УДК 532.59:534.29

О. П. Жук

Дія радіаційних сил звукового поля на сферичну частинку в околі плоскої межі рідини

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

The influence of the radiation force on a spherical particle in the vicinity of the plane boundary of a liquid is investigated. Dependences of the force on the ratio of densities, the distance to the boundary, and the parameters of the acoustic field are established.

Дію радіаційної сили акустичного поля на циліндр, який знаходиться в околі твердої плоскої поверхні, що обмежує ідеальну рідину, досліджено в роботі [1]. Поставлена в [1] задача сформульована в лагранжовій системі координат, і радіаційний тиск визначався як середнє в часі значення акустичного тиску на поверхню циліндра, який коливається в рідині. Як відомо із розв'язку у другому наближенні хвильового рівняння (з урахуванням квадратичних членів) [2], зміна тиску в околі твердої сферичної частинки відрізняється від синусоїдного закону, тому його середнє в часі значення не дорівнює нулю. Отже, на сферичну частинку в акустичному полі буде діяти стала в часі складова гідродинамічної сили. Розв'язування задачі про визначення цієї сили проведемо в три етапи [3]. Оскільки обчислення тиску в рідині з урахуванням величин другого порядку можливе через потенціали поля вектора швидкості, одержані в лінійному наближенні [4], обмежимося на першому етапі розв'язування задачі, при визначенні потенціалів поля швидкості рідини, розв'язками лінійного хвильового рівняння. На другому етапі визначимо результуючу силу дії рідини на сферичну частинку. І на третьому етапі осередненням останньої в часі відфільтруємо її сталу складову.

1. Розв'язування задачі розсіяння акустичної хвилі на сфері і плоскій поверхні. Вважатимемо, що простір вліво від вертикальної плоскої поверхні заповнено ідеальною рідиною, густина якої ρ_0, а швидкість звуку в ній a_0. На відстані l від плоскої поверхні помістимо в рідині сферичну частинку радіусом R і густиною ρ_1. Виберемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$, вісь Oz якої перпендикулярна до плоскої поверхні межі і направлена в протилежний від сферичної частинки бік (рис. 1). Нехай в просторі, заповненому ідеальною стисливою рідиною, поширюється вздовж осі Oz плоска акустична хвиля, яка задана потенціалом

$$\Phi_i = A\exp[i(\varkappa z - \omega t)], \tag{1}$$

де A — амплітуда; $\kappa = \omega/a_0$ — хвильове число; ω — кутова частота.

З математичної точки зору визначення потенціалів поля швидкості в рідині зводиться до розв'язування лінійної задачі розсіяння акустичної хвилі (1) на нерухомій твердій межі рідини і вільній сферичній частинці: знаходження розв'язків лінійного хвильового рівняння

$$\nabla\Phi - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

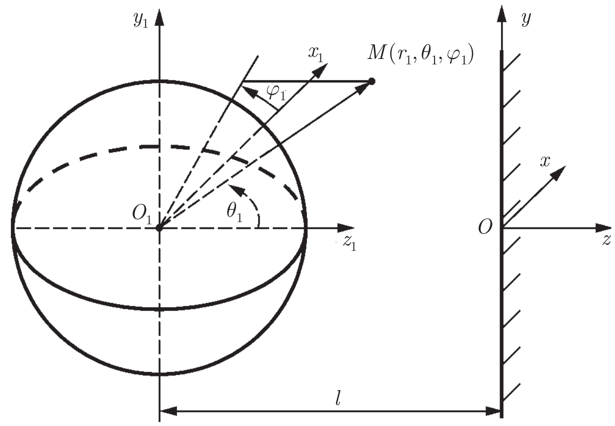

Рис. 1

що описують поле вектора швидкості рідини

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\Phi, \tag{3}$$

який задовольняє граничні умови на поверхні твердої плоскої межі

$$\mathbf{v}(x, y, z = 0) = \mathbf{0}, \tag{4}$$

на поверхні S сферичної частинки

$$\mathbf{v}|_S = \mathbf{V} \tag{5}$$

і умови згасання на нескінченності його складових від розсіяних на сферичній частинці хвиль.

