

УДК 531.501

КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПОД ПЛЕНКОЙ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА КОНЕЧНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

А. Г. БОЕВ*, Н. Н. ЯСНИЦКАЯ**

* Радиоастрономический институт НАН Украины, Харьков,

** Харьковский Национальный политехнический университет

Получено 20.12.2001

Решена задача о волновом движении тяжелой вязкой однородной несжимаемой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества, толщина которой мала по сравнению с длиной волны. Найдено дисперсионное уравнение для комплексной частоты волн и получено аналитическое решение его в случае более тонкой пленки, толщина которой мала, но сравнима с толщиной вязкого волнового слоя в ней. Показано, что пленка конечной, но малой (в указанном выше смысле) толщины вносит две новые детали в механизм гашения волн пленкой нулевой толщины: а) скольжение границ пленки относительно друг друга и связанное с ним ослабление сопротивления поверхностной силы (этот эффект приводит к заметному уменьшению затухания капиллярных и коротких гравитационных волн); б) гасящее влияние вязкости вещества пленки. Этот эффект приводит к усилению (хотя и небольшому) гашения гравитационных волн. Численный анализ проведен для типичных параметров нефти.

Розв'язана задача про хвильовий рух важкої в'язкої однорідної нестискаємої ріднини нескінченної глибини з вільною поверхнею, що вкрита плівкою поверхнево-активної речовини з товщиною, набагато меншою за довжину поверхневої хвилі. Знайдено дисперсійне рівняння для комплексної частоти хвиль та одержано аналітичне рішення його у випадку більш тонкої плівки, товщина якої зрівняна із товщиною в'язкого хвильового шару в ній. Виявлено, що плівка малої (у вказаному вище розумінні) скінченної товщини додає дві нові деталі до механізму гасіння хвиль плівкою нульової товщини: а) плин меж плівки відносно одна одної, що приводить до помітного зменшення гасіння капілярних та коротких гравітаційних хвиль; б) вплив в'язкості речовини плівки, який приводить до невеликого посилення гасіння гравітаційних хвиль. Кількісний аналіз проведено для типових параметрів нафти.

The problem on rough sea under a surface - active substance film, which thickness much less as compared with a surface wave length was considered. The dispersion equation for a complex frequency of waves was founded and one solved it in case when the film thickness much less compared with one of a wave viscous layer in the film. It was shown, the film with a little limited thickness add two new details to a mechanism of a wave damping of one a naught thickness film. It is a sliding of the film boundaries relatively each other what involved an essential weakening of an extinction of capillary and short gravity surface waves. It is the damping influence of the film substance viscosity, which involved to a not great intensification of the damping of gravity waves. The numerical analysis was conducted for oil typical parameters.

ВВЕДЕНИЕ

Эффект гашения морских волн масляными пленками известен очень давно [1]. За последние несколько десятилетий интерес к этому явлению сильно возрос, так как пленки ПАВ (поверхностно-активного вещества) уверенно наблюдаются при дистанционном зондировании загрязнений морской поверхности радиоволнами различных диапазонов (например, [2–5]). Известно [1], что ПАВ в зависимости от своего химического состава делятся на чистые (однокомпонентные, например, масла) и смеси (многокомпонентные, типичным представителем которых является, к примеру, нефть).

Чистые вещества растекаются по поверхности воды до мономолекулярных слоев, образуя пленки толщиной $h_0 \sim 10^{-6} - 10^{-8}$ см. В такой пленке ПАВ находится полностью в поверхностной фа-

зе. С точки зрения гидродинамики такая пленка обладает нулевой толщиной, так как ее толщина на много порядков меньше любого макроскопического масштаба возможных движений ПАВ. Такая пленка характеризуется поверхностной концентрацией молекул c , определяющей величину коэффициента поверхностного натяжения α и поверхностную силу (называемую также упругой силой) [6, 7], возникающую при наличии неоднородностей концентрации:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \alpha = \chi \vec{\nabla} c, \quad \chi \equiv \frac{d\alpha}{dc}, \quad (1)$$

Величина χ называется поверхностной активностью (или упругостью) пленки. Поверхностная сила, как правило, отсутствует на границе двух жидких сред, где поверхностная концентрация велика [1, 7]. Многокомпонентные ПАВ не растекаются по водной поверхности до мономолекулярных слоев, а способны образовывать стационар-

ные устойчивые пленки с толщинами порядка долей миллиметра [7, 8]. Например, толщина свободной нефтяной пленки обычно оценивается величиной порядка $3 \cdot 10^{-3}$ см. В местах добычи нефти или кораблекрушений толщины нефтяных пленок могут характеризоваться гораздо большими значениями. Пленки таких ПАВ состоят из десятков и сотен тысяч мономолекулярных слоев и являются уже двухфазными: внутри пленки вещество находится в объемной фазе, на границах – в поверхностной. Толщина пленки может считаться гидродинамически конечной, если она сравнима с наименьшим поперечным масштабом внутреннего движения в пленке, определяемого вязкостью. Для волновых движений таким масштабом является толщина вязкого волнового слоя

$$\delta = \sqrt{2\nu_1/\omega},$$

где ω – частота колебаний; ν_1 – коэффициент кинематической вязкости ПАВ.

Механизм гашения поверхностных волн пленками нулевой толщины развит в работах О. Рейнольдса [9] и В. Г. Левича [6]. Затухание волны под такой пленкой определяется не только вязкостью воды, но и дополнительными затратами энергии на преодоление силы (1), сопротивляющейся увеличению площади поверхности пленки, вызываемому волновым движением. Механизм гашения волн пленками конечной гидродинамической толщины еще не исследован. И здесь основной интерес представляет влияние различных типов внутренних движений объемной фазы ПАВ на эффективность действия поверхностной фазы и связанной с ней силы (1).

