УДК 539.3

Академік НАН України **Я. М. Григоренко, О. І. Беспалова, Г. П. Урусова**

Ефект обтиску в задачах про коливання попередньо навантажених оболонок

The paper presents a technique for studying the natural frequencies of nonthin inhomogeneous shells of revolution acted by static axisymmetrical loads. The technique is based on a nonclassic shell model that takes all the kinds of transverse deformation (transverse shears and reduction across a wall thickness) into account. The efficiency of allowing for the reduction across the wall thickness is illustrated by the example of a substantially inhomogeneous nonthin cylindrical shell with complicated structure.

Предметом дослідження даної роботи є динамічні характеристики нетонких істотно неоднорідних за товщиною оболонок обертання складної форми меридіану, що знаходяться в полі осесиметричних статичних навантажень загального вигляду. В більшості робіт цього напрямку дослідження проводиться на основі двох оболонкових моделей — класичної Кірхгофа–Лява та уточненої Тимошенка–Рейснера–Міндліна, що для багатьох практично важливих тонкостінних елементів забезпечувало достатню точність розрахунків [1–5]. Для нетонких неоднорідних за товщиною оболонок при попередньому напружено-деформованому стані, що викликаний істотно нерівномірним навантаженням, використання вказаних моделей може давати певну похибку в дослідженні. В зв'язку з цим в роботі для розрахунку динамічних характеристик попередньо навантажених оболонок пропонується підхід на основі некласичної моделі, що враховує як поперечні зсуви, так і обтиск за товщиною. Ця модель для аналізу контактної взаємодії оболонок обертання з плоскою основою та дослідження вільних коливань нетонких шаруватих оболонок з відмінними властивостями матеріалів шарів застосовувалась в [6, 7].

Ефект врахування обтиску в задачах про коливання оболонок в полі статичних навантажень ілюструється на прикладі циліндричної оболонки при досить широких припущеннях відносно її структури та неоднорідності по товщині.

Розглядається клас нетонких неоднорідних оболонок обертання, геометрія яких описується в криволінійній ортогональній системі координат s, θ, γ, де s змінюється по твірній-меридіану; θ — центральний кут в площині поперечного перерізу; γ змінюється по нормалі до деякої відлікової координатної поверхні $\gamma = 0$. За товщиною оболонки можуть мати несиметричну структуру відносно координатної поверхні і формуватися з довільного числа ортотропних шарів змінною за меридіаном товщиною, що працюють без відриву та проковзування. На торцях $s = s_0$ та $s = s_1$ приймаються будь-які фізично несуперечливі умови закріплення та навантаження. Оболонки знаходяться під дією статичних осесиметричних полів різної природи, що мають довільний характер розподілу за меридіаном.

Коливання таких оболонок вважаються малими збуреннями відносно основного стану, що викликаний статичним навантаженням, так що задача в цілому формулюється за геометрично нелінійною теорією в квадратичному наближенні [8]. Матеріал приймається пружним і працює згідно з узагальненим законом Гука. Стаціонарне деформування оболонки розглядається на основі некласичної моделі з урахуванням поперечних зсувів та обтиску при лінійній апроксимації за товщиною всіх компонент вектора переміщень [9].

$$\begin{aligned} u_s(s,\theta,\gamma,t) &= u(s,\theta,t) + \gamma\psi_s(s,\theta,t),\\ u_\theta(s,\theta,\gamma,t) &= v(s,\theta,t) + \gamma\psi_\theta(s,\theta,t),\\ u_\gamma(s,\theta,\gamma,t) &= w(s,\theta,t) + \gamma\psi_\gamma(s,\theta,t), \end{aligned} \tag{1}$$

де u_s, u_θ, u_γ та u, v, w — переміщення довільної точки оболонки та точки координатної поверхні у напрямках s, θ, γ відповідно; ψ_s, ψ_θ — повні кути повороту; ψ_γ — деформація за нормаллю γ; t — змінна часу.

Враховуються інерційні сили, пов'язані з переміщеннями координатної поверхні, поперечними зсувами та обтиском.

