УДК 519.6

О. М. Литвин, С. І. Кулик

Інтерлінація функцій двох змінних з використанням фундаментальних сплайнів

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

The problem of construction of the spline-interlineation operators for functions of two variables is investigated. The problem of construction of the blending approximation operators for functions of two variables with the use of the local spline approximation operators for every variable is also studied. In the construction, the fundamental splines are used.

Постановка проблеми. Оператори інтерлінації функцій багатьох змінних відновлюють функції за допомогою їх слідів на системі ліній. Завдяки високій точності ці оператори зручно використовувати для наближення функцій. Тому актуальною є задача побудови операторів інтерлінації функцій двох змінних зі слідами на нескінченній системі ліній, паралельних осям координат, а також операторів мішаної апроксимації функцій двох змінних з допомогою локальних апроксимаційних сплайнів.

У працях [1–5] досліджувались оператори сплайн-інтерлінації функцій на скінченній системі прямих, паралельних осям координат. Проте не дослідженим залишився випадок нескінченного числа прямих інтерлінації. Аналіз літератури [6–9] показує, що цей випадок може бути досліджений за допомогою фундаментальних сплайнів порядку m (степеня $m-1$), тобто сплайн-функцій

$$L_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{(m)} N_m\left(x + \frac{m}{2} - k\right)$$

з властивостями: $L_m(j) = \delta_{j,0}$, $j \in \mathbb{Z}$. Тут $N_m(x) - B$-сплайни степеня $m-1$. З їх допомогою можна побудувати оператори сплайн-інтерполяції у вигляді

$$J_m f(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) L_m(x-k), \qquad J_m f(j) = f(j), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Треба зазначити, що при $m = 2$ для $L_m(x)$ можна написати явну формулу

$$L_2(x) = N_2(x+1) = \frac{1}{2}(|x+1| - 2|x| + |x-1|).$$

У випадку $m = 3$ скінченну систему базисних квадратичних сплайнів на фіксованому інтервалі було отримано в роботі [5]. У загальному випадку для побудови $L_m(x)$, $m \geqslant 3$, потрібно розв'язувати нескінченну систему рівнянь. Тому деякі дослідники (див., напр., [7, 8]) пропонують проводити наближення функцій $f \in C(R)$ за допомогою квазіінтерполяційних операторів

$$Q_{m,k} f(x) := \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (\Lambda_k f)(\ell) N_m\left(x + \frac{m}{2} - \ell\right),$$

у яких функціонали $\Lambda_k f(\ell)$ залежать тільки від значень $f(j)$ в околі $j=\ell$ і ширина околу не залежить від ℓ. Відзначимо, що $Q_{m,k}f$ — обмежений, лінійний, локальний сплайн-оператор, визначений на $C(R)$. Він зберігає всі многочлени степеня k:

$$Q_{m,k}p(x)=p(x), \qquad p\in\pi_k=\left\{p(x)=\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta x^\beta \mid C_\beta\in\mathbb{R},\ \beta=\overline{0,k}\right\}.$$

Мета даної роботи — формулювання загальних положень сплайн-інтерлінації функцій двох змінних, які інтерлінують функції на нескінченній кількості прямих, паралельних осям координат. При цьому використовуються фундаментальні сплайни довільного степеня $m\geqslant 1$. Крім того, досліджується задача мішаної апроксимації функцій двох змінних з використанням локальних згладжуючих сплайнів m-го порядку ($m-1$-го степеня).

Деякі допоміжні твердження. Введемо основні визначення та позначення, що використовуються в роботі. $Z=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$; $N_m(t)$ — B-сплайни порядку m (степеня $m-1$), які можуть бути побудовані за допомогою рекурентної формули-згортки:

$$N_m(x):=(N_{m-1^*}N_1)(x)=\int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt, \qquad m\geqslant 2;$$

$N_1(x)=1,\ x\in[0,1)$; $N_1(x)=0,\ x\notin[0,1)$. Зокрема, з їх допомогою кубічний фундаментальний сплайн можна записати у вигляді

$$L_4(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^{|k|}N_4(x+2-k).$$

Його коефіцієнти $(-1)^k\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^{|k|}$ мають експоненціальне спадання до 0, при $|k|\to\to\infty$. $W_p^{r,r}[0,1]^2$ — клас функцій, норма мішаної похідної яких задовольняє нерівність $\|f^{(r,r)}\|_{L_p[0,1]^2}\leqslant 1$, $f^{(r,r)}=\partial^{2r}f/(\partial x^r\partial y^r)$ і які є r-кратними невизначеними інтегралами за змінною x і за змінною y.