Ниже решена задача о гашении поверхностных волн пленкой ПАВ, толщина которой сравнима с толщиной вязкого волнового слоя в нем. Найдены зависимости коэффициента затухания волн от их длины, толщины пленки, ее поверхностной активности, вязкости и других параметров. Показано, что проявление внутренних волновых движений в объеме пленки ослабляет влияние поверхностной фазы ПАВ на затухание капиллярных волн по отношению к пленке нулевой толщины из-за относительного скольжения поверхностей воды и пленки. Одновременно с этим гашение волн гравитационного диапазона несколько усиливается, что связано с наличием вязкости в пленке. Все численные расчеты проведены для параметров нефти.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть жидкость плотностью ρ занимает полупространство $z \leq 0$ (море), плоскость $z = 0$ соответствует невозмущенной поверхности моря, координаты x, y описывают положение точки на ней. Часть поверхности моря покрыта пленкой ПАВ равновесной толщины h_0 . Задача состоит в выяснении влияния толщины пленки на затухание поверхностных волн. Рассмотрим движение жидкости и поверхностно-активного вещества в плоской поверхностной волне с волновым вектором \vec{k} . Направим ось x вдоль \vec{k} , ось y – вдоль гребня волны. В этой системе координат свойства движения не зависят от y , отсутствует и компонента скорости движения вдоль гребня волны. Волновое движение малой амплитуды в жидкости будет описываться следующей системой уравнений [6, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \tilde{P} + \nu \Delta \vec{u}, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tilde{P} = P + \rho g z, \quad \vec{u} \{u_x, 0, u_z\}, \quad \nu = \mu / \rho.$$

Здесь P – давление; g – ускорение свободного падения; \vec{u} и μ – соответственно скорость и коэффициент вязкости жидкости. Возмущения ее поверхности ζ вызываются при этом нормальной компонентой скорости

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_z \quad \text{при } z = 0. \quad (3)$$

В глубине жидкости возмущения полей скорости и давления должны исчезать.

Движение вещества в пленке ($0 < z < h$) описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \tilde{P}_1 + \nu_1 \Delta \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

где

$$\tilde{P}_1 = P_1 + \rho_1 g z, \quad \vec{v} \{v_x, 0, v_z\}.$$

В дальнейшем будем считать, что равновесная толщина пленки $h_0 \leq \delta \ll \lambda$. В этом случае изменение полей по толщине пленки происходит гораздо сильнее, чем вдоль поверхности и уравнения движения могут быть упрощены:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial z} &= 0, \quad \tilde{P}_1 = P_1 + \rho_1 g z.\end{aligned}\quad (4)$$

Эти уравнения есть полный аналог уравнений пограничного слоя [11].

На верхней границе пленки $h = h(x, t)$, форма которой также подлежит определению, должны выполняться условия непрерывности нормальной и тангенциальной компонент напряжений с учетом поверхностного натяжения и тангенциальной силы (1), возникающей в пленке при деформации. В обычных предположениях волновой теории [6, 10] эти условия задаются на равновесной поверхности при $z = h_0$. В итоге имеем:

$$\begin{aligned}P_1 + \alpha_1 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2\mu_1 \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \\ \mu_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{d\alpha_1}{dc_1} \frac{\partial c_1}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

К этим условиям следует добавить еще уравнение баланса концентрации поверхностной фазы ПАВ

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c_0 v_x) = 0 \quad \text{при } z = h_0, \quad (6)$$

(здесь c_0 – постоянная невозмущенная концентрация поверхностной фазы пленки) и уравнение для ее возмущенной свободной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v_z \quad \text{при } z = h_0. \quad (7)$$

На нижней равновесной границе пленки $z = 0$ скорости движения ПАВ и воды, а также поверхностные напряжения в них должны быть непрерывны:

$$u_x = v_x, \quad u_z = v_z,$$

$$\begin{aligned}\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) &= \mu_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ P + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} &= P_1 - 2\mu_1 \frac{\partial v_z}{\partial z},\end{aligned}\quad (8)$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения на границе двух жидких сред.

В выражении (8) отсутствует поверхностная сила (1), так как поверхностный слой на границе двух объемных конденсированных фаз находится в состоянии насыщения [7, 8]. На диаграмме состояния (изотерме Ленгмюра) [1] этому состоянию соответствует участок, где $d\alpha/dc = 0$. Применяя к системе (2)-(8) преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по координате x , находим для спектральных амплитуд полей (множитель $\exp(-i\bar{\omega}t + ikx)$ ниже опущен, $\bar{\omega}$ – комплексный спектральный параметр):

в жидкости $-\infty < z < \zeta -$

$$\begin{aligned}u_x &= u_1 e^{kz} + u_2 e^{-mz}, \\ u_z &= -i \left(u_1 e^{kz} - \frac{k}{m} e^{-mz} \right), \\ \frac{P}{\rho} &= -gz + \frac{\bar{\omega}}{k} u_1 e^{kz}, \\ \zeta &= \frac{1}{\bar{\omega}} \left(u_1 - \frac{k}{\bar{\omega}} u_2 \right),\end{aligned}\quad (9)$$

(здесь индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к потенциальной и вихревой волнам соответственно; $m = k(1 - i\bar{\omega}/\nu k^2)^{1/2}$. Значение корня здесь выбирается так, чтобы обеспечить убывание полей вглубь жидкости);

в пленке $\zeta < z < h -$

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} + v_1 e^{nz} + v_2 e^{-nz}, \quad P_1 = P_0 - \rho_1 g z, \\ v_z &= -ik \left[\frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} z + \frac{v_1}{n} e^{nz} - \frac{v_2}{n} e^{-nz} + a \right], \\ h &= \frac{k}{\bar{\omega}} \left[\frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} h_0 + \frac{v_1}{n} e^{nh_0} - \frac{v_2}{n} e^{-nh_0} + a \right],\end{aligned}\quad (10)$$

где $n = (i - 1)/\delta$, $\delta = \sqrt{2\nu_1/\bar{\omega}}$.