В рамках прийнятих вихідних припущень коливання пружних оболонок при наявності статичного навантаження описується двовимірною нелінійною задачею, яку можна подати у вигляді

$$\frac{\partial\overline{N}}{\partial s} = \mathbf{L}\overline{N} + \overline{G} + \overline{q}^0 + \mathbf{C}\frac{\partial^2\overline{N}}{\partial t^2}, \qquad s\in(s_0,s_1), \qquad \theta\in(0,2\pi); \tag{2}$$

$$\mathbf{B}_j\overline{N} = \overline{b_j^0}, \qquad s = s_j \qquad (j=0;1) \tag{3}$$

з умовами періодичності в коловому напрямку — $\overline{N}(s,\theta+2\pi) = \overline{N}(s,\theta)$. Тут $\overline{N} = \{N_s, N_{s\theta}, Q_s, M_s, H, P_s, u, v, w, \psi_s, \psi_\theta, \psi_\gamma\}^T$ — шукана вектор-функція з статичних та кінематичних характеристик напруженого стану; $\mathbf{L}$ — матричний диференціальний оператор другого порядку по змінній θ, що відповідає основним співвідношенням прийнятої моделі [9]; компоненти вектора $\overline{G} = \{g_m\}$ $(m=1,\ldots,12)$ є квадратичними функціями компонент вектора $\overline{N}$; $\mathbf{C}$, $\mathbf{B_j}$ — матриці, що характеризують інерційні властивості оболонки та граничні умови на торцях $s = s_j$ $(j=0;1)$; $\overline{q^0}$ та $\overline{b_j^0}$ — вектори розподілених та контурних навантажень при $s = s_j$ $(j=0;1)$.

Оскільки коливання оболонки вважаються малими відносно основного стану, шуканий вектор $\overline{N}$ допускає фізично обгрунтовану декомпозицію на два вектори — $\overline{N} = \overline{N}^{(1)} + \overline{N}^{(2)}$, де $\overline{N}^{(1)}$ характеризує основний стан при статичних навантаженнях, а $\overline{N}^{(2)}$ — малі коливання відносно цього стану. Відповідно і задача (2)–(3) розпадається на дві зв'язані задачі відносно цих векторів.

Перша задача є одновимірною лінійною або нелінійною задачею статики по визначенню напруженого стану оболонки при осесиметричних навантаженнях

$$\frac{d\overline{N}^{(1)}}{ds} = \mathbf{L^0}\overline{N}^{(1)} + \overline{G}(s,\overline{N}^{(1)},\ldots) + \overline{q}^0, \qquad s\in(s_0,s_1); \tag{4}$$

$$\mathbf{B}_j\overline{N}^{(1)} = \overline{b_j^0}, \qquad s = s_j \qquad (j=0;1) \tag{5}$$

($\mathbf{L^0}$ — матричний диференціальний оператор нульового порядку). Для її розв'язання використовується лінеаризація за Ньютоном–Канторовичем–Рафсоном та метод дискретної ортогоналізації для розв'язання лінійних крайових задач, як це описано в [10] для класичної теорії оболонок.

Друга задача формулюється відносно вектора $\overline{N}^{(2)}$ і пов'язана з визначенням малих незатухаючих коливань попередньо навантаженої оболонки

$$\frac{\partial \overline{N}^{(2)}}{\partial s} = \widetilde{\mathbf{L}}\overline{N}^{(2)} + \mathbf{C}\frac{\partial^2 \overline{N}^{(2)}}{\partial t^2}, \qquad s \in (s_0, s_1), \qquad \theta \in (0, 2\pi); \tag{6}$$

$$\mathbf{B}_j \overline{N}^{(2)} = 0, \qquad s = s_j \qquad (j = 0; 1); \tag{7}$$

$$\overline{N}^{(2)}(s, \theta + 2\pi) = \overline{N}^{(2)}(s, \theta). \tag{8}$$

Тут $\widetilde{\mathbf{L}}$ — матричний диференціальний оператор, що відповідає оператору $\mathbf{L}$ в (2). Він одержаний в результаті лінеаризації функцій $\overline{G}$ відносно $\overline{N}^{(2)}$ та містить компоненти вектора $\overline{N}^{(1)}$ як параметричні члени.