Основні твердження. *Інтерлінація функцій двох змінних за допомогою фундаментальних сплайнів.* Для функції $f(x,y)\in C(R^2)$ побудуємо оператори

$$J_{1,m}f(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k,y)L_m(x-k),$$

$$J_{2,n}f(x,y)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}f(x,\ell)L_n(y-\ell),$$

$$J_{1,m}J_{2,n}f(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}f(k,\ell)L_m(x-k)L_n(y-\ell).$$

Ці оператори мають властивості

$$J_{1,m}f(p,y)=f(p,y), p\in\mathbb{Z},$$

$$J_{2,n}f(x,q)=f(x,q), q\in\mathbb{Z},$$

$$J_{1,m}J_{2,n}f(p,q)=f(p,q), (p,q]\in\mathbb{Z}^2.$$

Теорема 1. *Оператори*

$$I_{m,n}f(x,y) = (J_{1,m} + J_{2,n} - J_{1,m}J_{2,n})f(x,y)$$

є операторами сплайн-інтерлінації порядку m за змінною x та n за змінною y з такими властивостями:

$$I_{m,n}f(p,y) = f(p,y), \qquad p \in \mathbb{Z},$$

$$I_{m,n}f(x,q) = f(x,q), \qquad q \in \mathbb{Z},$$

$$(I - I_{m,n})f(x,y) = (I - J_{1,m})(I - J_{2,n})f(x,y).$$

Мішана апроксимація локальними сплайн-апроксимаційними операторами. Зазначимо, що використання фундаментального сплайну $L_m(x)$ дає точне розв'язання задачі інтерполяції та інтерлінації. У той же час задачу наближення функції однієї та двох змінних можна розв'язати з достатньо високою точністю також за допомогою операторів апроксимації локальними апроксимаційними операторами.

Хай для функції $f \in C(R^2)$ побудовані лінійні апроксимаційні сплайн-оператори порядків m та n відповідно

$$Q_{1,m,k}f(x,y) := \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} (\Lambda_{1,k}f)(\mu,y)N_m\left(x + \frac{m}{2} - \mu\right),$$

$$Q_{2,n,r}f(x,y) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (\Lambda_{2,r}f)(x,\nu)N_n\left(y + \frac{n}{2} - \nu\right),$$

$$Q_{1,m,k}Q_{2,n,r}f(x,y) := \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (\Lambda_{1,k}\Lambda_{2,r}f)(\mu,\nu)N_m\left(x + \frac{m}{2} - \mu\right)N_n\left(y + \frac{n}{2} - \nu\right).$$

При деякому виборі $\Lambda_{1,k}\Lambda_{2,r}$ ці оператори мають такі властивості:

$$Q_{1,m,k}p_1(x,y) = p_1(x,y), \qquad p_1(x,y) = \sum_{s=0}^{k} a_s(y)x^s, \qquad a_s(y) \in C(R), \qquad s = 0,\ldots,k,$$

$$Q_{2,n,r}p_2(x,y) = p_2(x,y), \qquad p_2(x,y) = \sum_{q=0}^{r} b_q(x)y^q, \qquad b_q(x) \in C(R), \qquad q = 0,\ldots,r,$$

$$Q_{1,m,k}Q_{2,n,r}p_3(x,y) = p_3(x,y) \qquad \forall\, p_3(x,y) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{r} c_{s,q}x^s y^q.$$

Теорема 2. *Якщо $R_{1,m}f(x,y) = (I - Q_{1,m,k})f(x,y)$, $R_{2,m}f(x,y) = (I - Q_{2,n,r})f(x,y)$, то оператори мішаної апроксимації*

$$Q_{m,n,k,r}f(x,y) = (Q_{1,m,k} + Q_{2,n,r} - Q_{1,m,k}Q_{2,n,r})f(x,y)$$

мають властивості

$$Q_{m,n,k,r}f(x,y) = f(x,y) \qquad \forall\, f(x,y) = p_1(x,y) + p_2(x,y) + p_3(x,y),$$

$$(I - Q_{m,n,k,r})f(x,y) = (R_{1,m} \cdot R_{2,m})f(x,y),$$

тобто цей залишок дорівнює операторному добутку залишків одновимірної інтерполяції за змінними x та y відповідно. Відзначимо, що для залишку наближення функції $f(x,y)$ операторами $Q_{1,m,k}Q_{2,n,r}f(x,y)$, які є класичними операторами сплайн-інтерполяції виконується така операторна рівність:

$$(I - Q_{1,m,k}Q_{2,n,r})f(x,y) = (R_{1,m} + R_{2,n} - R_{1,m}R_{2,n})f(x,y).$$

Зауваження 1. У практиці наближення функції з кроком $h = 1$ використовується дуже рідко. Для того щоб використати оператори інтерлінації та мішаної апроксимації з кроками $h = 1/N$, замість наближуваної функції $g(u,v)$ розглядається функція $f(x,y) = g(x/N, y/N)$. У результаті значення функції $f(i,j)$, $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ з кроком 1 будуть дорівнювати значенням функції $g(u,v)$ з кроком $1/N$: $f(i,j) = g(i/N, j/N)$.