Из соотношений (14) видно, что величина δ , имеющая размерность длины, является характерным поперечным масштабом затухания и осцилляций вязкого волнового движения в пленке. Для слабозатухающих волн в пленке он будет мал по сравнению с длиной волны, поскольку

$$k\delta = \sqrt{2\nu_1 k^2/\bar{\omega}} = \sqrt{\gamma_1/\bar{\omega}} \ll 1,$$

где $\gamma_1 = 2\nu_1 k^2$ – коэффициент вязкого затухания волны в ПАВ.

На рис. 1 представлена зависимость толщины δ от длины поверхностной волны, вычисленная для параметров нефти. Видно, что для волн капиллярного диапазона она составляет уже сотые доли сантиметра.

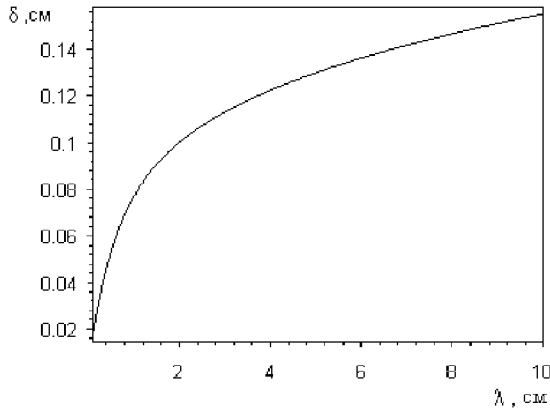


Рис. 1. Зависимость толщины δ волнового вязкого слоя от длины поверхностной волны

В уравнениях (13), (14) восемь величин $-u_1, u_2, v_1, v_2, P_0, a, \zeta$ и h – являются неизвестными и подлежат определению из краевых условий на равновесных границах пленки и двух уравнений для возмущений границ – (3) и (7). В итоге приходим к следующей системе уравнений:

$$0 = \frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} \left(1 + i\frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} \right) - \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}} h_0 + i\frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} (v_1 e^{nh_0} + v_2 e^{-nh_0}),$$

$$h = \frac{k}{\bar{\omega}} \left(\frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} h_0 + \frac{v_1}{n} e^{nh_0} - \frac{v_2}{n} e^{-nh_0} + a \right),$$

$$\frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} + v_1 + v_2 = u_1 + u_2,$$

$$ka + \frac{k}{n} (v_1 - v_2) = u_1 - \frac{k}{m} u_2,$$

$$\zeta = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(u_1 - \frac{k}{m} u_2 \right), \quad (11)$$

$$\nu \left[2ku_1 - u_2 \left(m + \frac{k^2}{m} \right) \right] =$$

$$= \nu_1 \frac{\rho_1}{\rho} \left[\frac{n^2 + k^2}{n} (v_1 - v_2) + ak^2 \right],$$

$$\frac{\bar{\omega}}{k} u_1 - \frac{\omega_0^2}{k} \zeta + \frac{i}{k} \left(\gamma_0 - \frac{\rho_1}{\rho} \gamma_1 \right) (u_1 + u_2) =$$

$$= \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right) \left(\frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} \right),$$

$$v_1 e^{nh_0} \left(\frac{n}{k} + \frac{k}{n} + i\frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) - v_2 e^{-nh_0} \left(\frac{n}{k} + \frac{k}{n} - i\frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) =$$

$$= -\frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} \left(kh_0 + i\frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) - ka.$$

Здесь $\gamma_0 = 2\nu k^2$ – коэффициент затухания поверхностной волны в воде; $\omega_0 =$

$= \sqrt{(1 - \rho_1/\rho) gk + \alpha k^3/\rho}$ и $\omega_1 = \sqrt{gk + \alpha_1 k^3/\rho_1}$ – частоты волн на поверхности раздела ПАВ – вода и на свободной поверхности ПАВ – воздух соответственно.

Влияние растяжения пленки в уравнениях (11) проявляется через параметр $\gamma_s = p\omega_{c1}^2/\bar{\omega}$, где $p = (c_0/\alpha_1)(\partial \alpha_1/\partial c_1)$ – безразмерный коэффициент поверхностной активности пленки (в дальнейшем – активность); $\omega_{c1} = \sqrt{\alpha_1 k^3/\rho_1}$ – частота капиллярных поверхностных волн в ПАВ. Наряду с активностью пленки в уравнения (11) входят средняя толщина пленки h_0 , массовая плотность объемной фазы ПАВ ρ_1 и ее коэффициент кинематической вязкости ν_1 , определяющий коэффициент затухания γ_1 и поперечный масштаб δ изменения поля вязкой волны в пленке. После решения системы (11) Фурье амплитуда $c(\bar{\omega}, k)$ концентрации поверхностной фазы на верхней границе пленки найдется по формуле

$$c(\bar{\omega}, k) = c_0 \frac{k}{\bar{\omega}} \left(\frac{kP_0}{\bar{\omega}\rho_1} + v_1 e^{nh_0} + v_2 e^{-nh_0} \right), \quad (12)$$

следующей из уравнения (6).

