3. Отже, із аналізу формули (26) випливає, що на виважену в рідині ($\eta = 1$) сферичну частинку радіаційна сила не діє. Відстані від плоскої межі рідини, які відповідають значенням $\beta = n\pi$ ($n = 1, 2, \ldots$), є положеннями рівноваги. При цьому $\beta = (2n+1)\pi$ визначають стійкі положення рівноваги, відносно яких сферична частинка може коливатися, а $\beta = 2n\pi$ визначають нестійкі положення рівноваги.

1. *Гузь О. М., Жук О. П., Геращенко Н. В.* Про рух циліндра біля твердої плоскої поверхні в радіаційному полі звукової хвилі // Доп. НАН України. – 1994. – № 11. – С. 61–65.
2. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 520 с.
3. *Жук О. П.* Рух сферичної краплі рідини під дією радіаційної сили акустичного поля // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 55–59.
4. *King L. V.* On the acoustic radiation pressure on spheres // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1934. – **147**, No 861. – P. 246–265.
5. *Гузь А. Н., Головчан В. Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.
6. *Морз Ф.* Колебания и звук. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1949. – 496 с.
7. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 336 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 23.11.2007

УДК 537.226.86

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності

The Hamilton–Ostrogradskii variation principle is formulated, and, on its basis, the definition of initial-boundary dynamic problems of electroelasticity is grounded.

Динамічні початково-крайові задачі в математичній фізиці вивчаються для рівнянь гіперболічного і параболічного типів [2]. В той же час в механіці зустрічаються системи рівнянь негіперболічного типу, для яких необхідно розглядати неусталені динамічні процеси, а отже і формулювати початково-крайові задачі.

У даній роботі математична постановка початково-крайових задач електропружності формулюється на основі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського; поряд із загальноприйнятою системою рівнянь електропружності розглядається її модифікований варіант, запропонований в роботі [3].

Загальноприйнята система рівнянь електропружності складається [1, 4] з механічних рівнянь коливань суцільного середовища

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial x_3} + f_k, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

і квазістатичного наближення рівнянь Максвелла для речовини відносно компонент електричного поля

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}+\frac{\partial D_3}{\partial x_3}=0, \qquad e_{ijk}E_{k,j}=0. \tag{2}$$

Для поляризованої вздовж осі ox_3 п'єзоелектричної кераміки (п'єзокераміки) і п'єзоелектриків гексагональної системи класу 6mm з віссю симетрії шостого порядку ox_3 рівняння (1), (2) замикаються матеріальними залежностями

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}=c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-e_{13}E_3,\\
&\sigma_{22}=c_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-e_{13}E_3,\\
&\sigma_{33}=c_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{31}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-e_{33}E_3,\\
&\sigma_{23}=c_{44}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)-e_{42}E_2, \qquad D_1=\varepsilon_{11}E_1+e_{42}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right),\\
&\sigma_{31}=c_{44}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)-e_{42}E_1, \qquad D_2=\varepsilon_{11}E_2+e_{42}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\\
&\sigma_{12}=c_{66}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \qquad D_3=\varepsilon_{33}E_3+e_{31}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+e_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{3}$$

в яких враховані формули Коші $u_{i,k}+u_{k,i}=2K_{ik}$ для деформацій і $2c_{66}=c_{11}-c_{12}$.

Звичайним чином система (1)–(3) зводиться до чотирьох рівнянь типу Ламе

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=L_k(u_1,u_2,u_3,\varphi), \qquad 0=L_4(u_1,u_2,u_3,\varphi), \qquad k=1,2,3 \tag{4}$$

відносно компонент вектора механічних переміщень $u_k(x_1,x_2,x_3,t)$ і електричного потенціалу $\varphi(x_1,x_2,x_3,t)$, який вводиться градієнтним розв'язком $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ другого рівняння з (2).

В динамічних задачах електропружності система (4) трактується як гіперболоеліптична система, хоча математичний аналіз типу системи (4) відсутній. Такий висновок грунтується на тому, що відповідні (4) системи незв'язаних рівнянь (при $e_{ij}=0$) теорії пружності

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=L_k(u_1,u_2,u_3,0), \qquad k=1,2,3 \tag{5}$$

і електростатики

$$L_4(0,0,0,\varphi)=0 \tag{6}$$

будуть відповідно рівняннями гіперболічного і еліптичного типу [1, 2, 4].

