интегралы [2]. Необходимые для интегрирования формулы приведены в [16]. В целях краткости изложения математические выкладки опускаем, а приведем лишь окончательные выражения. Поле скорости и давления в потоке, обтекающем три диска, представлено в цилиндрической системе координат:

$$v_\rho(\rho, z) = v_\rho^0(\rho, z) + v_\rho^1(\rho, z) - v_\rho^1(\rho, -z), \quad (5)$$

$$v_z(\rho, z) = -1 + v_z^0(\rho, z) + v_z^1(\rho, z) + v_z^1(\rho, -z), \quad (6)$$

$$p(\rho, z) = p^0(\rho, z) + p^1(\rho, z) - p^1(\rho, -z), \quad (7)$$

где

$$v_\rho^0(\rho, z) = \frac{z}{4\pi\rho} \int_b^1 \frac{l_1(r)r}{\sqrt{(\rho+r)^2 + z^2}} \left\{ K(\nu) - \frac{r^2 - \rho^2 + z^2}{(\rho-r)^2 + z^2} E(\nu) \right\} dr, \quad (8)$$

$$v_\rho^1(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_b^1 \frac{l_2(r)}{\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h)^2}} \times \left\{ (\rho^2 + r^2 + 2(z-h)^2)K(\nu_1) - \left[(\rho+r)^2 + (z-h)^2 \left(1 + \frac{r^2 + \rho^2 + (z-h)^2}{(\rho-r)^2 + (z-h)^2} \right) \right] E(\nu_1) \right\} dr + \frac{z-h}{4\pi\rho} \int_b^1 \frac{l_3(r)r}{\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h)^2}} \left\{ K(\nu_1) - \frac{r^2 - \rho^2 + (z-h)^2}{(\rho-r)^2 + (z-h)^2} E(\nu_1) \right\} dr. \quad (9)$$

$$v_z^0(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_b^1 \frac{l_1(r)r}{\sqrt{(\rho+r)^2 + z^2}} \left\{ K(\nu) + \frac{z^2}{(\rho-r)^2 + z^2} E(\nu) \right\} dr, \quad (10)$$

$$v_z^1(\rho, z) = -\frac{(z-h)}{4\pi} \int_b^1 \frac{l_2(r)}{\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h)^2}} \times \left\{ K(\nu_1) - \frac{\rho^2 - r^2 + (z-h)^2}{(\rho-r)^2 + (z-h)^2} E(\nu_1) \right\} dr + \frac{1}{2\pi} \int_b^1 \frac{l_3(r)r}{\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h)^2}} \left\{ K(\nu_1) + \frac{(z-h)^2}{(\rho-r)^2 + (z-h)^2} E(\nu_1) \right\} dr. \quad (11)$$

$$p^0(\rho, z) = \frac{z}{\pi} \int_b^1 \frac{l_1(r)r}{\sqrt{(\rho+r)^2 + z^2}} \frac{E(\nu)}{(\rho-r)^2 + z^2} dr, \quad (12)$$

$$p^1(\rho, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_b^1 \frac{l_2(r)}{\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h)^2}} \left\{ K(\nu_1) - \frac{\rho^2 - r^2 + (z-h)^2}{(\rho-r)^2 + (z-h)^2} E(\nu_1) \right\} dr + \frac{z-h}{\pi} \int_b^1 \frac{l_3(r)r}{\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h)^2}} \times \frac{E(\nu_1)}{(\rho-r)^2 + (z-h)^2} dr. \quad (13)$$

Здесь и далее

$$\nu \equiv \nu(\rho, z; r) = 2\sqrt{\frac{\rho r}{(\rho+r)^2 + z^2}},$$

$$\nu_1 \equiv \nu_1(\rho, z; r) = \nu(\rho, z-h; r), \quad j = 1, 2,$$

а $K(\nu)$, $E(\nu)$ – полные эллиптические интегралы и первого и второго рода.

