КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2002. Том 4 (76), N 3. С. 71 – 74

УДК 532.526

СИММЕТРИИ И АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

А. А. АВРАМЕНКО, Б. И. БАСОК

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев

Получено 15.12.2001 ⋄ Пересмотрено 28.06.2002

Изучены свойства симметрии течения и теплообмена в сферической системе координат на основе аппарата теории групп Ли. Получены автомодельные формы независимых переменных и искомых функций для эллиптических течений, подчиняющихся полным уравнениям Навье-Стокса и Фурье-Кирхгофа.

Вивчено властивості симетрії течії і теплообміну в сферичній системі координат на основі апарату теорії груп Лі. Одержані автомодельні форми незалежних змінних та пошукових функцій для еліптичних течій, підпорядкованих повним рівнянням Навьє-Стокса та Фурьє-Кирхгофа.

The properties of symmetry of the flow and heat transfer in a spherical system of co-ordinates on the basis of apparatus of Lie group theory were studied. The self-similar forms of the independent variables and desired functions for elliptic flow obeying to the complete equations of Navier-Stokes and Fourier - Kirchhoff are obtained

ВВЕДЕНИЕ

Процессы гидродинамики и теплообмена описываются дифференциальными уравнениями. Большинство исследователей, применяя различные методы, находят частные решения уравнений. При этом упускаются другие возможные решения, а, следовательно, и физические закономерности. Теория групп Ли (групп симметрий) помогает во многих случаях найти широкий класс всех возможных решений. Симметрии дифференциальных уравнений, описывающих тот или иной физический процесс, тесно связаны со свойством автомодельности [1]. Данное свойство позволяет редуцировать систему дифференциальных уравнений в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение или уменьшать количество независимых переменных. Во многих случаях это существенно облегчает аналитический или численный анализ физического процесса. Кроме того, автомодельные формы переменных весьма полезны в экспериментальных исследованиях, так как указывают способ обобщения опытных данных. В работах [2, 3] проведены исследования ламинарного и турбулентного пограничных слоев, в которых на основе симметрий получены автомодельные формы уравнений Прандтля. Эти исследования иллюстрируют приложение метода симметрий в задачах гидромеханики и теплообмена. В предлагаемой работе изучены свойства симметрии и автомодельности уравнений Навье-Стокса и конвективного теплообмена (Фурье-Кирхгофа) в сферической системе координат.

В ряде работ, посвященных исследованию симметрий уравнений Навье-Стокса [4-8], были найдены группы симметрий этих уравнений для декартовой системы координат. Однако в настоящее время практически отсутствуют работы, посвященные изучению симметрий в сферических координатах.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Системы уравнений Навье-Стокса и Фурье-Кирхгофа в сферических координатах выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}-\frac{v^2+w^2}{r}+\frac{w}{r\sin\phi}\frac{\partial u}{\partial \psi}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+$$

$$+\nu\left(\nabla^2 u-\frac{2u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \phi}-\frac{2v\mathrm{ctg}\,\phi}{r^2}-\frac{z}{r^2\sin\phi}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}+\frac{uv}{r}+\frac{w}{r\sin\phi}\frac{\partial v}{\partial \psi}-\frac{v^2\mathrm{ctg}\,\phi}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi}+$$

$$+\nu\left(\nabla^2 v+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}-\frac{v}{r^2\sin^2\phi}-\frac{2\cos\phi}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)+$$

$$+g\beta T\sin\phi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}+\frac{w}{r\sin\phi}\frac{\partial w}{\partial \psi}+\frac{wu}{r}+$$

$$+\frac{wv\mathrm{ctg}\,\phi}{r}=-\frac{1}{\rho r\sin\phi}\frac{\partial p}{\partial \psi}+$$

$$+\nu\left(\nabla^2 w-\frac{w}{r^2\sin^2\phi}+\frac{2}{r^2\sin\phi}\frac{\partial u}{\partial \psi}+\frac{2\cos\phi}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial v}{\partial \psi}\right),$$

$$\frac{\partial(ur^2\sin\phi)}{\partial r}+\frac{\partial(vr\sin\phi)}{\partial \phi}+\frac{\partial(rw)}{\partial \psi}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}+\frac{w}{r\sin\phi}\frac{\partial T}{\partial \psi}=a\nabla^2 T, \qquad (1)$$

