8. *Стоян Ю. Г., Чугай А. М.* Размещение цилиндров и параллелепипедов в призме с учетом заданных кратчайших расстояний // Доп. НАН України. – 2006. – № 3. – С. 29–35.
9. *Стоян Ю. Г., Соколовский В. З.* Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – Киев: Наук. думка, 1980. – 205 с.
10. *Стоян Ю. Г., Пацук В. Н.* Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса // Доп. НАН України. – 2006. – № 3. – С. 74–77.
11. *Злотник М. В., Кривуля А. В., Романова Т. Е.* Аналитическое описание условия покрытия прямоугольной области прямоугольными объектами // Искусств. интеллект. – 2006. – № 4. – С. 175–183.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 12.02.2008

УДК 535.3:537.876.23:631.3

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, О. О. Литвин**

Математичне моделювання внутрішньої структури 3D тіла на основі трьох рентгенівських знімків у трьох взаємоперпендикулярних ракурсах

The explicit description of a class of functions of three variables that are a mathematical model of the inner structure of a 3D body (density, attenuation constant), which can be restored by three X-ray pictures in mutually perpendicular aspects is given.

Дана робота присвячена дослідженню класу функцій, що описують внутрішню структуру 3-вимірного тіла (щільність, коефіцієнт поглинання), які можна точно відновити за допомогою всього трьох рентгенівських знімків у взаємоперпендикулярних ракурсах методом, описаним в [1]. Вказаний метод оснований на використанні операторів мішаної апроксимації функцій [2, 3]. Ця робота є продовженням досліджень роботи [4], у якій для відновлення об'єктів використовувалось всього два рентгенівських знімка. Огляд досліджень з близької за змістом тематики наведено в [5–12].

Основні твердження роботи. Для побудови математичної моделі внутрішньої структури тривимірного тіла будемо використовувати мішану апроксимацію $B_{m,n,p}f(x,y,z)$ сумами Фур'є функцій трьох змінних $f(x,y,z) \in L_2[0,1]^3 \bigcap C[0,1]^3$ за змінними x, y, z, побудовану за допомогою сум Фур'є функцій $f(x,y,z)$ порядків m, n, p за змінними x, y, z, відповідно,

$$F_{m,x}f(x,y,z) = \sum_{k_1=-m}^{m} c1_{k_1}(f;y,z)e^{i2\pi k_1 x}, \qquad c1_{k_1}(f;y,z) = \int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi k_1 x}dx,$$

$$F_{n,y}f(x,y,z) = \sum_{k_2=-n}^{n} c2_{k_2}(f;x,z)e^{i2\pi k_2 y}, \qquad c2_{k_2}(f;x,z) = \int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi k_2 y}dy,$$

$$F_{p,z}f(x,y,z)=\sum_{k_3=-p}^{p}c3_{k_3}(f;x,y)e^{i2\pi k_3 z},\qquad c3_{k_3}(f;x,y)=\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi k_3 z}dz.$$

Ці оператори мають вигляд

$$B_{m,n,p}f(x,y,z)=F_{m,x}f+F_{n,y}f+F_{p,z}f-F_{m,x}F_{n,y}f-F_{m,x}F_{p,z}f-F_{n,y}F_{p,z}f+F_{m,n,p}f,$$

де

$$F_{m,x}F_{n,y}f(x,y,z)=\sum_{k_1=-m}^{m}\sum_{k_2=-n}^{n}c12_{k_1,k_2}(f;z)e^{i2\pi(k_1x+k_2y)};$$

$$c12_{k_1,k_2}(f;z)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi(k_1x+k_2y)}dxdy;$$

$$F_{m,x}F_{p,z}f(x,y,z)=\sum_{k_1=-m}^{m}\sum_{k_3=-p}^{p}c13_{k_1,k_3}(f;y)e^{i2\pi(k_1x+k_3z)};$$

$$c13_{k_1,k_3}(f;y)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi(k_1x+k_3z)}dxdz;$$

$$F_{n,y}F_{p,z}f(x,y,z)=\sum_{k_2=-n}^{n}\sum_{k_3=-p}^{p}c23_{k_2,k_3}(f;x)e^{i2\pi(k_2y+k_3z)};$$

$$c23_{k_2,k_3}(f;x)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi(k_2y+k_3z)}dydz;$$

$$F_{m,n,p}f=F_{m,x}F_{n,y}F_{p,z}f=\sum_{k_1=-m}^{m}\sum_{k_2=-n}^{n}\sum_{k_3=-p}^{p}c_{k_1,k_2,k_3}e^{i2\pi(k_1x+k_2y+k_3z)};$$

$$c_{k_1,k_2,k_3}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi(k_1x+k_2y+k_3z)}dxdydz.$$

Для подальшого потрібна така лема.