Удовлетворение граничных условий (2), (3) в равенствах (5), (6) и (8) – (11), определяющих поле скорости, приводит к следующим линейным интегральным уравнениям первого рода, включающим три неизвестные функции $l_j(r)$, $j = 1, 2, 3$:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \int_b^1 l_j(r) Q_{i,j}(\rho, r) dr = 1 - \delta_{i2}, \quad (14)$$

$$\rho \in (b, 1), \quad i = 1, 2, 3,$$

где ядра

$$Q_{1,1} = \frac{2r}{\rho+r} K(\nu_0), \quad Q_{1,2} = \frac{2h}{\sqrt{(\rho+r)^2+h^2}} \times$$

$$\times \left\{ K(\nu_3) - \frac{\rho^2-r^2+h^2}{(\rho-r)^2+h^2} E(\nu_3) \right\},$$

$$Q_{1,3} = \frac{4r}{\sqrt{(\rho+r)^2+h^2}} \left\{ K(\nu_3) + \frac{h^2}{(\rho-r)^2+h^2} E(\nu_3) \right\},$$

$$Q_{2,1} = \frac{hr}{\rho\sqrt{(\rho+r)^2+h^2}} \left\{ K(\nu_3) - \frac{r^2-\rho^2+h^2}{(\rho-r)^2+h^2} E(\nu_3) \right\},$$

$$Q_{2,2} = \frac{(\rho^2+r^2)}{\rho(\rho+r)} \left\{ K(\nu_0) - \frac{(\rho+r)^2}{\rho^2+r^2} E(\nu_0) \right\} -$$

$$- \frac{1}{\rho\sqrt{(\rho+r)^2+4h^2}} \left\{ (\rho^2+r^2+8h^2)K(\nu_4) - \right.$$

$$\left. - \left[(\rho+r)^2+4h^2 \left(1 + \frac{r^2+\rho^2+4h^2}{(\rho-r)^2+4h^2} \right) \right] E(\nu_4) \right\},$$

$$Q_{2,3} = \frac{2hr}{\rho\sqrt{(\rho+r)^2+4h^2}} \left\{ K(\nu_4) - \frac{r^2-\rho^2+4h^2}{(\rho-r)^2+4h^2} E(\nu_4) \right\}, \quad Q_{3,1} = \frac{1}{2} Q_{1,3},$$

$$Q_{3,2} = \frac{2h}{\sqrt{(\rho+r)^2+4h^2}} \left\{ K(\nu_4) - \frac{\rho^2-r^2+4h^2}{(\rho-r)^2+4h^2} E(\nu_4) \right\},$$

$$Q_{3,3} = \frac{2r}{\rho+r} K(\nu_0) + \frac{2r}{\sqrt{(\rho+r)^2+4h^2}} \left\{ K(\nu_4) + \frac{4h^2}{(\rho-r)^2+4h^2} E(\nu_4) \right\},$$

$$\nu_0 = 2\sqrt{\frac{\rho r}{\rho+r}}, \quad \nu_3 = 2\sqrt{\frac{\rho r}{(\rho+r)^2+h^2}},$$

$$\nu_4 = 2\sqrt{\frac{\rho r}{(\rho+r)^2+4h^2}}.$$

Система интегральных уравнений (14) может быть решена численно. Уравнения (14) являются интегральными уравнениями с логарифмической сингулярностью при $\rho-r \rightarrow 0$. Действительно, используя асимптотическое разложение полных эллиптических интегралов для аргумента, близкого к 1, можно легко показать, что при $|\rho-r| \rightarrow 0$

$$Q_{i,j} = -\delta_{ij} \ln \frac{|\rho-r|}{\rho+r} + o(1), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (15)$$

В принципе, интегрирование функции с логарифмической сингулярностью может быть выполнено логарифмической квадратурой Гаусса, хотя более приемлемым является подход, ведущий к достаточно точной и легко реализуемой численной схеме. С этой целью может быть использовано разложение неизвестных плотностей по собственным функциям, что приводит интегральные уравнения к системе линейных алгебраических уравнений. Следуя методу ортогональных полиномов [13], неизвестные функции раскладываются по полиномам Чебышева T_m первого рода. Для $r \in (b, 1)$ и $j = 1, 2, 3$

$$l_j(r) = \frac{\hat{l}_j(r)}{\sqrt{(1-r)(r-b)}}, \quad \hat{l}_j(r) = \sum_{m=0}^{\infty} l_{j,m} \hat{T}_m(r),$$

