Доповіді НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

4 • 2012

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

© 2012

Член-корреспондент НАН Украины **М. Ф. Бондаренко,**
В. П. Машталир, В. В. Шляхов

Мультигруппы, индуцируемые произвольным отношением

В рамках грануляционного исчисления на базе мультиалгебраических систем найдены необходимые и достаточные условия, при которых произвольное n-арное отношение, заданное на декартовом произведении множеств произвольной природы, индуцирует на классах эквивалентностей мультиоперацию, удовлетворяющую групповой аксиоматике и фактически продуцирующую группу на классах эквивалентностей. Полученные результаты направлены на изучение свойств обратимости в информационно-аналитических системах.

Управление степенью обобщения или конкретизации информации — основная парадигма грануляционного исчисления [1, 2]. Гранулы — группировки данных, получаемые с точки зрения их неразличимости или сходства, огрубляют или, напротив, детализируют с желаемой точностью представление разнородных (количественных, качественных, недостаточно определенных, избыточных и т. п.) данных. Для выявления внутренних неочевидных сущностных связей в информационно-аналитических системах представляют интерес случаи, когда удается найти адекватную связь с некоторой хорошо изученной математической структурой. В этом плане одним из приемлемых инструментов являются мультиалгебраические системы [3–5], позволяющие синтезировать и идентифицировать алгебры, модели и алгебраические системы с носителями, объединяющими семейства множеств различной природы, а в конечном итоге — оперировать гранулами (классами эквивалентности или толерантностей), не различая отдельных представителей. Поиск мультигрупп (групп, определенных на произвольных фактор-множествах) — задача, решение которой создаст предпосылки для учета обратимых свойств, возникающих при факторизации данных в информационных системах.

Постановка задачи. Пусть имеется произвольное n-арное отношение T, заданное на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Отношение T индуцирует на каждом A_i разбиение и некоторое отношение E на классах эквивалентностей. Каким условиям должно удовлетворять T, чтобы E как мультотношение задавало групповую операцию и группу на классах?

Условия существования мультигрупп. Остановимся сначала на некоторых свойствах дифункциональных отношений, т. е. соответствий T таких, что $T = TT^{-1}T$. Из известной теоремы Риге [6] следует, что произвольное отношение дифункциональности T, заданное на декартовом произведении произвольных множеств $A \times B$, индуцирует взаимно однозначное отображение A/T на B/T^{-1}, где A/T, B/T^{-1} — левые и правые классы смежности (классы эквивалентностей) соответственно. Если ввести понятие порядка $\pi(T)$ дифункционального отношения T как мощность множества правых или левых смежных классов, то в конечном случае ($|A/T| < \infty$) $\pi(T)$ будет просто целым числом, в противном случае $\pi(T)$ — кардинальное число, указывающее на мощность множеств A/T и B/T^{-1} счетную или более.

В рамках терминологии мультиалгебраических систем [3, 4] дифункциональное отношение индуцирует на смежных классах мультимодель в виде эквивалентности равенства. При этом с точностью до природы множеств для двух дифункциональных отношений T'и T'' индуцируемые ими мультимодели будут совпадать тогда и только тогда, когда $\pi(T') = \pi(T'')$. Равенство выполняется в конечном и счетном случаях, в более чем счетном случае оно может нарушаться, но с практической точки зрения этот вариант малоинтересен.

Определение 1. Два дифункциональных отношения T' и T'' изоморфны $T' \sim T''$, если они порождают одну и ту же мультимодель.

Иначе говоря, критерием изоморфизма является равенство порядков двух дифункциональных отношений, т. е. $\pi(T') = \pi(T'')$.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Два дифункциональных отношения T' и T'', заданные на $A \times B$, изоморфны тогда и только тогда, когда $\forall\, x'$, $x'' \in A$ и $\forall\, y \in B$ справедливо*

$$T'(x', y) = T'(x'', y) \Leftrightarrow T''(x', y) = T''(x'', y).$$

Отметим, что данный факт позволяет непосредственно установить изоморфизм двух дифункциональных отношений.

Перейдем теперь к тернарным отношениям как основе групповых операций.

Определение 2. Тернарное отношение $F(x, y, z)$, заданное на $A \times B \times C$, является усеченно-дифункциональным по аргументу x, если $\forall\, x \in A$ отношение $F(x, y, z)$ как бинарное отношение на $B \times C$ является дифункциональным.

Определение 3. Тернарное отношение $F(x, y, z)$, заданное на $A \times B \times C$, является вполне-дифункциональным, если оно является усеченно-дифункциональным по каждому из своих аргументов.

Итак, любое тернарное отношение порождает множество бинарных сечений и справедлива

Лемма 2. *Тернарное отношение $F(x, y, z)$, заданное на $A \times B \times C$, имеет все изоморфные сечения тогда и только тогда, когда оно является вполне-дифункциональным, и $\forall\, x', x'' \in$ $\in A$, $\forall\, y', y'' \in B$, $\forall\, z \in C$ выполняются условия*

$$\begin{cases} F(x', y', z) = F(x', y'', z) \Leftrightarrow F(x'', y', z) = F(x'', y'', z); \\ F(x', y', z) = F(x'', y', z) \Leftrightarrow F(x', y'', z) = F(x'', y'', z). \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что из леммы 2 вытекают условия, при которых произвольное тернарное отношение продуцирует на классах эквивалентностей тернарное мультиотношение, заданное на декартовом кубе некоторого множества, что является принципиальным при формировании мультигрупп.