Лема 1. *Для функцій* $f(x,y,z)\in L_2[0,1]^3\bigcap C[0,1]^3$ *виконуються рівності* $(-m\leqslant k_1'\leqslant$ $\leqslant m; -n\leqslant k_2'\leqslant n; -p\leqslant k_3'\leqslant p)$

$$c1_{k_1'}(B_{m,n,p}f;y,z)=\int\limits_0^1 B_{m,n,p}fe^{-i2\pi k_1' x}dx=c1_{k_1'}(f;y,z)=\int\limits_0^1 fe^{-i2\pi k_1' x}dx,$$

$$c2_{k_2'}(B_{m,n,p}f;x,z)=\int\limits_0^1 B_{m,n,p}fe^{-i2\pi k_2' y}dy=c2_{k_2'}(f;x,z)=\int\limits_0^1 fe^{-i2\pi k_2' y}dy,$$

$$c3_{k'_3}(B_{m,n,p}f;x,y)=\int\limits_0^1 B_{m,n,p}fe^{-i2\pi k'_3 z}dz=c3_{k'_3}(f;x,y)=\int\limits_0^1 fe^{-i2\pi k'_3 z}dz.$$

Для того щоб ці математичні результати використати при математичному моделюванні внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою трьох рентгенівських знімків у напрямках осей x, y та z, відповідно, зауважимо, що доданок

$$c1_0(f;y,z)=\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi 0x}dx=\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dx$$

у формулі $F_{m,x}f(x,y,z)=\sum\limits_{k_1=-m}^{m}c1_{k_1}(f;y,z)e^{i2\pi k_1 x}$ може розглядатися як функція змінних (y,z), що описує зображення на рентгенівському знімку, яке отримується в результаті просвічування об'єкта (вважаємо, що об'єкт дослідження повністю розміщений у кубі $[0,1]^3$) рентгенівськими променями вздовж осі Ox при умові, що рентгенівський промінь проходить через точку (y,z) площини Oyz.

Аналогічно, доданки

$$c2_0(f;x,z)=\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi 0y}dy=\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dy$$

у формулі

$$F_{n,y}f(x,y,z)=\sum_{k_2=-n}^{n}c2_{k_2}(f;x,z)e^{i2\pi k_2 y}$$

та

$$c3_0(f;x,y)=\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi 0z}dz=\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dz$$

у формулі

$$F_{p,z}f(x,y,z)=\sum_{k_3=-p}^{p}c3_{k_3}(f;x,y)e^{i2\pi k_3 z}$$

можуть розглядатися як функції двох змінних (x,z), (x,y), відповідно, що описують зображення на рентгенівських знімках, отриманих в результаті опромінення (просвічування) об'єкта рентгенівськими променями вздовж осей Oy та Oz, відповідно, при умові, що рентгенівський промінь проходить через точку (x,z) площини Oxz та точку (x,y) площини Oxy, відповідно. Далі врахуємо, що доданок

$$c12_{0,0}(z)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi(0x+0y)}dxdy=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dxdy$$

у сумі

$$F_{m,n}f(x,y,z)=\sum_{k_1=-m}^{m}\sum_{k_2=-n}^{n}c12_{k_1,k_2}(z)e^{i2\pi(k_1x+k_2y)}$$

може бути отриманий за допомогою вказаних двох знімків

$$c1_0(f;y,z)=\int\limits_0^1 f(x,y,z)dx,\qquad c2_0(f;x,z)=\int\limits_0^1 f(x,y,z)dy,$$

тобто

$$c12_{0,0}(z)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 f(x,y,z)dx\right)dy=\int\limits_0^1 c1_0(f;y,z)dy$$

і, іналогічно,

$$c12_{0,0}(z)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 f(x,y,z)dy\right)dx=\int\limits_0^1 c2_0(f;x,z)dx.$$

Це дозволяє написати наступне важливе з практичної точки зору твердження.