Наслідок 1. *Оператори $\Lambda_{1,k}f(\mu,y)$, що забезпечують точність оператора $(Q_{1,3,2})$ на поліномах степеня $k = 2$, мають вигляд*

$$\Lambda_{1,2}f(\mu,y) = -\frac{1}{8}f\left(\frac{\mu-1}{N}, y\right) + \frac{5}{4}f\left(\frac{\mu}{N}, y\right) - \frac{1}{8}f\left(\frac{\mu+1}{N}, y\right).$$

При цьому досягається похибка $\|f - Q_{3,3,2,2}f\|_C \approx (0{,}04/N^3)^2$, а похибка найкращого наближення класичними локальними сплайнами $Q_{1,3,2}Q_{2,3,2}f$ має такий головний член при $n \to \infty$: $\sup\limits_{f \in W_\infty^{3,3}} \|f - Q_{1,2}Q_{2,2}f\|_C \approx 0{,}05/N^3$.

Аналогічно, оператори $\Lambda_{1,3}f(\mu,y)$, що забезпечують точність оператора $(Q_{1,4,3})$ на поліномах степеня $k = 3$, мають вигляд

$$\Lambda_{1,3}f(\mu,y) = -\frac{1}{6}f\left(\frac{\mu-1}{N}, y\right) + \frac{4}{3}f\left(\frac{\mu}{N}, y\right) - \frac{1}{6}f\left(\frac{\mu+1}{N}, y\right).$$

При цьому досягається похибка $\|f - Q_{4,4,3,3}f\|_C \approx (0{,}03/N^4)^2$, а похибка найкращого наближення класичними локальними сплайнами $Q_{1,4,3}Q_{2,4,3}f$ має такий головний член при $N \to \infty$: $\sup\limits_{f \in W_\infty^{3,3}} \|f - Q_{1,4,3}Q_{2,4,3}f\|_C \approx 0{,}013/N^4$.

Таким чином, у даній роботі розглянуто загальний підхід до побудови операторів сплайн-інтерлінації з використанням фундаментальних сплайнів, а також їх апроксимаційних аналогів, які використовують локальні апроксимаційні сплайни, точні на поліномах заданого степеня. Подальші дослідження планується провести з використанням сплайн-вейвлетів при побудові операторів мішаної вейвлет-апроксимації [10, 11], оскільки функції $L_{2m}^{(m)}(x)$ можуть бути використані при побудові сплайн-вейвлетів [8].

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.
3. *Lytvyn O. N.* Interlineation and interflatation function of many variables (blending function interpolation) and economical algorithms in the approximation theory // Computational Methods. Pt. 2 / Eds. G. R. Liu, V. B. C. Tan, X. Han. – Singapore: Springer, 2006. – P. 1105–1110.
4. *Литвин О. Н., Сергиенко И. В.* Методы аппроксимации функций и современные компьютерные технологии (обзор) // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 1. – С. 64–81.
5. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Базисні сплайни другого порядку // Матеріали XXXVIII наук.-практ. конф. науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії. – Харків: УІПА, 2005. – С. 96–97.

6. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. – Москва: Радио и связь, 1985. – 304 с.
7. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.
8. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – Москва: Мир, 2001. – 412 с.
9. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация / Под ред. Г. Ш. Рубинштейна, Н. Н. Яненко. – Москва: Мир, 1975. – 496 с.
10. *Кулик С. I., Литвин О. М.* Узагальнені оператори Хаара, побудовані на основі двовимірної мішаної апроксимації вейвлетами Хаара // Праці Міжнар. конф. Укробраз'2004. – Київ, 2004. – С. 297–300.
11. *Кулик С. I., Литвин О. М.* Використання мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами у стискуванні інформації // Праці Міжнар. конф. Укробраз'2006. – Київ, 2006. – С. 155–158.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків *Надійшло до редакції 07.06.2007*

УДК 519.21

Є. Ф. Царков, І. В. Малик

Асимптотична поведінка розв'язку лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Necessary and sufficient conditions of the mean square exponential stability of a linear stochastic differential-difference equation of neutral type in the scalar case are obtained.

Питанню стійкості за Ляпуновим розв'язків детермінованих диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (ДДФРНТ) присвячено достатньо велику кількість робіт, серед яких особливе місце займають праці наукових шкіл Дж. Хейла [1], Н. Азбелєва [2], М. Каменського [3], Д. Хусаїнова [4], В. Слюсарчука [5]. У роботах В. Колмановського [6], Є. Царкова [7], Д. Хусаїнова [4] та їхніх учнів вивчалися питання поведінки розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь. Питанню існування сильного розв'язку стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу та узагальнення другого методу Ляпунова присвячено роботи Є. Андрєєвої, Л. Шайхета, В. Колмановського [6], В. Берези, В. Ясинського [8] та ін.

Нехай на імовірнісному базисі [9] $(\Omega, F, P, \mathrm{Im})$, де $\mathrm{Im} \equiv \{F_t, t \geqslant 0\}$ — фільтрація, задано сильний розв'язок [6, 10] $x(t) = x(t, \omega) \in R^1$ лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (ЛСДРРНТ)

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}dt + \{Gx_t\}dw(t) \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x_0 = \varphi. \tag{2}$$