Вектор швидкості $\mathbf{V}$ коливального руху сферичної частинки в рідині при умові її сферичної ізотропії визначається з рівняння

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\iint\limits_S p\mathbf{n}dS, \tag{6}$$

в якому $m = 4/3\pi R^3\rho_1$ — маса сферичної частинки; $\mathbf{n}$ — орт нормалі до її поверхні; p — звуковий тиск в рідині. В лінійному наближенні тиск p обчислюється за формулою

$$p = -\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{7}$$

При падінні акустичної хвилі (1) на тверду межу рідини швидкість $\mathbf{v}$ рідини на її поверхні повинна задовольняти умову (4), що передбачає появу відбитої хвилі, потенціал якої можна записати в такому вигляді:

$$\Phi_s = A\exp[-i(\varkappa z + \omega t)]. \tag{8}$$

Отже, поставлена задача фактично зводиться до задачі визначення потенціалів звукових хвиль, розсіяних в результаті падіння на сферичну частинку хвиль (1) і (8) та перерозсіяних на плоскій межі рідини. Для її розв'язування скористаємося методами, розвинутими в роботі [5] для задач дифракції пружних хвиль в багатозв'язних тілах. Розв'язки рівняння (2) побудуємо методом розділення змінних у сферичній системі координат. Для цього зв'яжемо з сферичною частинкою прямокутну декартову $O_1x_1y_1z_1$ і сферичну $(r_1, \varphi_1, \theta_1)$ системи координат (див. рис. 1).

В системі координат $O_1x_1y_1z_1$ потенціали Φ_i і Φ_s мають, відповідно, такий вигляд:

$$\Phi_i^{(1)} = A\exp(-i\varkappa l)\exp[i(\varkappa z_1 - \omega t)], \tag{9}$$

$$\Phi_s^{(1)} = A\exp(i\varkappa l)\exp[-i(\varkappa z_1 + \omega t)]. \tag{10}$$

Верхній індекс в (9) і (10) свідчить, що дані потенціали віднесено до системи координат, зв'язаної з сферичною частинкою. У сферичній системі координат $(r_1, \varphi_1, \theta_1)$ їх можна записати так:

$$\Phi_i^{(1)} = A\exp(-i\varkappa l)\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n j_n(\varkappa r_1)P_n(\cos\theta_1), \tag{11}$$

$$\Phi_s^{(1)} = A\exp(i\varkappa l)\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-i)^n j_n(\varkappa r_1)P_n(\cos\theta_1), \tag{12}$$

де $j_n(w)$ — сферичні функції Бесселя; $P_n(\cos\theta_1)$ — поліноми Лежандра. Потенціал Φ_d відбитої від сферичної частинки хвилі, який є розв'язком рівняння (2) і описує хвилі, що згасають на нескінченності, запишемо у вигляді узагальненого ряду Фур'є

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} h_n^{(1)}(\varkappa r_1)P_n(\cos\theta_1). \tag{13}$$

В (13) $h_n^{(1)}(\varkappa r_1)$ — сферична функція Ганкеля 1-го роду. У виразах (11)–(13) співмножник $\exp(-i\omega t)$ не наведено.

На поверхні твердої плоскої межі рідини $(z_1 = 0)$ поле швидкості $\mathbf{v}$ розсіяної сферичною частинкою хвилі $\Phi_d^{(1)}$ також повинно задовольняти граничну умову (4). В результаті з'являється перерозсіяна межею хвиля Φ_{ds}. Для її визначення застосуємо метод уявних зображень. Цей метод при дотриманні граничних умов на поверхні плоскої межі дозволяє проводити обчислення в сферичній системі координат.

Вважатимемо, що рідина заповнює весь простір і є друга уявна сферична частинка, симетрична відносно площини $z = 0$ першій. Введемо сферичну систему координат $(r_2, \varphi_2, \theta_2)$, яка зв'язана з уявною частинкою. Тепер достатньо підпорядкувати поле вектора швидкості рідини, утворене розсіяними на сферичних частинках хвилями $\Phi_d^{(1)}$ і $\Phi_d^{(2)}$, граничній умові (4). В результаті потенціал розсіяної на другій частинці хвилі буде потенціалом перерозсіяної плоскою межею хвилі $\Phi_d^{(2)} = \Phi_{ds}^{(2)}$. В системі координат $(r_2, \varphi_2, \theta_2)$ потенціал $\Phi_d^{(2)}$ матиме такий вигляд:

$$\Phi_d^{(2)} = \Phi_{ds}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} h_n^{(1)}(\varkappa r_2)P_n(\cos\theta_2)\exp(-i\omega t). \tag{14}$$

Із граничної умови (4) на плоскій межі рідини запишемо для радіальної компоненти вектора швидкості $\mathbf{v}$ таке співвідношення:

$$v_{r_1}(r_1 = l, \varphi_1 = 0, \theta_1 = 0) + v_{r_2}(r_2 = l, \varphi_2 = 0, \theta_2 = \pi) = 0. \tag{15}$$