$$\hat{T}_m(r) = T_m \left(\frac{2r-b-1}{1-b} \right). \quad (16)$$

После подстановки представления (16) в интегральные уравнения (14) и использования соотношений

$$\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{(1-r)(r-b)}} \ln \frac{|\rho-r|}{\rho+r} dr = \pi \ln g(\rho),$$

$$\int_b^1 \frac{\hat{T}_m(r)}{\sqrt{(1-r)(r-b)}} \ln \frac{|\rho-r|}{\rho+r} dr =$$

$$= -\frac{\pi}{m} \left[\hat{T}_m(\rho) - (-1)^m g^m(\rho) \right], \quad m > 0,$$

где

$$g(\rho) = \frac{2\rho+1+b}{1-b} - \sqrt{\left(\frac{2\rho+1+b}{1+b} \right)^2 - 1},$$

и соотношений ортогональности

$$\int_b^1 \frac{\hat{T}_n(r) \hat{T}_m(r)}{\sqrt{(1-r)(r-b)}} dr = \frac{\pi}{2} \delta_{nm} (1 + \delta_{0m}), \quad (17)$$

следует, что

$$\begin{aligned}
 & l_{i,j} c_{i,j} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=0}^{\infty} l_{j,m} \int_b^1 \int_b^1 \{Q_{i,j}(\rho, r) + \\
 & + \delta_{i,j} \ln |\rho - r|\} \frac{\hat{T}_i(\rho)}{\sqrt{(1-\rho)(\rho-b)}} \times \\
 & \times \frac{\hat{T}_m(r)}{\sqrt{(1-r)(r-b)}} dr d\rho = (1 - \delta_{i2}) \delta_{0,j} \pi, \\
 & i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$c_{i,0} = -\frac{1}{4} \int_b^1 \hat{T}_0(\rho) \ln g(\rho) d\rho, \quad c_{i,j} = \frac{\pi}{8j}, \quad j > 0.$$

Уравнения (18) составляют бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, в которой определяются все три последовательности неизвестных постоянных коэффициентов $l_{1,j}, l_{2,j}, l_{3,j}$.

Одно из свойств представленного решения представлений (16) для неизвестных функций становится очевидным при рассмотрении течения вблизи внутреннего и внешнего краев кольцевых дисков. Пусть полярная система координат (t, ξ) в точке $\rho = b, z = 0$ в плоскости $\theta = 0$ определена следующим образом:

$$\rho - b = t \cos \xi, \quad z = t \sin \xi, \quad t \in (0, \epsilon), \quad \xi \in (0, 2\pi).$$

Тогда из представленного решения (7), (12), (13) и представления (16) с использованием [16] следует что скалярное поле давления вблизи внутренней края диска D_0 представляется как

$$\begin{aligned}
 p & \asymp \frac{t \sin \xi}{2\pi} \int_b^1 \frac{l_1(r)}{(r-b-t \cos \xi)^2 + t^2 \sin^2 \xi} dr \asymp \\
 & \asymp \frac{\hat{l}_1(b)}{2\pi \sqrt{1-b}} t^{-1/2} \sin \xi \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{x^2 - 2x \cos \xi + 1} dx = \\
 & = \frac{\hat{l}_1(b)}{2\sqrt{1-b}} t^{-1/2} \cos \xi / 2, \quad t \rightarrow 0, \quad \xi \in (0, 2\pi),
 \end{aligned}$$

где константа (см. (16))

$$\hat{l}_1(b) = \sum_{m=0}^{\infty} l_{1,m} T_m(-1) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m l_{1,m}.$$

Посредством аналогичных рассуждений можно получить выражение для давления вблизи внешнего края:

$$\begin{aligned}
 p & \asymp \frac{\hat{l}_1(1)}{2\sqrt{1-b}} t^{-1/2} \sin \xi / 2, \quad t \rightarrow 0, \quad \xi \in (0, 2\pi), \\
 \hat{l}_1(1) & = \sum_{m=0}^{\infty} l_{1,m},
 \end{aligned}$$

где локальные полярные координаты

$$\rho - 1 = t \cos \xi, \quad z = t \sin \xi, \quad t \in (0, \epsilon), \quad \xi \in (-\pi, \pi).$$

Представленные результаты показывают, что давление имеет корневую сингулярность на краях дисков, как было показано Моффатом (Moffat) [17] для плоских углов.