где t – время; r, ϕ, ψ – сферические координаты; u, v, w – компоненты скорости, соответствующие координатам r, ϕ, ψ; p – давление; T – температура; ν – кинематическая вязкость; a – температуропроводность; ρ – плотность; g – ускорение свободного падения; β – коэффициент теплового расширения;

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

– лапласиан в сферических координатах. Симметрии системы (1) можно охарактеризовать так называемым "инфинитезимальным" генератором. Общие методы построения такого генератора подробно описаны в работе [1]. Симметрии системы (1) описываются следующим инфинитезимальным генератором:

$$q=[C_1 2t+C_2]\,\partial_t+C_1 r\partial_r-C_1 u\partial_u-C_1 w\partial_w-$$

$$-C_1 v\partial_v-C_1 NT\partial_T+[C_3\tau(t)-C_1 2p]\,\partial_p. \qquad (2)$$

Здесь $\tau(t)$ – произвольные функции времени; индекс около символа ∂ означает производную по величине, стоящей в этом индексе. Постоянная $N=3$, когда существенна естественная конвекция, т.е. когда необходимо учитывать последнее слагаемое в втором уравнении системы (1). Если же этим слагаемым можно пренебречь, то N может принимать любые значения. Используя инфинитезимальный генератор (2), можно найти такие преобразования, которые не меняют форму дифференциальных уравнений (1). На основе этих преобразований строятся новые решения системы по ее известным решениям [1]. Еще одно замечательное свойство инфинитезимального генератора состоит в том, что, используя его, можно отыскать различные автомодельные формы системы дифференциальных уравнений. Эта операция производится на основе решения дифференциальных уравнений первого порядка [1-3], которые строятся с помощью генератора (2).

В данном исследовании мы сосредоточимся на построении таких форм. Константы с числовым индексом в выражении (2) характеризуют различные виды симметрий. Таким образом, система (1) обладает тремя симметриями.

Для нестационарных процессов удобно в качестве параметрической переменной (которая входит в коэффициент при автомодельной функции) выбрать время. Тогда автомодельные формы переменных примут вид

$$\eta(t,r)=\frac{r}{\sqrt{2\nu t+C_2}},$$

$$u(t,r,\phi,\psi)=\frac{U(\eta,\phi,\psi)}{\sqrt{2\nu t+C_2}}\nu,$$

$$v(t,r,\phi,\psi)=\frac{V(\eta,\phi,\psi)}{\sqrt{2\nu t+C_2}}\nu,$$

$$w(t,r,\phi,\psi)=\frac{W(\eta,\phi,\psi)}{\sqrt{2\nu t+C_2}}\nu,$$

$$p(t,r,\phi,\psi)=\frac{P(\eta,\phi,\psi)}{2\nu t+C_2}\rho\nu^2+C_3\varepsilon\tau(t),$$

$$T(t,r,\phi,\psi)=\Delta T\frac{\Theta(\eta,\phi,\psi)}{\sqrt{(2\nu t+C_2)^3}}L^3,$$

где $C_1=\nu$; C_2, C_3 – произвольные величины; ε – параметр группового преобразования (может принимать любые значения); ΔT – характерная разность температур задачи (температурный масштаб); L – характерный размер (линейный масштаб); U, V, W, P, Θ – автомодельные безразмерные функции. После подстановки этих переменных в систему (1) получаем

$$\sin\phi\left(2U+\eta\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)+\cos\phi V+\sin\phi\frac{\partial V}{\partial \phi}+\frac{\partial W}{\partial \psi}=0,$$

$$U\frac{\partial U}{\partial \eta}+\frac{V}{\eta}\frac{\partial U}{\partial \phi}-\frac{V^2+W^2}{\partial \eta}+\frac{W}{\eta\sin\phi}\frac{\partial U}{\partial \psi}=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\eta+\frac{2}{\eta}\right)+U\left(1-\frac{2}{\eta^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}+\frac{\mathrm{ctg}\,\phi}{\eta^2}\frac{\partial U}{\partial \phi}+\frac{1}{(\eta\sin\phi)^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}-$$