Для правильного формулювання динамічно крайових задач електропружності для системи (1)–(3) будемо виходити з інтегрального варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського. Для цього, перш за все, для системи рівнянь (1), (2) сформулюємо співвідношення, аналогічне теоремі про зміну кінетичної енергії. З цією метою помножимо рівняння (1) на $\dot{u}_k$, перше рівняння (2) на $\dot{\varphi}$ і утворимо інтегральну рівність

$$\int\limits_V ((\rho\ddot{u}_k - \sigma_{ik,i} - f_k)\dot{u}_k - D_{k,k}\dot{\varphi})\,dV = 0. \tag{7}$$

Після стандартних перетворень [4] надамо виразу (7) вигляду

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\dot{u}_k\dot{u}_k\right) + \sigma_{ik}\dot{K}_{ik} - D_k\dot{E}_k - f_k\dot{u}_k\right)dV - \oint\limits_S (\sigma_{ik}n_i\dot{u}_k + D_i n_i\dot{\varphi})\,dS = 0, \tag{8}$$

де $\sigma_{ik}\dot{K}_{ik} - D_i\dot{E}_i = \dot{H}_{\text{ел}}$ — зміна електричної ентальпії [4] (крапка над буквою означає похідну за часом); n_i — напрямні косинуси зовнішньої одиничної нормалі n до поверхні S тіла V.

На поверхні S повинні виконуватися кінематичні (головні) граничні умови

$$u_k(x_S, t) = u_{kS}(x_S, t), \qquad \varphi(x_S, t) = u_S(x_S, t) \tag{9}$$

або динамічні (природні) граничні умови

$$n_i\sigma_{ik}(x_S, t) = p_k(x_S, t), \qquad n_i D_i(x_S, t) = -q_{\text{пов}}(x_S, t). \tag{10}$$

Зважаючи на інтегральну рівність (8) і природні граничні умови, сформулюємо варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського: якщо справедливі залежності (3), тобто існує потенціальна функція деформації, і зовнішні сили і електричний заряд на поверхні тіла не залежить від переміщень $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ і електричного потенціалу $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$, то при ідеальних двосторонніх стаціонарних в'язях функціонал

$$HO = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_V \left(\frac{1}{2}\rho\dot{u}_k\dot{u}_k - H_{\text{ел}} + f_i u_i\right) dV + \oint (p_i u_i - q_{\text{пов}}\varphi) dS\right) dt \tag{11}$$

набуває стаціонарного значення на ізохронних варіаціях δu_k, $\delta\varphi$. Тут p_i — компоненти заданих зовнішніх поверхневих сил на одиницю площі (Н/м^2); $q_{\text{пов}}$ — густина поверхневого заряду, Кл/м^2; f_i — густина заданих об'ємних сил на одиницю об'єму, Н/м^3.

Електричну ентальпію визначимо таким чином:

$$\begin{aligned} H_{\text{ел}} = {} & \frac{1}{2}c_{11}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}c_{11}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + c_{23}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \\ & + \frac{1}{2}c_{33}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{1}{2}c_{44}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{2}c_{44}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{1}{2}c_{66}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 - \\ & - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 + e_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + e_{13}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \\ & + e_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + e_{42}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + e_{42}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}. \end{aligned} \tag{12}$$

У функціоналі (11) допустимими є функції $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\varphi(\mathbf{x}, t)$, які задовольняють кінематичні (головні) граничні умови (9) на поверхні S тіла V і умови

$$u_i(\mathbf{x}, t_1) = u_{i,1}(\mathbf{x}), \qquad u_i(\mathbf{x}, t_2) = u_{i,2}(\mathbf{x}). \tag{13}$$