Для знаходження розв'язку цієї задачі розроблено чисельно-аналітичний підхід, що базується на використанні методу відокремлення змінних, методу оберненої ітерації з побудовою відношення Релея та методу дискретної ортогоналізації. Цей підхід в цілому для класичної моделі деформування та уточненої моделі типу Тимошенка був успішно апробований в [3]. Розрахунок власних частот за методом оберненої ітерації [11] для інших класів пружних елементів використовувався в [12].

Запропонований підхід до визначення динамічних характеристик оболонок обертання під дією статичного навантаження з урахуванням поперечних зсувів та обтиску реалізовано в програмному комплексі на ПК.

Ефект врахування обтиску проілюструємо на модельній задачі для тришарової циліндричної оболонки довжиною $2l(s[-l, l])$, радіусом серединної поверхні R і загальною товщиною H. Оболонка має симетричну структуру за товщиною, а шари її є ізотропними з різними фізико-механічними властивостями. Зовнішні шари товщиною h_1 кожний мають модуль пружності $E = E_0$, густину $\rho = \rho_0$ і коефіцієнт Пуассона ν, внутрішній шар товщиною h_2 має $E = E_0/d$, з тим же коефіцієнтом Пуассона. Параметр d або $\eta = lgd$ характеризує неоднорідність циліндра за товщиною ($\eta = 0$ відповідає однорідній ізотропній оболонці з матеріалу зовнішніх шарів). Оболонка знаходиться при нормальному осесиметричному навантаженні інтенсивності q_0, що діє в серединній поверхні на кільцевому поясі довжиною $2l^*$ з центром в перерізі $s = 0$ $(s[-l^*, l^*])$. Торці оболонки вважаються жорстко закріпленими.

Власні частоти цієї оболонки будемо досліджувати при фіксованій локалізації навантаження $\delta = l^*/l$ залежно від ступеня неоднорідності оболонки за товщиною (параметр $\eta \in [0; 3]$) та відносної товщини внутрішнього шару (параметр $\gamma = h_2/H \in [0; 1]$).

Розрахунок частот такого шаруватого циліндра при заданому локалізованому навантаженні проводиться за такими моделям:

1) класична модель Кірхгофа–Лява, де нехтується всіма типами поперечної деформації;
2) уточнена модель Тимошенка, де враховуються поперечні зсуви;
3) некласична модель з урахуванням поперечних зсувів та обтиску за товщиною.

Результати розв'язання задачі за цими моделями позначено відповідно буквами K, T, H. Порівняння розв'язків за цими моделями дає змогу оцінити внесок кожного типу поперечної деформації в уточнення результатів за класичною моделлю. Для порівняння вибрана величина інтенсивності навантаження q^*, при якій значення мінімальної частоти обертається в нуль ($\omega_{min}(q) \sim 0$). Ця величина у відповідності з динамічним критерієм стійкості оболонок зазвичай приймається за значення верхнього критичного навантаження.

Розрахунки наведено для таких вихідних даних: $R = 100l_0$, $2l/R = 2$, $H/R = 1/5$, $\delta = 0{,}1$; де l_0 — характерний лінійний розмір циліндра. Значення відносного критичного навантаження $\overline{q} = q^*(\eta)/q^*{}_K(0)$ дано в табл. 1 залежно від степеня неоднорідності циліндра $\eta = 0; 1; 2; 3$ для двох випадків відносної товщини внутрішнього шару $\gamma = 0{,}1$ та $\gamma = 0{,}9$ ($q^*{}_K(0)$ — значення q^*, що одержано за класичною моделлю для однорідної оболонки з матеріалу зовнішніх шарів).