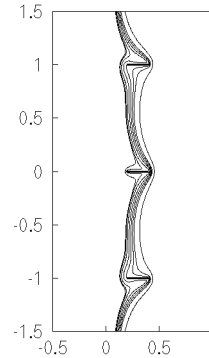


Рис. 1. Линии тока при обтекании трех кольцевых дисков, $h_0 = 1, a_0 = 0.2, a_1 = 0.4$

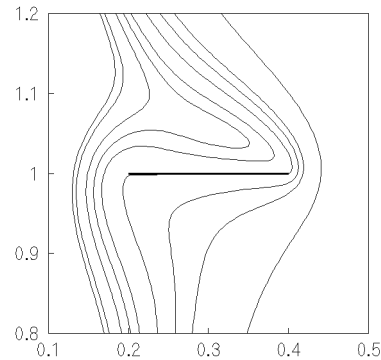


Рис. 2. Линии тока вблизи верхнего диска, $h_0 = 1, a_0 = 0.2, a_1 = 0.4$

2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (18)

При численных расчетах бесконечная система уравнений (18) усекалась, а полученная таким образом конечная система уравнений с конечным числом неизвестных коэффициентов $l_{i,j}, i = 1, 2, 3, j = 0, 1, \dots, J - 1$ решалась. Неизвестные

Табл. 1. Численная погрешность выполнения граничных условий для $b = 0.5$.

h_0	N	$\max v_\rho(\rho, h_0) $	$\max v_z(\rho, h_0) $	$\max v_z(\rho, 0) $
0.5	2	0.02	0.02	0.04
0.5	4	0.02	0.01	0.004
1	2	0.014	0.008	0.02
1	4	0.012	0.008	0.005
2	2	0.017	0.01	0.006
2	4	0.016	0.009	0.006

Табл. 2. Численные значения нормализованного коэффициента сопротивления F_0 при обтекании одного кольцевого диска.

b	F_0	Roger и Hussey (численные результаты) (1982)	Roger и Hussey (эксперимент) (1982)	Davis (1991)
0.95	0.7478	—	0.771 ($Re = 0.002$)	—
0.8	0.8976	0.8973	—	0.8977
0.76	0.9020	—	—	—
0.66	0.9494	0.9492	0.959	0.9494
0.6	0.9651	0.9651	—	—
0.5	0.9810	0.9809	0.989 ($Re = 0.014$)	0.9810
0.4	0.9907	0.9907	—	—
0.2	0.9989	—	—	—

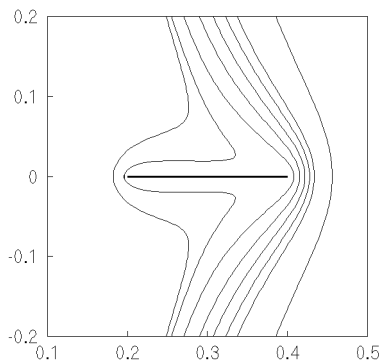


Рис. 3. Линии тока вблизи среднего диска, $h_0 = 1, a_0 = 0.2, a_1 = 0.4$

постоянные коэффициенты решения могут быть получены с произвольной точностью посредством увеличения числа уравнений и неизвестных уравненной системы. Интегралы в (18) рассчитывались по формулам Гаусса-Чебышева [18]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(\cos(2k-1)\pi/n).$$

Выполнение граничных условий

$$v_z(\rho, 0) = 0, v_\rho(\rho, h) = 0, v_z(\rho, h) = 0, \rho \in (b, 1)$$

полученным решением проверялось численно.