$$-\frac{2}{\eta^2}\frac{\partial V}{\partial \phi}-\frac{2V\mathrm{ctg}\,\phi}{\eta^2}-\frac{2}{\eta^2\sin\phi}\frac{\partial W}{\partial \psi},$$

$$U\frac{\partial V}{\partial \eta}+\frac{V}{\eta}\frac{\partial V}{\partial \phi}+\frac{W}{\eta\sin\phi}\frac{\partial V}{\partial \psi}+\frac{UV}{\eta}-\frac{W^2\mathrm{ctg}\,\phi}{\eta}=$$

$$=-\frac{1}{\eta}\frac{\partial P}{\partial \phi}+\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}+\frac{\partial V}{\partial \eta}\left(\eta+\frac{2}{\eta}\right)+$$

$$+V\left(1-\frac{2}{\eta^2\sin^2\phi}\right)+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}+\frac{\mathrm{ctg}\,\phi}{\eta^2}\frac{\partial V}{\partial \phi}+$$

$$+\frac{1}{(\eta\sin\phi)^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}+\frac{2}{\eta^2}\frac{\partial U}{\partial \phi}-\frac{2\cos\phi}{\eta^2\sin^2\phi}\frac{\partial W}{\partial \psi}+\mathrm{Gr}\Theta\sin\phi,$$

$$U\frac{\partial W}{\partial \eta}+\frac{V}{\eta}\frac{\partial W}{\partial \phi}+\frac{W}{\eta\sin\phi}\frac{\partial W}{\partial \psi}+\frac{UW}{\eta}+\frac{VW\mathrm{ctg}\,\phi}{\eta}=$$

$$=-\frac{1}{\eta\sin\phi}\frac{\partial p}{\partial \psi}+\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}+\frac{\partial W}{\partial \eta}\left(\eta+\frac{2}{\eta}\right)+$$

$$+W\left(1-\frac{2}{\eta^2\sin^2\phi}\right)+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}+\frac{\mathrm{ctg}\,\phi}{\eta^2}\frac{\partial W}{\partial \phi}+$$

$$+\frac{1}{(\eta\sin\phi)^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2}+\frac{2}{\eta^2\sin\phi}\frac{\partial U}{\partial \psi}+\frac{2\cos\phi}{\eta^2\sin^2\phi}\frac{\partial V}{\partial \psi},$$

$$\mathrm{Pr}\left(U\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}+\frac{V}{\eta}\frac{\partial \Theta}{\partial \phi}+\frac{W}{\eta\sin\phi}\frac{\partial \Theta}{\partial \psi}-\eta\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}-3\Theta\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}+\frac{2}{\eta}\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \phi^2}+\frac{\mathrm{ctg}\,\phi}{\eta^2}\frac{\partial \Theta}{\partial \phi}+\frac{1}{(\eta\sin\phi)^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \psi^2},$$

где Pr – число Прандтля; Gr – число Грасгофа. Выбирая в качестве параметрической переменной радиус, мы приходим к новым автомодельным формам дифференциальных уравнений. Еще один способ изменить формы автомодельных уравнений – это поменять местами переменные в $\eta(t, r)$. Проблема состоит в том, чтобы подобрать нужную автомодельную форму для конкретных начальных и граничных условий.

Рассмотрим автомодельные формы двухмерных стационарных течений, когда возможно свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Если течение рассматривается в пространстве $r-\phi$, то генератор (2) дает нам следующее выражение для радиальной компоненты скорости:

$$u(r,\phi)=\frac{\partial f(\eta(\phi))}{\partial \eta}\frac{\nu}{r}.$$

Тангенциальная компонента скорости и уравнение движения приведены в работе [9]. Уравнение конвективного теплообмена имеет вид

$$\sqrt{1-\eta^2}\Theta''-2\eta\Theta'+6\Theta+\mathrm{Pr}\,(3\Theta f'+f\Theta')=0,$$

где

$$T(r,\phi)=\Delta T\frac{\Theta(\eta)}{r^3}L^3$$

с учетом эффектов свободной конвекции.