Для рассмотрения случая пленки мономолекулярной толщины в уравнениях (11)–(16) необходимо провести предельный переход при $h_0/\delta \rightarrow 0$ и $k\delta \rightarrow 0$ и учесть, что при слиянии двух поверхностей раздела происходит изменение как коэффициента поверхностного натяжения, так и состояния поверхностной фазы. В итоге задача сведется только к определению поля скорости в жидкости:

$$\frac{u_1}{k} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}^2} + \frac{i\gamma_0}{\bar{\omega}} \right) + \frac{u_2}{m} \left(\frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}^2} + i\frac{m}{k} \frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} \right) = 0,$$

$$\frac{u_1}{k} \left[\frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} + i\frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} \right] + \frac{u_2}{m} \left[-\frac{\nu(m^2 + k^2)}{\bar{\omega}} + i\frac{m}{k} \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} \right] = 0. \quad (13)$$

Здесь $\omega_0 = (gk + \alpha k^3/\rho)^{1/2}$ – частота поверхностных волн в жидкости; $\gamma_s = p\alpha k^3/\rho\bar{\omega}$. Спектральные амплитуды возвышения поверхности ζ и концентрации c ПАВ на ней находятся затем по формулам

$$\zeta = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(u_1 - \frac{k}{m} u_2 \right), \quad c = c_0 \frac{k}{\bar{\omega}} (u_1 + u_2).$$

Для остальных величин, входящих в систему (11) и характеризующих движение пленки, получим следующие выражения:

$$\frac{kP_0}{\bar{\omega}} = \frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}} \zeta, \quad ka = \bar{\omega} \zeta,$$

$$h = \zeta, \quad v_x = u_x|_{z=0}, \quad v_z = u_z|_{z=0}.$$

Система уравнений (19) изучалась в работе [6].

2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Система уравнений (11) является слишком громоздкой для непосредственного ее решения без поэтапного контроля физического смысла получаемых результатов и сравнения их с известными результатами для пленки нулевой толщины. Поэтому поступим следующим образом: используя условия равенства нормальных давлений на поверхности раздела и тангенциальных сил на свободной поверхности (два последних уравнения системы (11)) и исключая из них неизвестные величины ka и ζ , выделим в левых частях этих уравнений слагаемые (первые два), характеризующие пленку нулевой толщины. В итоге получим:

$$\begin{aligned} & \frac{u_1}{k} \left(1 - \frac{\omega_+^2}{\bar{\omega}^2} + i \frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} \right) + \frac{u_2}{m} \left(\frac{\omega_+^2}{\bar{\omega}^2} + i \frac{\gamma_0 m}{\bar{\omega} k} \right) + \\ & + \frac{\rho_1 v_1}{\rho k} (e^{nh_0} - 1) \left(-\frac{\omega_1^2 k}{\bar{\omega}^2 n} + i \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} \right) + \\ & + \frac{\rho_1 v_2}{\rho k} (e^{-nh_0} - 1) \left(\frac{\omega_1^2 k}{\bar{\omega}^2 n} + i \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} \right) = \\ & = (kh_0) \frac{\omega_1^2 \rho_1}{\bar{\omega}^2 \rho} \left(\frac{u_1}{k} + \frac{u_2}{k} - \frac{v_1}{k} + \frac{v_2}{k} \right), \\ & \frac{u_1}{k} \left[\frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} + i \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} \right] + \frac{u_2}{m} \left[-\frac{\nu(m^2 + k^2)}{\bar{\omega}} + i \frac{m \gamma_s}{k \bar{\omega}} \right] + \\ & + \frac{v_1}{k} (e^{nh_0} - 1) \left[i \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} + \frac{\rho_1 \gamma_1 k^2 + n^2}{\rho 2\bar{\omega} kn} \right] + \\ & + \frac{v_2}{k} (e^{-nh_0} - 1) \left[i \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} - \frac{\rho_1 \gamma_1 k^2 + n^2}{\rho 2\bar{\omega} kn} \right] = \\ & = -(kh_0) \frac{\gamma_1 \rho_1}{2\bar{\omega} \rho} \left(\frac{u_1}{k} + \frac{u_2}{k} - \frac{v_1}{k} + \frac{v_2}{k} \right), \end{aligned}$$

где $\omega_+ = [gk + (\alpha + \alpha_1) k^3 / \rho]^{1/2}$ – частота поверхностных волн с учетом капиллярных сил на свободной поверхности и поверхности раздела. В правых частях уравнений отдельно выделены слагаемые, пропорциональные относительной толщине пленки $-kh_0$. Для типичной нефтяной пленки толщиной ~ 30 мк и сантиметровой поверхностной волны эти слагаемые имеют относительную величину $\sim 10^{-2}$ в первом и $\sim 10^{-3}$ во втором уравнениях. Далее, используя условия непрерывности

скоростей на поверхности раздела, выразим скорости движения v_1 и v_2 вещества в пленке через скорости движения жидкости u_1 и u_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\Delta_1} \left\{ A - B e^{-nh_0} \left(-\frac{n}{k} + i \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \right\}, \\ v_2 &= \frac{1}{\Delta_1} \left\{ -A + B e^{nh_0} \left(\frac{n}{k} + i \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 \left\{ \frac{n}{k} \operatorname{ch}(nh_0) + i \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \operatorname{sh}(nh_0) \right\}, \\ A &\equiv \left\{ 1 + \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \left(kh_0 + i \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \right\} \left(u_1 - \frac{k}{m} u_2 \right), \\ B &\equiv (u_1 + u_2) - \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \left(u_1 - \frac{k}{m} u_2 \right). \end{aligned}$$

Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный вид уравнений для определения скоростей u_1 и u_2 движения жидкости:

$$\begin{aligned} & \frac{u_1}{k} \left\{ 1 - \frac{\omega_+^2}{\bar{\omega}^2} + i \frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} - a_{11} \right\} + \\ & + \frac{u_2}{m} \left\{ \frac{\omega_+^2}{\bar{\omega}^2} + i \frac{m \gamma_0}{k \bar{\omega}} - a_{12} \right\} = \Pi_1, \\ & \frac{u_1}{k} \left\{ \frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} + i \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} - b_{11} \right\} + \\ & + \frac{u_2}{m} \left\{ -\nu \frac{m^2 + k^2}{\bar{\omega}} + i \frac{m \gamma_s}{k \bar{\omega}} - b_{12} \right\} = \Pi_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{2 \rho_1}{\Delta_1 \rho} \left\{ \left[1 + \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \left(kh_0 + i \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \right] \times \right. \\ & \times \left[\frac{k \omega_1^2}{n \bar{\omega}^2} (1 - \operatorname{ch}(nh_0)) + i \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} \operatorname{sh}(nh_0) \right] + \\ & + \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \right) \left[\left(\frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} - \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \operatorname{sh}(nh_0) - \right. \\ & \left. \left. - i \left(\frac{\gamma_1 n}{\bar{\omega} k} + \frac{2\gamma_s k \omega_1^2}{\gamma_1 n \bar{\omega}^2} \right) (1 - \operatorname{ch}(nh_0)) \right] \right\}, \\ a_{12} &= \frac{2 \rho_1}{\Delta_1 \rho} \left\{ - \left[1 + \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \left(kh_0 + i \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \right] \times \right. \\ & \times \left[\frac{k \omega_1^2}{n \bar{\omega}^2} (1 - \operatorname{ch}(nh_0)) - i \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} \operatorname{sh}(nh_0) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{m}{k} + \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \right) \left[\left(\frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} - \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \text{sh}(nh_0) - \right. \\ \left. - i \left(\frac{\gamma_1 n}{\bar{\omega} k} + \frac{2\gamma_s k}{\gamma_1 n \bar{\omega}^2} \right) (1 - \text{ch}(nh_0)) \right] \Bigg\},$$

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta_1} \left\{ \left[1 + \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \left(kh_0 + i \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \right] \times \right. \\ \times \left[i \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} \text{sh}(nh_0) - i \frac{\gamma_1 \rho_1}{2\bar{\omega} \rho} \left(\frac{k^2 + n^2}{kn} \right) (1 - \text{ch}(nh_0)) \right] + \\ \left. + \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \right) \left[i \frac{\gamma_s k}{\bar{\omega} n} (1 - \text{ch}(nh_0)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\gamma_1 \rho_1 k^2 + n^2}{2\bar{\omega} \rho kn} + \frac{2\gamma_s^2 \rho_1}{\bar{\omega} \gamma_1 \rho} \right) \text{sh}(nh_0) \right] \right\},$$

$$b_{12} = \frac{2}{\Delta_1} \left\{ \left[1 + \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \left(kh_0 + i \frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \right) \right] \times \right. \\ \times \left[-i \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} \text{sh}(nh_0) + i \frac{\gamma_1 \rho_1}{2\bar{\omega} \rho} \left(\frac{k^2 + n^2}{kn} \right) (1 - \text{ch}(nh_0)) \right] + \\ \left. + \left(\frac{m}{k} + \frac{\omega_1^2}{\bar{\omega}^2} \right) \left[i \frac{\gamma_s k}{\bar{\omega} n} \text{sh}(nh_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\gamma_1 \rho_1 k^2 + n^2}{2\bar{\omega} \rho kn} + \frac{2\gamma_s^2 \rho_1}{\bar{\omega} \gamma_1 \rho} \right) (1 - \text{ch}(nh_0)) \right] \right\}.$$

В правых частях уравнений (14) в отличие от уравнений (19) для пленки нулевой толщины появились слагаемые, пропорциональные относительной толщине пленки kh_0 :

$$\Pi_1 = \frac{\omega_1^2 P_0}{\bar{\omega}^2 \bar{\omega} \rho} kh_0, \quad \Pi_2 = -\frac{1}{2} \frac{\gamma_1 P_0}{\bar{\omega} \bar{\omega} \rho} kh_0.$$

Они описывают, соответственно, нормальное и тангенциальное напряжения, возникающие в пленке при движении в ней вещества. Дисперсионное уравнение, определяющее собственные (вообще говоря, комплексные) частоты поверхностных волн, имеет вид:

$$\left[1 - \frac{\omega_+^2}{\bar{\omega}^2} + i \frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} - a_{11} \right] \times \\ \times \left[-\frac{\nu(m^2 + k^2)}{\bar{\omega}} + i \frac{m}{k} \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} - b_{12} \right] - \\ - \left[\frac{\omega_+^2}{\bar{\omega}^2} + i \frac{m}{k} \frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} - a_{12} \right] \left[\frac{\gamma_0}{\bar{\omega}} + i \frac{\gamma_s}{\bar{\omega}} - b_{11} \right] = 0. \quad (15)$$

При $nh_0 \sim h_0/\delta \rightarrow 0$ величины a_{11} , a_{12} , b_{11} , $b_{12} \rightarrow 0$ и уравнение (15) переходит в известное

дисперсионное уравнение поверхностных волн под пленкой нулевой толщины [6]. При уменьшении толщины пленки до толщины мономолекулярного слоя начнется перестройка взаимодействия поверхностных фаз воды, ПАВ и воздуха. Сумма коэффициентов поверхностного натяжения в выражении для частоты ω_+ перейдет в коэффициент поверхностного натяжения водного раствора ПАВ на границе с воздухом $-\alpha_0$. Частота ω_+ перейдет при этом в собственную частоту поверхностных волн под пленкой ПАВ нулевой толщины:

$$\omega_0 = [gk + \alpha_0 k^3/\rho]^{1/2}.$$

Решение уравнения (15) будем искать в виде

$$\bar{\omega} = \omega + i\gamma, \quad |\gamma| \ll \omega, \quad (16)$$

соответствующем слабозатухающим волнам.