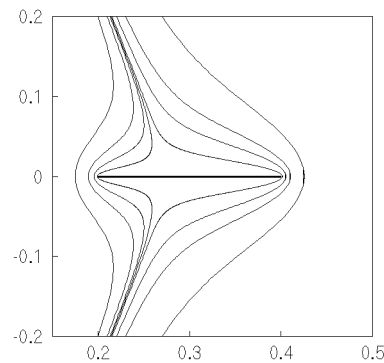


Рис. 4. Линии тока при обтекании одного кольцевого диска, $h_0 = 1, a_0 = 0.2, a_1 = 0.4$

Расчеты производились для различных значений параметров b и h . Критерий точности состоял в том, чтобы численные значения $|v_\rho|, |v_z|$ в

наборе точек, расположенных равномерно на интервале $(b, 1)$, не превосходили определенной выбранной величины. Сходимость численного решения при возрастании J показана в табл. 1 для различных значений параметров b, h . Всего двух или четырех слагаемых оказывается достаточно для удовлетворения граничных условий на поверхности дисков.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Важной физической характеристикой ламинарного обтекания твердого тела набегающим потоком является значение силы сопротивления.

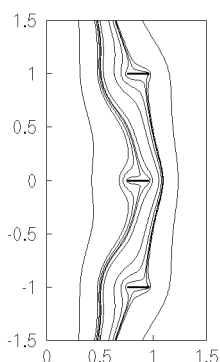


Рис. 5. Линии тока при обтекании трех кольцевых дисков, $h_0 = 1, a_0 = 0.76, a_1 = 0.96$

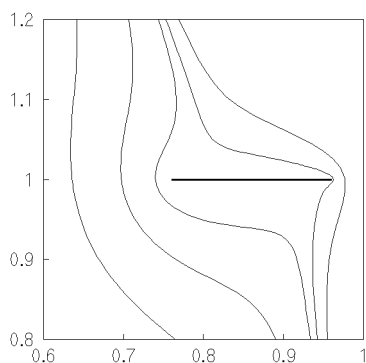


Рис. 6. Линии тока вблизи верхнего диска, $h_0 = 1, a_0 = 0.76, a_1 = 0.96$

Используя представления (7), (12), (13) и свойства потенциала простого слоя, можно предста-

вить скачек давления на дисках следующим образом:

$$\begin{aligned} p(\rho, +0) - p(\rho, -0) &= l_1(\rho), \\ p(\rho, h+0) - p(\rho, h-0) &= l_3(\rho), \quad \rho \in (b, 1). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда нормализованная (к сопротивлению кругового диска единичного радиуса [2]) сила сопротивления F_j , возникающая в потоке на диске D_j , $j = 0, \pm 1$, согласно равенствам (19), представляется в виде

$$F_0 = \frac{\pi}{8} \int_b^1 l_1(r) r dr, \quad F_j = \frac{\pi}{8} \int_b^1 l_3(r) r dr, \quad j = \pm 1.$$

Или с использованием выражений (16), (17)

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^{\infty} l_{1,m} \int_b^1 r \hat{T}_m(r) dr = \\ &= \frac{\pi}{16} \sum_{m=0}^{\infty} l_{1,m} \int_{-1}^1 \frac{(1-b)x + (1+b)}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) dx = \\ &= \frac{\pi^2}{32} \{2l_{1,0}(1+b) + l_{1,1}(1-b)\}, \end{aligned}$$

и аналогично

$$F_1 = \frac{\pi^2}{32} \{2l_{3,0}(1+b) + l_{3,1}(1-b)\}.$$

Табл. 3. Расчетные значения нормализованных коэффициентов сопротивления F_0, F_1

a_0	h_0	F_0	F_1
0.5	0.5	0.1910	0.5053
0.5	1	0.2746	0.5455
0.5	2	0.4015	0.6137
0.5	2.5	0.4552	0.6413

Зависимость силы сопротивления F_0 от внутреннего радиуса b при обтекании одного кольцевого диска представлена в табл. 2. Для исследования такого течения необходимо исключить граничные условия (3) из рассмотрения, а в равенствах (5) – (7) положить $v_\rho^1 = v_z^1 = p^1 \equiv 0$. Данные табл. 2 показывают хорошее соответствие полученных в данной работе расчетных результатов численным и экспериментальным данным работ [7, 8].