Виконавши ізохронну варіацію функціоналу (11), користуючись перестановкою операцій $\delta(\cdot)$ і $\partial(\cdot)/\partial x_i$, $\partial(\cdot)/\partial t$ та формулою Остроградського–Гаусса, одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V\left(\left(-\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}+\sigma_{ik,i}+f_k\right)\delta u_k+D_{k,k}\delta\varphi\right)dV\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\oint_S((-\sigma_{ik}n_k+p_i)\delta u_i-(D_i n_i+q_{\text{пов}})\delta\varphi)dS\,dt+\int_V\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}\delta u_k\bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}dV=0. \tag{14}$$

Оскільки варіації δu_k, $\delta\varphi$ незалежні, то з інтегральної рівності (14) одержуємо механічні рівняння коливань (1), перше рівняння (рівняння Гаусса) (2) і природні умови на границі області S

$$\sigma_{ik}n_k=p_i, \tag{15}$$

$$D_i n_i=-q_{\text{пов}}. \tag{16}$$

З останнього інтегралу в (14) випливає:

1) початкові умови в початково-крайових задачах електропружності необхідно формулювати тільки для механічних переміщень

$$u_i(\mathbf{x},t=0)=\overset{0}{\underset{i}{u}}(\mathbf{x}),\qquad \partial_t u_i(\mathbf{x},t=0)=\overset{1}{\underset{i}{u}}(\mathbf{x}); \tag{17}$$

2) початкові значення електричного потенціалу $\varphi(x,t=0)$ апріорі формулювати не потрібно;

3) початкові значення електричного потенціалу $\varphi(x,t=0)$ узгоджуються з початковими значеннями механічних переміщень $u_i(\mathbf{x},t=0)$ шляхом інтегрування рівняння $0=$ $=L_4(u_1,u_2,u_3,\varphi)$ системи (4) при $t=0$.

В роботі [3] запропонована модифікована система рівнянь електропружності

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{1k}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{2k}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{3k}}{\partial x_3}+f_k,\qquad k=1,2,3, \tag{18}$$

$$\mu\varepsilon_{\text{ср}}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\partial D_1}{\partial x_1}-\frac{\partial D_2}{\partial x_2}-\frac{\partial D_3}{\partial x_3}, \tag{19}$$

яку треба доповнити тими ж матеріальними співвідношеннями (3). Особливістю системи (18), (19) є те, що вона є системою гіперболічного типу.

В рівняння (19) входить стала $\varepsilon_{\text{ср}}=(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})/2$. Модифікований варіант може застосовуватися для матеріалів, для яких $\max(1-\varepsilon_{11}/\varepsilon_{\text{ср}},1-\varepsilon_{33}/\varepsilon_{\text{ср}})$ є малою величиною. До таких матеріалів належать ЦТС-19, ZnO, CdS та ін. [5].

На основі рівнянь (18), (19) в об'ємі V з граничною поверхнею S утворимо інтегральну рівність

$$\int_V\left[\left(\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}-\frac{\partial\sigma_{1k}}{\partial x_1}-\frac{\partial\sigma_{2k}}{\partial x_2}-\frac{\partial\sigma_{3k}}{\partial x_3}-f_k\right)\frac{\partial u_k}{\partial t}-\right.$$
$$\left.-\left(\mu\varepsilon_{\text{ср}}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}+\frac{\partial D_3}{\partial x_3}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]dV=0. \tag{20}$$

Як і в попередньому випадку, зведемо вираз (20) до вигляду

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \dot u_k \dot u_k\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu\varepsilon_{\text{ср}}^2 \dot\varphi\dot\varphi\right) + \dot H_{\text{ел}} - f_k \dot u_k \right) dV - \oint\limits_S (\sigma_{ik} n_i \dot u_k + D_i n_i \dot\varphi)\, dS = 0. \quad (21)$$

Тут знову використано позначення $\dot H_{\text{ел}} = \sigma_{ik}\dot\varepsilon_{ik} - D_k \dot E_k$ для приросту електричної ентальпії. За інтегральною рівністю (21) можна сформувати структуру функціоналу варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського:

$$HO = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_V \left(\frac{1}{2}\rho \frac{\partial u_k}{\partial t}\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{1}{2}\mu\varepsilon_{\text{ср}}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \dot H_{\text{ел}} + f_k u_k \right) dV + \right.$$
$$\left. + \oint\limits_S (p_k u_k - q_{\text{пов}}\varphi)\, dS \right) dt. \quad (22)$$

Електрична ентальпія визначається формулою (12).