После подстановки решения (16) в уравнение (15), отделения его вещественных и мнимых частей и линеаризации по параметрам γ/ω , γ_0/ω и kh_0 , получаем в нулевом приближении следующее выражение для собственной частоты поверхностных волн:

$$\omega = \omega_+ = [gk + (\alpha + \alpha_1) k^3/\rho]^{1/2}.$$

В первом приближении по указанным выше параметрам после достаточно громоздких выкладок приходим к следующему выражению для коэффициента затухания волны:

$$-\frac{\gamma}{\omega_+} = \frac{\gamma_L}{\omega_+} + \frac{kh_0}{2} (S_1 + S_2 - S_3), \quad (17)$$

где

$$\gamma_L = \gamma_0 \times \\ \times \left[\frac{1 - \frac{\gamma_g}{\omega_+} \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} + \frac{\gamma_g^2}{\omega_+^2} \left(\frac{\omega_+}{\gamma_0} \right) + \frac{1}{2} \frac{\gamma_g^2}{\omega_+^2} \left(\frac{\omega_+}{\gamma_0} \right)^{3/2}}{1 - 2 \frac{\gamma_g}{\omega_+} \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} + \frac{\gamma_g^2}{\omega_+^2} \left(\frac{\omega_+}{\gamma_0} \right)} \right]$$

– коэффициент затухания поверхностной волны под пленкой нулевой толщины [5]; $\gamma_g = (\rho_1/\rho_2) \gamma_s$. Выражения S_1 , S_2 и S_3 , входящие в правую часть выражения (30), имеют следующий вид:

$$S_1 = \frac{\gamma_g}{\omega_+} \left(1 - \frac{\gamma_g}{\omega_+} \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \right) \times \\ \times \left\{ \frac{\rho_1}{\rho} \left[\sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_+^2} - 2 \frac{\gamma_s}{\omega_+} \right) - \right. \right.$$

$$- 2 \frac{\omega_1^2}{\omega_+^2} \frac{\gamma_g}{\gamma_{01}} \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega_+}} \right) - \sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega_+}} \} \times$$

$$\times \left(1 - 2 \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \frac{\gamma_g}{\omega_+} + 2 \frac{\omega_+}{\gamma_0} \left(\frac{\gamma_g}{\omega_+} \right)^2 \right)^{-1} - \frac{\rho_1}{\rho} \frac{\gamma_{01}}{\omega_+},$$

$$S_2 = \left(\frac{\gamma_g}{\omega_+} \right)^2 \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \left[1 - \sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega_+}} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\gamma_s}{\omega_+} \frac{\omega_1^2}{\omega_+^2} \sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega_+}} - \frac{\rho_1}{\rho} \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_+^2} - 2 \frac{\gamma_s}{\omega_+} \right) \right] \times$$

$$\times \left(1 - 2 \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \frac{\gamma_g}{\omega_+} + 2 \frac{\omega_+}{\gamma_0} \left(\frac{\gamma_g}{\omega_+} \right)^2 \right)^{-1},$$

$$S_3 = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \left(\frac{\gamma_g}{\omega_+} \right)^2 \left\{ \left(1 - \frac{\gamma_g}{\omega_+} \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \right) \times \right.$$

$$\times \left[-1 + 2 \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \frac{\gamma_g}{\omega_+} + 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega_+}} \right] \} \times$$

$$\times \left\{ \left(1 - 2 \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \frac{\gamma_g}{\omega_+} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{\omega_+}{\gamma_0} \left(\frac{\gamma_g}{\omega_+} \right)^2 \left(1 - \sqrt{\frac{\omega_+}{\gamma_0}} \frac{\gamma_g}{\omega_+} \right)^2 \right\}^{-1}.$$

Полученные формулы и будут использоваться далее при численных расчетах.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Все конкретные расчеты проведем для случая нефтяной пленки. Для коэффициентов поверхностного натяжения выберем следующие значения [8, 12]: на границе раздела воздух–нефть $\alpha_1=60$ дин/см, на границе раздела вода–нефть $\alpha=13$ дин/см. Для коэффициентов кинематической вязкости: воды – $\nu = 10^{-2}$ см²/с, нефти – $\nu_1 = 0,3$ см²/с. Плотность воды будем считать равной $\rho = 1$ г/см³, плотность нефти – $\rho_1 = 0,8$ г/см³. Отметим, что параметры различных сортов нефти, вообще говоря, различны между собой.

На рис. 2 представлены зависимости от длины поверхностной волны коэффициентов затухания волн под пленками толщины $h_0 = 1.34 \cdot 10^{-2}$ см (кривая 1) и нулевой толщины (кривая 2), нормированных на коэффициент вязкого затухания в воде ($\gamma_0 = 2\nu k^2$) и имеющих поверхностную активность $p=0.149$. Они характеризуют долю вязкого

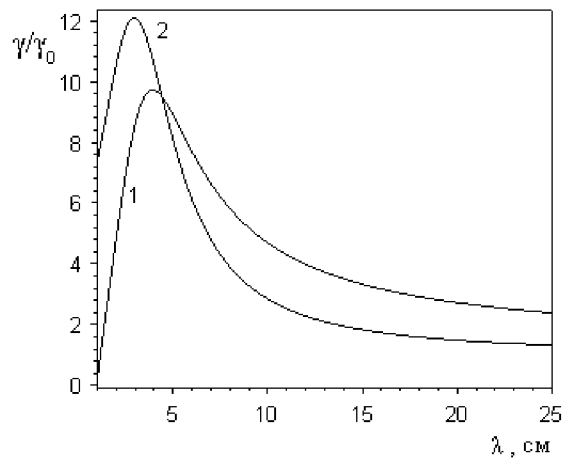


Рис. 2. Зависимости нормированных коэффициентов затухания от длины волны при наличии пленок различной толщины: 1 – $h_0=0.0134$ см, 2 – $h_0 = 0$. Активность пленки $p=0.149$