Значения сил сопротивления F_0, F_1 в потоке, обтекающем три кольцевых диска, приведены в табл. 3 для различных значений параметра h . При увеличении h , т. е. при удалении дисков друг от друга, значения F_0, F_1 возрастают и приближаются к

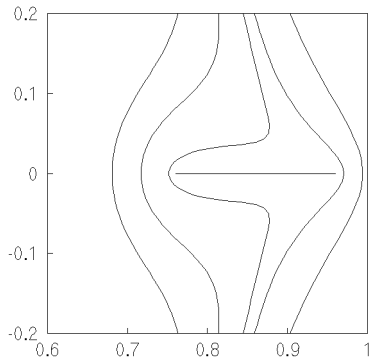
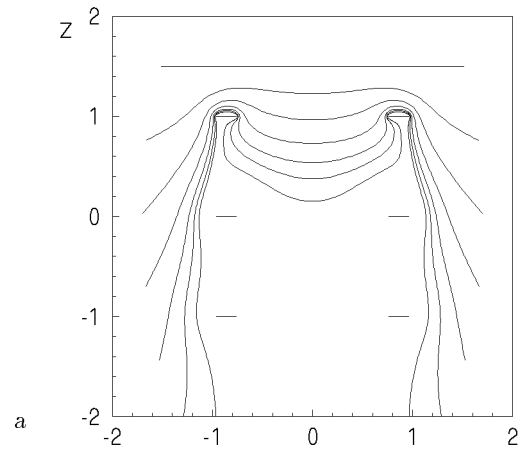


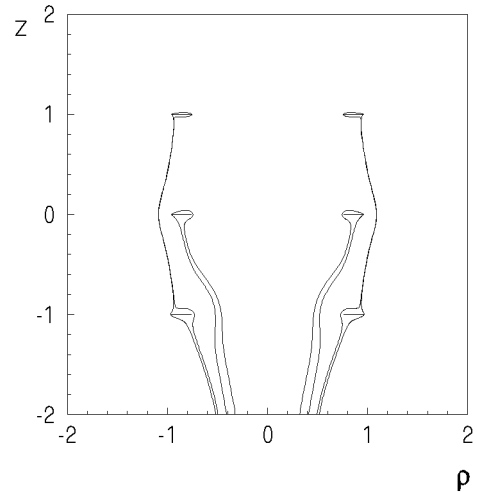
Рис. 7. Линии тока вблизи среднего диска, $h_0 = 1, a_0 = 0.76, a_1 = 0.96$

соответствующему значению силы сопротивления одного диска, приведенному в табл. 2.

На рис. 1, 5 показаны линии тока исследуемого осесимметричного течения. Рис. 1 соответствует геометрическим параметрам $h_0 = 1, a_0 = 0.2, a_1 = 0.4$, а рис. 5 – $h_0 = 1, a_0 = 0.76, a_1 = 0.92$. В обоих случаях существуют линии тока, огибающие поверхность крайних дисков с внутренней стороны, а среднего диска – с внешней. На рис. 2 и 6 представлена увеличенная локальная картина линий тока, проходящих вблизи верхнего диска, а на рис. 3, 7 – вблизи среднего диска. Как показано на рис. 2, при достаточно малых радиусах сепаратриса замыкается на верхней поверхности крайнего диска вблизи его внешнего края, а на нижней поверхности, наоборот, – вблизи вну-



a



b

Рис. 9. Деформация жидкой линии, движущейся вместе с потоком, а – на интервале времени $t = 0 - 5.2$, б – в момент $t = 19.6$

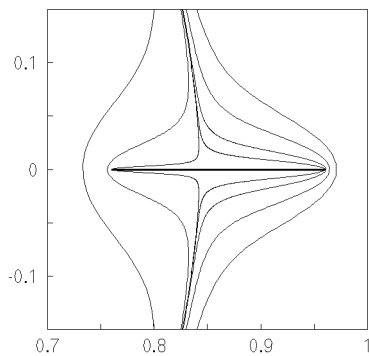


Рис. 8. Линии тока при обтекании одного кольцевого диска, $h_0 = 1, a_0 = 0.76, a_1 = 0.96$

тренного отверстия. Изменение радиусов дисков не приводит к существенному изменению кинематической картины течения в окрестности среднего диска. Сравнение этих результатов с приведенными на рис. 4 и 8, где приведены линии тока течения, обтекающего один кольцевой диск, показывает возмущение, вносимое крайними дисками.