Виконавши ізохронну варіацію функціоналу (22), після стандартних перетворень одержимо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_V \left(\left(-\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + \sigma_{ik,i} + f_k \right)\delta u_k + \left(\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + D_{k,k} \right)\delta\varphi \right) dV dt +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \oint\limits_S ((-\sigma_{ik} n_k + p_i)\delta u_i - (D_i n_i + q_{\text{пов}})\delta\varphi)\, dS dt +$$
$$+ \int\limits_V \left(\rho \frac{\partial u_k}{\partial t}\delta u_k - \mu\varepsilon_{\text{ср}}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta\varphi \right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} dV = 0. \quad (23)$$

З інтегральної рівності (23) одержуємо механічні рівняння коливань (18), модифіковане рівняння (19) і природні граничні умови (15), (16).

З останнього інтегралу в (23) випливає, що початкові умови необхідно формулювати як для механічних переміщень (умови (17)), так і для електричного потенціалу

$$\varphi(\mathbf{x}, t = 0) = \overset{0}{\varphi}(\mathbf{x}), \qquad \partial_t \varphi(\mathbf{x}, t = 0) = \overset{1}{\varphi}(\mathbf{x}). \quad (24)$$

Насамкінець зауважимо, що енергетична рівність для рівнянь механічних коливань (1) і повної системи рівнянь Максвелла

$$\begin{aligned} &e_{ijk} H_{k,j} = \frac{\partial D_i}{\partial t}, \qquad D_{i,i} = q_{\text{ел}}, \\ &e_{ijk} E_{k,j} = -\frac{\partial B_i}{\partial t}, \qquad B_{i,i} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

для діелектрика формулюється [4] відмінним від (7), (20) шляхом, виходячи з інтегрального співвідношення

$$\int\limits_V ((\rho \ddot u_i - \sigma_{ij,j} - f_i)\dot u_i + E_i(\dot D_i - e_{ijk} H_{k,j}) + H_i(\dot B_i + e_{ijk} E_{k,j}))\, dV = 0. \quad (26)$$

Після стандартних перетворень, користуючись тотожністю $H_i e_{ijk} E_{k,j} - E_i e_{ijk} H_{k,j}$, знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left(\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + \dot{W}_{\text{вн}}\right)dV = \int\limits_V f_i\dot{u}_i dV + \oint\limits_S p_i\dot{u}_i dS - \oint\limits_S n_j h_j dS, \tag{27}$$

де $\dot{W}_{\text{вн}} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_i\dot{D}_i + H_i\dot{B}_i$ — приріст внутрішньої енергії; $h_j = e_{ijk}E_iH_k$ — вектор Умова–Пойтинга.

В квазіелектростатичному наближенні, користуючись рівняннями (25), для вектора Умова–Пойтинга шляхом перетворення

$$h_{j,j} = (e_{jik}E_iH_k)_{,j} = e_{jik}E_kH_{k,j} = -E_j\dot{D}_j = (\varphi\dot{D}_j)_{,j}$$

одержимо $h_j = \varphi\dot{D}_j$. В цьому разі (27) набуде [1, 4] вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left(\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + \dot{W}_{\text{вн}}\right)dV = \int\limits_V f_i\dot{u}_i dV + \oint\limits_S p_i\dot{u}_i dS - \oint\limits_S n_j\varphi\dot{D}_j dS, \tag{28}$$

причому тепер приріст внутрішньої енергії $\dot{W}_{\text{вн}} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_i\dot{D}_i$.

Очевидно, що за енергетичною рівністю (28) важко безпосередньо визначити структуру функціоналу Гамільтона–Остроградського, як це зроблено в даній роботі.

1. *Механика* связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. *Положій Г. М.* Рівняння математичної фізики. – Киев: Рад. шк., 1959. – 478 с.
3. *Шульга М. О.* Про структуру рівнянь електропружності // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 81–85.
4. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезокермических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
5. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2007.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 17.12.2007