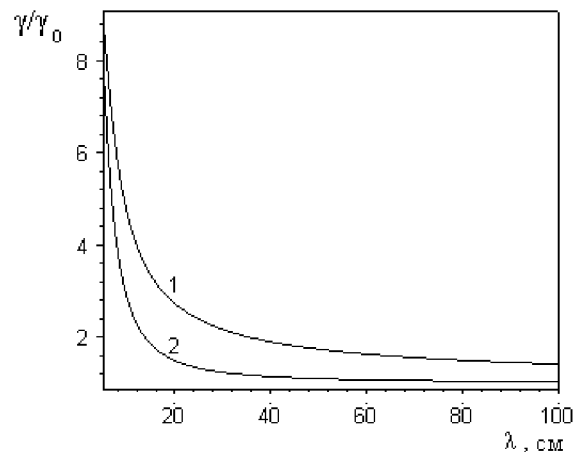


Рис. 3. Зависимости нормированных коэффициентов затухания от длины волны при наличии пленок различной толщины: 1 – $h_0=0.0134$ см, 2 – $h_0 = 0$. Активность пленки $p=0.149$

затухания в полном затухании волны под действием вязкости и пленки. Видно, что коэффициент затухания волн под пленкой конечной толщины, так же, как коэффициент затухания под пленкой нулевой толщины, имеет максимум, связанный с ослаблением упругой силы (1) на длинных волнах и усилением роли вязкости на коротких волнах [6]. Далее, в области капиллярных и коротких гравитационных волн ($\lambda < 5$ см) эффект гашения волн пленкой конечной толщины уменьшен. Это связано с проскальзыванием верхней границы пленки, на которой сосредоточена поверхностная сила, относительно поверхности воды. В результате этого скорость верхней границы уменьшается

по сравнению со скоростью поверхности воды, что приводит к уменьшению противодействия поверхностной силы. С уменьшением длины волны этот эффект усиливается, так как уменьшается толщина вязкого волнового слоя в пленке (см. рис. 1). Например, на длине волны $\lambda = 1$ см эффект проскальзывания уменьшает коэффициент затухания более, чем в 10 раз. Наоборот, в области гравитационных волн ($\lambda > 5$ см), где проскальзывания уже нет, эффект гашения волн пленкой конечной толщины увеличен. Это связано с наличием вязкости в пленке, проявляющейся при продольном волновом движении. Для данной толщины и параметров пленки эффекты проскальзывания и вязкости компенсируются при длине волны $\lambda \sim 5$ см и коэффициенты затухания волн под пленками нулевой и конечной толщины совпадают. С увеличением

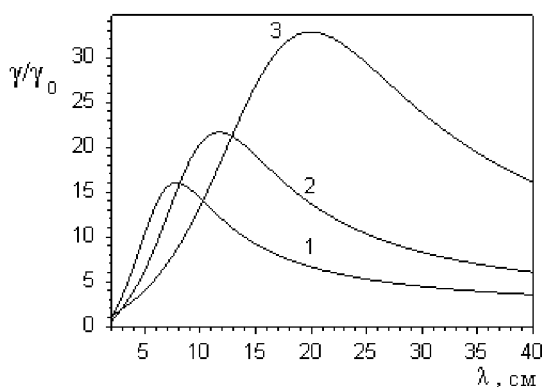


Рис. 4. Зависимости нормированных коэффициентов затухания от длины волны при различных значениях активности пленки: 1 – $p=0.3$, 2 – $p=0.5$, 3 – $p=1$. Толщина пленки $h_0=0.134$ см

активности пленки точка совпадения коэффициентов затухания сдвигается в сторону больших длин волн. Влияние вязкости вещества пленки уменьшается с увеличением длины поверхностной волны, хотя остается заметным и даже на метровых волнах (рис. 3). На рис. 4 представлены зависимости нормированных коэффициентов затухания волн под пленкой толщины $h_0 = 1.34 \cdot 10^{-2}$ см от длины волны при различных значениях активности p . Поведение их с изменением активности качественно аналогично поведению коэффициентов затухания под пленкой нулевой толщины. С ростом p усиливается гашение более длинных волн, что связано с увеличением поверхностной силы. В диапазоне капиллярных и коротких гравитационных волн наоборот наблюдается уменьшение нор-

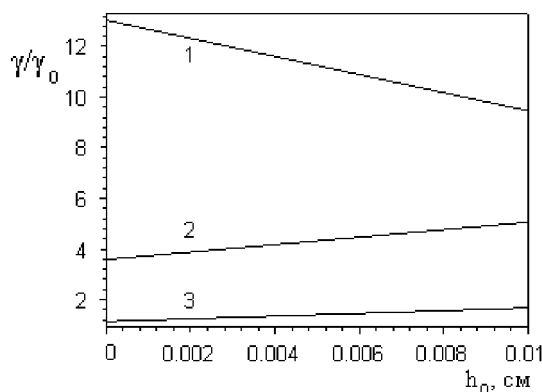


Рис. 5. Зависимости от толщины пленки нормированных коэффициентов затухания волн различной длины: 1 – 3.2 см, 2 – 10 см, 3 – 50 см. Коэффициент поверхностного натяжения на границе ПАВ–воздух $c_1 = 68$ дин/см, активность пленки $p=0.149$

мированных коэффициентов затухания с ростом p . Это объясняется усилением роли вязкой диссипации в жидкости из-за увеличения “жесткости” пленки. На рис. 5 приведены зависимости нормированных коэффициентов затухания волн различной длины от толщины пленки. Эти зависимости линейны, но имеют разные наклоны. Кривая 1, соответствующая поверхностной волне длиной 3.2 см, имеет достаточно большой отрицательный наклон, что говорит об усилении затухания этой волны с увеличением толщины пленки. Причина этого – усиление эффекта проскальзывания границ пленки относительно друг друга, связанное с увеличением отношения h_0/δ . Поведение кривых 2 и 3, соответствующих более длинным волнам (10 и 50 см соответственно), характеризует влияние вязкости в пленке на ее продольное волновое движение различного масштаба.