Твердження 1. *Якщо $c1_0(f;y,z)$, $c2_0(f;x,z)$, $c3_0(f;x,y)$ — функції, що описують тіньові зображення внутрішньої структури тривимірного тіла при просвічуванні (опроміненні) тіла рентгенівськими променями вздовж осей Ox, Oy та Oz, відповідно, а коефіцієнти $c12_{0,0}(z)$, $c13_{0,0}(y)$, $c23_{0,0}(x)$ отримуються за однією з формул*

$$c12_{0,0}(z)=\int\limits_0^1 c1_0(f;y,z)dy,\qquad c12_{0,0}(z)=\int\limits_0^1 c2_0(f;x,z)dx$$

(аналогічні формули можна написати також для $c13_{0,0}(y)$, $c23_{0,0}(x)$), то функція

$$B_{m,n,p}f(x,y,z)=F_{m,x}f(x,y,z)+F_{n,y}f(x,y,z)+F_{p,z}f(x,y,z)-F_{m,x}F_{n,y}f(x,y,z)-$$
$$-F_{m,x}F_{p,z}f(x,y,z)-F_{n,y}F_{p,z}f(x,y,z)+F_{m,n,p}f(x,y,z),$$

що є математичною моделлю внутрішньої структури тривимірного тіла, буде задовольняти умову

$$c1_0(B_{m,n,p}f;y,z)=c1_0(f;y,z),\qquad c2_0(B_{m,n,p}f;y,z)=c2_0(f;y,z),$$
$$c3_0(B_{m,n,p}f;y,z)=c3_0(f;y,z),$$
$$c_{0,0,0}(B_{m,n,p}f)=c_{0,0,0}(f)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dxdydz$$

незалежно від вибору всіх інших виразів

$$c1_p(y,z),\qquad 1\leqslant|p|\leqslant m\qquad \textit{та}\qquad c2_p(x,z),\qquad 1\leqslant|p|\leqslant n\qquad \textit{і}$$

$$c12_{p,q}(z), \qquad 1 \leqslant |p| + |q| \leqslant 2n,$$

$$c13_{p,q}(y), \qquad 1 \leqslant |p| + |q| \leqslant 2n; \qquad c23_{p,q}(x), \qquad 1 \leqslant |p| + |q| \leqslant 2n.$$

Твердження 1 (при $m = n = p = 0$) лежить в основі патента [1] на спосіб відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою трьох рентгенівських знімків у трьох взаємоперпендикулярних напрямках.

2. Аналіз точності математичної моделі. Вище відзначено, що формулу

$$B_{0,0,0}f(x,y,z) = c1_0(f;y,z) + c2_0(f;x,z) + c3_0(f;x,y) - c1_0(c2_0(f;.,.);z) - \\ - c1_0(c3_0(f;.,.);y) - c2_0(c3_0(f;.,.);x) + c_{0,0,0}$$

можна використовувати як математичну модель внутрішньої структури тривимірного тіла, яка має такі властивості:

$$\int_0^1 B_{0,0,0}f dx = \int_0^1 f dx; \qquad \int_0^1 B_{0,0,0}f dy = \int_0^1 f dy; \qquad \int_0^1 B_{0,0,0}f dz = \int_0^1 f dz.$$

Теорема 1. *Оператор* $B_{0,0,0}f$ *точно відновлює всі функції* f *вигляду*

$$f(x,y,z) = u(y,z) + v(x,z) + w(x,y).$$

Доведення. Запишемо таку низку рівностей:

$$c1_0(f;y,z) = \int_0^1 f dx = \int_0^1 [u(y,z) + v(x,z) + w(x,y)]dx = u + \int_0^1 v dx + \int_0^1 w dx,$$

$$c2_0(f;x,z) = \int_0^1 f dy = \int_0^1 [u(y,z) + v(x,z) + w(x,y)]dy = \int_0^1 u dy + v + \int_0^1 w dy,$$

$$c3_0(f;x,y) = \int_0^1 f dz = \int_0^1 [u(y,z) + v(x,z) + w(x,y)]dz = \int_0^1 u dz + \int_0^1 v dz + w,$$