Перейдем к n-арным отношениям, заданным на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times \times \cdots \times A_n$. Любое разбиение множества аргументов произвольного n-арного отношения S на m частей $(m < n)$ индуцирует некоторое m-арное отношение, которое будем называть фактор-отношением m-го порядка и обозначать $\Phi(p_m)/S$, где p_m — некоторое разбиение на m частей кортежа аргументов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Имеет место

Лемма 3. *Произвольное n-арное отношение S, заданное на $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, индуцирует тернарное мультиотношение с единым носителем тогда и только тогда, когда существует разбиение p_3 кортежа аргументов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такое, что соответствующее ему фактор-отношение третьего порядка $\Phi(p_m)/S$ (как тернарное отношение) удовлетворяет условиям леммы 2.*

Данный факт обобщает условия, при которых существуют тернарные мультиотношения с единым носителем. Далее, поскольку любая операция — суть тернарное отношение, аксиоматика группы представлена в нотации тернарных отношений.

Лемма 4. *Произвольное тернарное отношение $F(a, b, c)$, заданное на кубе G^3 некоторого непустого множества G, индуцирует групповую операцию, относительно которой G становится группой, в том и только том случае, если оно обладает свойствами:*

1) $\forall\, a, b \in G \Rightarrow \exists!\, c \in G\colon F(a, b, c) = 1$*;*

2) $\forall\, a, b, c, d_1, d_2, d_3, d_4 \in G\colon F(a, b, d_1) = F(d_1, c, d_2) = F(b, c, d_3) = F(a, d_3, d_4) = 1 \Rightarrow \Rightarrow F(a, d_3, d_4) = 1$*;*

3) $\forall\, a \in G \Rightarrow \exists\, e \in G\colon F(e, a, a) = 1$ *(e не зависит от a);*

4) $\forall\, a \in G \Rightarrow \exists\, a^{-1} \in G\colon F(a^{-1}, a, e) = 1$.

Замечание. Индуцируемая отношением $F(a, b, c)$ группа является абелевой, если $\forall\, a, b \in G\colon F(a, b, c) = 1 \Rightarrow F(b, a, c) = 1$.

Итак, если имеется произвольное n-арное отношение S,заданное на $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, то в случае удовлетворения условиям леммы 3 оно индуцирует тернарное мультиотношение $\Phi(p_3)/S$, заданное на G^3, где G — множество классов эквивалентностей, и если это тернарное мультиотношение удовлетворяет условиям леммы 4, то формируется мультигруппа, порождаемая исходным отношением S. Окончательно полученный результат может быть сформулирован в следующем виде.

Теорема. *Произвольное n-арное отношение S индуцирует мультигруппу тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям леммы 3, а продуцируемое отношение $\Phi(p_3)/S$ — условиям леммы 4.*

Результаты и перспективы исследований. Найдены необходимые и достаточные условия индуцирования произвольным n-арным отношением мультигрупп, что обеспечивает возможность оперирования классами эквивалентностей, а не отдельными элементами исходных данных. Полученные условия могут быть конкретизированы путем непосредственной формулировки свойств анализируемого отношения (пример — лемма 2). Однако это требует подробного описания процедур факторизации, что выходит за рамки данного сообщения. Важно отметить, что полученный результат должен получить развитие в плане изучения семейств продуцируемых групп или выбора одной или нескольких мультигрупп. Задача вытекает из того, что может наличествовать несколько представляющих интерес фактор-отношений $\Phi(p_3)/S$ в силу существования достаточно большого количества разбиений p_3. Рациональный выбор семейства мультигрупп позволит получать адекватные модели, используемые в информационно-аналитических системах.

1. *Zadeh L. A.* Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic // Fuzzy Sets Systems. – 1997. – **19**. – P. 111–127.
2. *Yao Y. Y.* Granular computing: past, present, and future // Rough Sets and Knowledge Technology / G. Wang et al. (eds.). – Lecture Notes in Artificial Intelligence. – Berlin: Spinger. – 2008. – **5009**. – P. 27–28.
3. *Kagramanyan A., Mashtalir V., Shlyakhov V.* Multialgebraic systems in information granulation // Internat. J. Information Theories and Applications. – 2008. – **15**, No 1. – P. 55–63.
4. *Машталир В. П., Шляхов В. В.* Свойства мультиалгебраических систем в задачах компаративного распознавания // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 6. – С. 790–804.
5. *Машталир В. П., Шляхов В. В.* Индуцированная согласованность отношений в задачах грануляции информации // Бионика интеллекта. – 2006. – № 1(64). – С. 19–26.
6. *Риге Дж.* Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа: Пер. с англ. // Кибернетический сборник. – 1963. – Вып. 2. – С. 129–185.

Харьковский университет радиоэлектроники

Поступило в редакцию 30.09.2011

Член-кореспондент НАН України **М. Ф. Бондаренко, В. П. Машталір, В. В. Шляхов**

Мультигрупи, що індукуються довільним відношенням

В рамках грануляційного числення на базі мультиалгебраїчних систем знайдені необхідні та достатні умови, при яких довільне n-арне відношення, задане на декартовому добутку множин довільної природи, індукує на класах еквівалентностей мультиоперацію, що задовольняє групову аксіоматику і фактично продукує групу на классах еквівалентностей. Отримані результати направлені на вивчення властивостей оборотності в інформаційно-аналітичних системах.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. F. Bondarenko, V. P. Mashtalir, V. V. Shlyakhov**

Multigroups induced by an arbitrary relation

On the basis of multialgebraic systems in the frame of the granular computing, we have found the necessary and sufficient conditions, under which any n-arity relation given on a Cartesian product of sets of any nature induces a multioperation on the equivalence classes, which satisfies the group axiomatics and actually produces a group on quotient sets. The results obtained are devoted to the study of reversible properties of information-analytical systems.