Проследим теперь за изменениями этих зависимостей при изменении других параметров пленки. На рис. 6 представлены зависимости нормированных коэффициентов затухания от толщины пленки при изменении значения коэффициента поверхностного натяжения α_1 на верхней границе пленки (воздух–ПАВ) с 68 дин/см на 50 дин/см. Как и следовало ожидать, влияние поверхностного натяжения проявляется сильнее на волнах капиллярного диапазона, поскольку поверхностное натяжение определяет частоту этих волн. Вместе с тем видно, что более толстая пленка менее чувствительна к изменению этого параметра. Это связано с тем, что проявление структуры поперечного

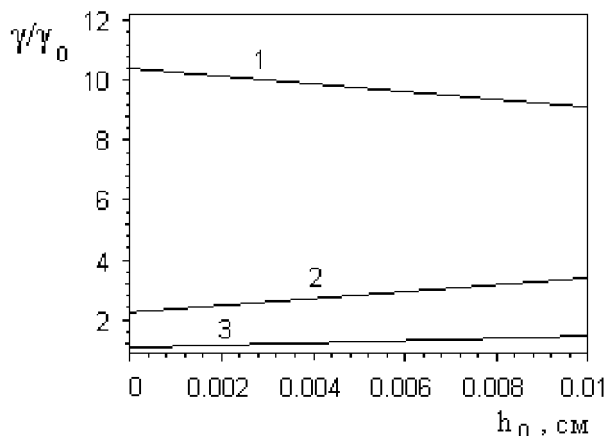


Рис. 6. Зависимости от толщины пленки нормированных коэффициентов затухания волн различной длины: 1 – 3.2 см, 2 – 10 см, 3 – 50 см. Коэффициент поверхностного натяжения на границе ПАВ–воздух $c_1 = 50$ дин/см, активность пленки $p = 0.149$

движения в пленке влечет за собой разделение поверхностных волн на обеих границах пленки. В случае пленки нулевой толщины эти волны слиты в одну и влияние изменения α_1 здесь наиболее существенно. Эффект разделения одной поверхностной волны на две с увеличением толщины пленки проявляется и при изменении вязкости ПАВ, однако при этом более существенные изменения коэффициентов затухания наблюдаются при наличии более толстых пленок. Наибольшее влияние изменения плотности ПАВ естественно ожидать в гравитационном диапазоне длин волн, однако, как видно из рис. 2 и 3, в этом диапазоне влияние пленки невелико.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о волновом движении тяжелой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества, толщина которой мала по сравнению с длиной волны. Найдено дисперсионное уравнение для комплексной частоты волн и получено аналитическое решение его в случае более тонкой пленки, толщина которой

мала, но сравнима с толщиной вязкого волнового слоя в ней. Показано, что пленка конечной, но малой (в указанном выше смысле) толщины вносит две новых детали в механизм гашения волн пленкой нулевой толщины:

а) скольжение границ пленки относительно друг друга и связанное с ним ослабление сопротивления поверхностной силы. Этот эффект приводит к заметному уменьшению затухания капиллярных и коротких гравитационных волн;

б) гасящее влияние вязкости вещества пленки. Этот эффект приводит к усилению (хотя и небольшому) гашения гравитационных волн.

Численный анализ проведен для типичных параметров нефти.

1. Фридрихсберг Д.А. Курс коллоидной химии.– Л.: Химия, 1984.– 368 с.
2. Kalmykov A.I., Pichugin A.P., Sinitsyn Yu.A., Shestopalov V.P. Some features of radar monitoring of the oceanic surface from aerospace platforms // Int. Journal of Remote Sensing.– 1982.– V. 3, N 3.– P. 311-325.
3. Johnson J.W., Groswell W.F. Characteristics of 13.9 GHz radar scattering from oil films on the sea surface // Radio Science.– 1982.– V. 17, N 3.– P. 611-617.
4. Боев А.Г., Карвицкий Г.Э. К теории радиолокационного контраста морского волнения при наличии пленки поверхностно-активного вещества // Радиофизика и радиоастрономия.– 1997.– Т. 2, N 3.– С. 281-291.
5. Boyev A.G, Karvitsky G.E., Matveyev A.Ya., Tsymbal V.N. Evaluation of Oil Film Parameters on the Sea Surface Using Multifrequency Radar Data // Telecommunication and Radio Engineering.– 1997.– V. 51, N 8.– P. 4-12.
6. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика.– М.: ГИТТЛ, 1959.– 669 с.
7. Адам Н.К. Физика и химия поверхностей.– М.: Гостехиздат, 1947.– 552 с.
8. Добрянский А.Ф. Химия нефти.– М.: Гостехиздат, 1961.– 211 с.
9. Ламб Г. Гидродинамика.– М.-Л.: ГИТТЛ, 1953.– 928 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред.– М.: ГИТТЛ, 1953.– 788 с.
11. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой.– М.: Физматгиз, 1962.– 480 с.
12. Субботина Е.П. Сборник физических констант и параметров.– Л.: Изд. ЛГУ, 1967.– 148 с.