Із рівняння (15), враховуючи вирази (3), (13) і (14), одержуємо наступну залежність між коефіцієнтами $A_n^{(1)}$ і $A_n^{(2)}$:

$$A_n^{(2)} = (-1)^{n+1} A_n^{(1)}. \tag{16}$$

Отже, визначення потенціалів $\Phi_d^{(1)}$ і $\Phi_d^{(2)}$ зводиться до обчислення коефіцієнтів $A_n^{(1)}$. Їх знайдемо, використавши граничну умову (5) на поверхні частинки, яку запишемо

$$v_{r_1}(r_1 = R, \varphi_1, \theta_1, t) = V_{z_1} \cos\theta_1, \tag{17}$$

де V_{z_1} — проекція на вісь O_1z_1 вектора $\mathbf{V}$ швидкості руху сферичної частинки. Із рівняння (6), враховуючи (7), одержуємо

$$V_{z_1} = \frac{3}{2}\frac{\eta}{R}\int\limits_0^\pi \Phi \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1, \tag{18}$$

де $\eta = \rho_0/\rho_1$, а потенціал Φ задається сумою потенціалів $\Phi = \Phi_i^{(1)} + \Phi_s^{(1)} + \Phi_d^{(1)} + \Phi_{ds}^{(2)}$, в якій $\Phi_{ds}^{(2)}$ необхідно записати в сферичній системі координат $(r_1, \varphi_1, \theta_1)$.

Використовуючи теореми додавання для сферичних хвильових функцій [5], запишемо (14) у такому вигляді:

$$\Phi_{ds}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(2)} j_n(\varkappa r_1) P_n(\cos\theta_1) \exp(-i\omega t). \tag{19}$$

Тут $S_n^{(2)} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^{(1)} Q_{0n0p}^{(1,2)}(2\varkappa l, \pi)$.

Формули для параметра $Q_{0n0p}^{(1,2)}(2\varkappa l, \pi)$ наведено в роботі [5]. Проінтегрувавши (18), для обчислення швидкості V_{z_1} твердої частинки вздовж осі O_1z_1 одержимо таке співвідношення:

$$V_{z_1} = \frac{\eta}{R}[6A\sin(\varkappa l) j_1(\varkappa R) + A_1^{(1)} h_1^{(1)}(\varkappa R) + S_1^{(2)} j_1(\varkappa R)] \exp(-i\omega t). \tag{20}$$

Тепер, із граничної умови (17), враховуючи (3) і (20), одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів $A_n^{(1)}$ в узагальнених рядах Фур'є для потенціалів $\Phi_d^{(1)}$ і $\Phi_{ds}^{(1)}$

$$a_n A_n^{(1)} + S_n^{(2)} = -(2n+1) A i^n b_n, \tag{21}$$

$$b_n = \begin{cases} 2\cos\beta, & n \ \text{парне}, \\ -2i\sin\beta, & n \ \text{непарне}, \end{cases} \qquad \beta = \varkappa l,$$

$$a_n = \frac{n\alpha h_n^{(1)}(\alpha) - \alpha^2 h_{n+1}^{(1)}(\alpha)}{n\alpha j_n(\alpha) - \alpha^2 j_{n+1}(\alpha)} \qquad (n \neq 1),$$

$$a_1 = \frac{(1-\eta)\alpha h_1^{(1)}(\alpha) - \alpha^2 h_2^{(1)}(\alpha)}{(1-\eta)\alpha j_1(\alpha) - \alpha^2 j_2(\alpha)}, \qquad \alpha = \varkappa R.$$

Надалі обмежимося випадком, коли радіус сферичної частинки R малий порівняно з довжиною акустичної хвилі, яка в свою чергу мала порівняно з відстанню l частинки до межі рідини. Для цього випадку справедливі умови: $\alpha \ll 1$, $\beta \gg 1$. Будемо також вважати, що $\alpha \sim 1/\beta$. Для таких умов при розрахунках можна скористатися асимптотичними представленнями для функцій $j_n(w)$ і $h_n^{(1)}(w)$ та їх похідних при малих і великих значеннях аргумента w [6, 7] і спростити обчислення коефіцієнтів $A_n^{(1)}$.