$$c1_0(c2_0(f;.,.);z) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y,z) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 [u(y,z) + v(x,z) + w(x,y)]dy \right) dx = \\ = \int_0^1 u dy + \int_0^1 v dx + \int_0^1 \int_0^1 w dx dy,$$

$$c1_0(c3_0(f;.,.);y) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z) dx dz = \int_0^1 \int_0^1 [u(x,y) + v(x,z) + w(x,y)]dx dz = \\ = \int_0^1 u dz + \int_0^1 \int_0^1 v dx dz + \int_0^1 w dx,$$

$$c2_0(c3_0(f;.,.);x) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)dydz = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 [u(y,z)+v(x,z)+w(x,y)]dydz =$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 udydz + \int\limits_0^1 vdz + \int\limits_0^1 wdy,$$

$$c_{0,0,0} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 [u(y,z)+v(x,z)+w(x,y)]dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(y,z)dydz + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(x,z)dxdz + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 w(x,y)dxdy.$$

Підставляючи ці формули у вираз для оператора $B_{0,0,0}f(x,y,z)$, одержимо

$$B_{0,0,0}f(x,y,z) = c_{1,0}(f;y,z) + c_{2,0}(f;x,z) + c_{3,0}(f;x,y) -$$

$$- c_{1,0}(c_{2,0}(f;.,.);z) - c_{1,0}(c_{3,0}(f;.,.);y) - c_{2,0}(c_{3,0}(f;.,.);x) + c_{0,0,0} =$$

$$= u + \int\limits_0^1 vdx + \int\limits_0^1 wdx + \int\limits_0^1 udy + v + \int\limits_0^1 wdy + \int\limits_0^1 udz + \int\limits_0^1 vdz + w -$$

$$- \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 udydz + \int\limits_0^1 vdz + \int\limits_0^1 wdy\right) - \left(\int\limits_0^1 udy + \int\limits_0^1 vdx + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 wdxdy\right) -$$

$$- \left(\int\limits_0^1 udz + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 vdxdz + \int\limits_0^1 wdx\right) + \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 udydz + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 vdxdz + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 wdxdy\right) =$$

$$= u(y,z) + v(x,z) + w(x,y) = f(x,y,z).$$

Таким чином, $B_{0,0,0}f(x,y,z) = f(x,y,z)$. Тому

$$\int\limits_0^1 B_{0,0,0}fdx = \int\limits_0^1 fdx; \qquad \int\limits_0^1 B_{0,0,0}fdy = \int\limits_0^1 fdy; \qquad \int\limits_0^1 B_{0,0,0}fdz = \int\limits_0^1 fdz.$$

Теорема 2 доведена.

Отже, в роботі одержано явний вигляд функцій, що описують внутрішню структуру 3D тіла і точно можуть бути відновлені за допомогою трьох рентгенівських знімків у взаємоперпендикулярних напрямках.

1. *Сергієнко І. В., Литвин О. М., Литвин О. О.* Спосіб відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта. Патент на винахід № 78569. – Зареєстр. в Держ. реєстрі патентів України на винаходи 10.04.2007.
2. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 545 с.
3. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 333 с.

4. *Сергієнко І. В., Литвин О. М., Межуев В. І. та ін.* Спосіб відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта. Патент на винахід № 78568. – Зареєстр. в Держ. реєстрі патентів України на винаходи 10.04.2007.
5. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии / Под ред. В. П. Паламодова. – Москва: Мир, 1990. – 279 с.
6. *Троицкий И. Н.* Статистическая теория томографии. – Москва: Радио и связь, 1989. – 240 с.
7. *Левин Г. Г., Вишняков Г. Н.* Оптическая томография. – Москва: Радио и связь, 1989. – 224 с.
8. *Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е.* Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. – Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999. – 172 с.
9. *Терещенко С. А.* Методы вычислительной томографии. – Москва: Физматлит, 2004. – 320 с.
10. *Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.* Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазм. – Новосибирск: Наука, 1987. – 232 с.
11. *Пикалов В. В., Мельникова Т. С.* Томография плазм. – Новосибирск: Наука, 1995. – 230 с.
12. *Филонин О. В.* Малоракурсная томография. – Самара: Самар. научн. центр РАН, 2006. – 253 с.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 22.02.2008