Рис. 9 показывает процесс движения и деформации материальной линии, состоящей из пассив-

ных частиц жидкости, которая набегаёт на диски вместе с потоком. С этой целью численно интегрировалась динамическая система

$$d\rho(t)/dt = v_\rho(\rho, z), \quad dz(t)/dt = v_z(\rho, z),$$

$$\rho(0) = \rho_0, \quad z(0) = z_0,$$

с соответствующими начальными условиями ρ_0, z_0 . Со временем линия растягивается вдоль сепаратрисы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный в представленной работе численно-аналитический алгоритм решения задачи Стокса для потока, обтекающего твердое тело, основан на применении теории потенциалов. Он позволяет свести решение соответствующей граничной задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Разработанный подход может применяться для решения задач обтекания стоксовым потоком тел более сложной формы, а общий вид решения может быть использован при решении задачи Стокса в ограниченных резервуарах с твердыми вставками – импеллерами. Описанный подход может быть применен к произвольному числу коаксиально расположенных дисков, а также к дискам с различными парами радиусов.

Численное тестирование выполнения полученным решением граничных условий показывает хорошую сходимость, что говорит о вполне удовлетворительной точности проведенных расчетов. Следует отметить также соответствие полученных в данной работе численных значений коэффициента сопротивления в потоке, обтекающем один кольцевой диск, экспериментальным и расчетным результатам других авторов, использовавшим другие методы.

Описанное в данной работе чередование внутренней и внешней сторон обтекания дисков проходящим потоком может происходить и при обтекании тел более сложной формы – импеллеров. В этом случае описанное явление играет роль одного из механизмов перемешивания.

1. *Tatterson G. B.* Fluid Mixing and Gas Dispersion in Agitated Tanks.– New-York: McGraw-Hill, Inc., 1991.– 548 p.
2. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds Number Hydrodynamics.– London: Kluwer Academic Publishers, 1991.– 553 p.
3. *Weinbaum S., Ganatos P., Yan Z. Y.* Numerical multiple and boundary integral equation techniques in Stokes flow // *Annu. Rev. Fluid Mech.*– 1990.– **22**.– P. 275–316.
4. *Ottino J. M.* The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 364 p.
5. *Leppington F. G., Levine H.* Some axially symmetric potential problems // *Proc. Edinb. Math. Soc.*– 1972.– **18**.– P. 55–76.
6. *Clements D. L., Love E. R.* Potential problems involving an annulus // *Proc. Camb. Philos. Soc.*– 1974.– **76**.– P. 313–325.
7. *Roger R. R., Hussey R. G.* Stokes drag on a flat annular ring // *Phys. Fluids*.– 1982.– **25**.– P. 915–922.
8. *Davis A. M. J.* Stokes drag on a narrow annular disk sedimenting in the presence of fixed boundaries or other disks // *Phys. Fluids A*.– 1991.– **3**.– P. 249–257.
9. *Davis A. M. J.* Slow viscous flow due to motion of annular disk; pressure-driven extrusion through an annular hole in a wall // *J. Fluid Mech.*– 1991.– **231**.– P. 51–71.
10. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.– М.: Наука, 1970.– 288 с.
11. *Youngren G. K., Acrivos A.* Stokes flow past a particle of arbitrary shape: a numerical method of solution // *J. Fluid Mech.*– 1975.– **69**.– P. 377–403.
12. *Sloan I. H.* Error analysis of boundary integral methods // *Acta Numerica*.– 1991.– **1**.– P. 287–339.
13. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.– М.: Наука, 1982.– 344 с.
14. *Frenkel A.* A Chebyshev expansion of singular integral equations with a logarithmic kernel // *J. Comp. Physics*.– 1983.– **51**.– P. 326–334.
15. *Davis A. M. J.* Periodic blocking in parallel shear or channel flow at low Reynolds number // *Phys. Fluids A*.– 1993.– **5**.– P. 800–809.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т.1: Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 798 с.
17. *Moffatt H. K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.*– 1964.– **18**.– P. 1–18.
18. *Kelly L. G.* Handbook of Numerical Methods and Applications.– New-York: Addison-Wesley Publ. Comp., 1967.– 354 p.