Із системи рівнянь (21), враховуючи формулу для $S_n^{(2)}$ та прийняті обмеження на величини α і β, одержимо такі формули для обчислення перших трьох коефіцієнтів $A_n^{(1)}$:

$$A_0^{(1)} = -2iA\alpha\cos\frac{\beta}{2},$$
$$A_1^{(1)} = 2iA\frac{1-\eta}{2+\eta}\alpha^3\sin\frac{\beta}{2}, \tag{22}$$
$$A_2^{(1)} = -\frac{4}{27}iA\alpha^5\cos\frac{\beta}{2}.$$

Оскільки вже коефіцієнт $A_2^{(1)}$ відрізняється від коефіцієнта $A_1^{(1)}$ на величину порядка α^2, маючи при цьому порядок α^5, то можна стверджувати, що потенціали $\Phi_d^{(1)}$ і $\Phi_{ds}^{(1)}$ відповідно розсіяної на сферичній частинці і перерозсіяної на плоскій межі хвиль визначаються першими трьома членами в рядах (13) і (19).

2. Визначення радіаційної сили, яка діє на сферичну частинку. Радіаційну силу обчислимо, осередднивши в часі гідродинамічну силу, яка діє в акустичному полі на сферичну частинку з боку рідини. Завдяки осьовій симетрії поля відносно осі O_1z_1 гідродинамічна сила направлена вздовж цієї осі

$$F_{z_1} = -2\pi R\int_0^{\pi} p\sin\theta_1\cos\theta_1 d\theta_1. \tag{23}$$

Тиск p в (23) будемо визначати з точністю до величин другого порядку. Для цього скористаємося співвідношенням [3, 4]

$$p = -\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_0(\operatorname{grad}\Phi)^2 + \frac{\rho_0}{2a_0^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2, \tag{24}$$

в якому потенціал Φ визначено вище. Вкажемо також, що в (24) похідну $\partial\Phi/\partial t$ необхідно обчислювати з урахуванням величин другого порядку за формулою [3, 4]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - V_{z_1}\cos\theta_1\frac{\partial\Phi}{\partial r} + V_{z_1}\frac{\sin\theta_1}{r_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_1}, \tag{25}$$

де $d\Phi/dt$ — повна похідна за часом, яка після осереднення в часі дорівнює нулю. Вкажемо, що у формулах (24) і (25), як випливає з їх структури, необхідно брати дійсні частини швидкості V_{z_1}, потенціалу Φ та його похідних. Осереднюючи за періодом первинної хвилі гідродинамічну силу (23), в результаті одержуємо формулу для обчислення радіаційної сили, що діє на сферичну частинку вздовж осі Oz:

$$\langle F\rangle = -\frac{8}{3}A^2\pi\rho_0\frac{1-\eta}{2+\eta}\alpha^3\sin\beta + O(\alpha^5). \tag{26}$$

3. Отже, із аналізу формули (26) випливає, що на виважену в рідині ($\eta = 1$) сферичну частинку радіаційна сила не діє. Відстані від плоскої межі рідини, які відповідають значенням $\beta = n\pi$ ($n = 1, 2, \ldots$), є положеннями рівноваги. При цьому $\beta = (2n+1)\pi$ визначають стійкі положення рівноваги, відносно яких сферична частинка може коливатися, а $\beta = 2n\pi$ визначають нестійкі положення рівноваги.

1. *Гузь О. М., Жук О. П., Геращенко Н. В.* Про рух циліндра біля твердої плоскої поверхні в радіаційному полі звукової хвилі // Доп. НАН України. – 1994. – № 11. – С. 61–65.
2. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 520 с.
3. *Жук О. П.* Рух сферичної краплі рідини під дією радіаційної сили акустичного поля // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 55–59.
4. *King L. V.* On the acoustic radiation pressure on spheres // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1934. – **147**, No 861. – P. 246–265.
5. *Гузь А. Н., Головчан В. Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.
6. *Морз Ф.* Колебания и звук. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1949. – 496 с.
7. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 336 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 23.11.2007

УДК 537.226.86

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності

The Hamilton–Ostrogradskii variation principle is formulated, and, on its basis, the definition of initial-boundary dynamic problems of electroelasticity is grounded.

Динамічні початково-крайові задачі в математичній фізиці вивчаються для рівнянь гіперболічного і параболічного типів [2]. В той же час в механіці зустрічаються системи рівнянь негіперболічного типу, для яких необхідно розглядати неусталені динамічні процеси, а отже і формулювати початково-крайові задачі.

У даній роботі математична постановка початково-крайових задач електропружності формулюється на основі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського; поряд із загальноприйнятою системою рівнянь електропружності розглядається її модифікований варіант, запропонований в роботі [3].

Загальноприйнята система рівнянь електропружності складається [1, 4] з механічних рівнянь коливань суцільного середовища

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial x_3} + f_k, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$