Для однорідної оболонки ($\eta = 0$) врахування поперечних зсувів та обтиску уточнює значення q^* за класичною моделлю майже на 20%. Неоднорідність оболонки за товщиною ($\eta = 1; 2; 3$) у випадку досить тонкого внутрішнього шару ($\gamma = 0{,}1$) практично не впливає на значення критичного навантаження, що відтворюється всіма моделями з близьким відсотковим уточненням. При значній товщині внутрішнього шару ($\gamma = 0{,}9$) $\eta = 1$ значення q^* за класичною моделлю (К) зменшується майже на 30% при розрахунку за уточненою моделлю (Т) і майже на 50% при врахуванні поперечних зсувів та обтиску (Н). При $\eta = 3$ — більше за 40% за моделлю Тимошенка та майже на 70% — за некласичною.

Відсотковий внесок урахування власне зсувів $\varepsilon_1 = (q^*{}_K - q^*{}_T)/q^*{}_K \cdot 100$ та власне обтиску $\varepsilon_2 = (q^*{}_T - q^*{}_H)/q^*{}_T \cdot 100$ в уточнення результатів класичної теорії ілюструють дані табл. 2 для двох варіантів неоднорідності матеріалу ($\eta = 1; 2$) та різних значень товщини внутрішнього шару.

Коли властивості матеріалів шарів відрізняються на порядок ($\eta = 1$), найбільше уточнення має місце для відносної товщини внутрішнього шару $\gamma = 0{,}75$, як при врахуванні поперечних зсувів ($\varepsilon_1 = 29$)%, так і при врахуванні обтиску ($\varepsilon_2 = 31$)%. При різниці властивостей у два порядки ($\eta = 2$) це спостерігається для $\gamma = 0{,}9$ ($\varepsilon_1 = 37\%$, $\varepsilon_2 = 44$)%. Для

Таблиця 1

$\overline{q} = q^*(\eta)/q^*{}_K(0)$				
Модель	η			
	0	1	2	3
$\gamma = 0{,}1$				
Кірхгофа (К)	1,00	1,00	1,00	1,00
Тимошенка (Т)	0,8348	0,8272	0,8264	0,8264
Некласична (Н)	0,8129	0,7757	0,7717	0,3458
$\gamma = 0{,}9$				
Кірхгофа (К)	1,00	0,3802	0,3458	0,3458
Тимошенка (Т)	0,8348	0,2747	0,2182	0,2127
Некласична (Н)	0,8129	0,1968	0,1221	0,1141

Таблиця 2

ε	γ						
	0	0,1	0,5	0,75	0,9	0,99	1
$\eta=1$							
ε_1, %	16	18	25	29	28	19	16
ε_2, %	3	6	23	31	28	8	3
$\eta = 2$							
ε_1, %	16	18	26	33	37	33	16
ε_2, %	3	7	26	39	44	30	3

цих і близьких до них товщин внутрішнього шару ефект від врахування обтиску перевищує ефект від врахування чисто зсувів.

Таким чином, коректне дослідження коливань істотно неоднорідних за товщиною оболонок, що знаходяться в полі статичних навантажень загального вигляду, потребує врахування як поперечних зсувів, так і обтиску.

1. *Venkateswara Rao G., Sundararamaiah V., Raju I. S.* Finite element analysis of vibrations of initially stressed thin shells of revolution // J. Sound and Vibration. – 1974. – **37**, is. 1. – P. 57–64.
2. *Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1975. – 376 с.
3. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
4. *Sivadas K. R.* Vibration analysis of pre-stressed rotating thick circular conical shell // J. Appl. Mathematics and Mechanics. – 1995. – **186**, is. 1. – P. 99–109.
5. *Hua Li, Lam K. Y.* The generalized differential quadrature method for frequency analysis of a rotating conical shell with initial pressure // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1999. – **48**, is. 12. – P. 1703–1722.
6. *Bespalova E. I., Urusova G. P.* Contact interaction between prestressed laminated shells of revolution and a flat foundation // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No 10. – P. 1137–1145.
7. *Беспалова Е. И., Урусова Г. П.* Определение собственных частот существенно неоднородных оболочек вращения с учетом поперечных деформаций // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 38–47.
8. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.
9. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П.* Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
10. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* О численном решении нелинейных краевых задач статики гибких оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С. 44–47.
11. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. – Москва: Наука, 1968. – 503 с.
12. *Bespalova E. I.* Vibrations of polygonal plates with various boundary conditions // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 5. – P. 526–534.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 26.11.2007