Если мы рассматриваем движение в криволинейной плоскости $r-\psi$, то необходимо фиксировать значения координаты ϕ. Не нарушая общности рассуждений, мы можем принять, что $\sin\phi = 1$. Тогда автомодельные профили скорости и температуры принимают форму

$$u(r,\psi)=\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\frac{\nu}{r},\quad w(r,\psi)=-f(\eta)\frac{\nu}{r},$$

$$T(r,\psi)=\Delta T\frac{\Theta(\eta)}{r^N}L^N, \tag{3}$$

где $\eta=\psi$. После подстановки выражения (3) в (1) получаем

$$f^{IV}+ff'''+(2+3f')f''+2f=0,$$

$$\Theta''+Prf\Theta'+\Theta\left(N\,\mathrm{Pr}\,f'+N^2-N\right)=0.$$

Если подразумевается, что в изучаемом процессе выполняется аналогия Рейнольдса (аналогия профилей скорости и температуры), то следует выбирать такое значение N, чтобы показатели параметрической переменной в профилях скорости и температуры совпадали. Тогда в большинстве случаев необходимо выбирать либо $N=0$ [10], либо $N=1$ [3]. При $N=0$ и $N=1$ уравнение конвективного теплообмена интегрируется в квадратурах:

- $N=0$:

$$\Theta=c_1\int_0^\eta \exp\left(-\mathrm{Pr}\int_0^\eta f d\eta\right)d\eta+c_2,$$

- $N=1$:

$$\Theta=\exp\left(-\mathrm{Pr}\int_0^\eta f d\eta\right)\left[c_1\eta\exp\left(\mathrm{Pr}\int_0^\eta f d\eta\right)+c_2\right].$$

где c_1, c_2 – константы интегрирования.

Следует отметить, что ряд автомодельных или полуавтомодельных форм для сферической системы координат в параболическом приближении был исследован в [11, 12].

Сравнивая количество автомодельных форм для различных систем координат [13], можно сказать, что сферическая система обладает меньшим набором таковых. Это вытекает из меньшего числа симметрий сферической системы, что обусловлено наличием в этой системе тригонометрических коэффициентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем исследовании проведен анализ симметрий и соответствующих им автомодельных форм для системы уравнений Навье-Стокса и Фурье-Кирхгофа в сферической системе координат. Показано, как на основе симметрий дифференциальных уравнений можно получить автомодельные формы для переменных и уравнений, используя аппарат теории групп Ли [1]. Симметрии позволяют генерировать автомодельные формы, удобные для решения краевых задач либо аналитически, либо численно. Причем численное интегрирование на основе современных прикладных пакетов (например, "MATHCAD") не вызывает никаких трудностей [14]. Симметрии эллиптических уравнений, таких как полные уравнения Навье-Стокса и Фурье-Кирхгофа, чаще всего обладают симметриями, которые справедливы и для укороченных параболических аналогов, таких как уравнения Прандтля для пограничного слоя. Поэтому симметрии полных эллиптических уравнений можно использовать и для построения автомодельных форм параболических течений. При этом, даже если уравнение полностью не отвечает той или иной симметрии (из-за наличия дополнительных членов, характеризующих влияние возмущающих факторов: продольный градиент давления, вдув, отсос, кривизна линий тока, несжимаемость и т.д.), эту симметрию можно использовать для конструирования частично автомодельных уравнений [3]. И эти уравнения можно интегрировать на каждом шаге маршевой переменной как систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основная трудность предложенного метода исследования заключается в связывании конкретной автомодельной формы (или симметрии, которая порождает эту форму) с исследуемой краевой задачей, поскольку различные симметрии генерируют различные автомодельные формы одной и той же системы дифференциальных уравнений в частных производных. Не существуют однозначного строго критерия, который связывал бы данную автомодельную форму с граничными условиями, которые надо удовлетворить в конкретной задаче. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо находить такой критерий из дополнительных условий. Часто удается использовать законы сохранения импульса, момента импульса или потока импульса [9, 10]. Исходя из постоянства отмеченных величин, выбирается вид автомодельных переменных, которые можно получить на основе симметрий исследуемого процесса.

Автомодельные формы также очень полезны в экспериментальных исследованиях, так как сразу показывают, в каких координатах следует обрабатывать экспериментальные данные. Такая обработка опытных точек сразу может дать ответ, является ли исследуемый процесс автомодельным. Это также может дать ответ о корректности математической модели процесса.

1. *Олвер П.* Приложение групп Ли к исследованию дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1989.– 639 с.
2. *Авраменко А.А.* Группы Ли и автомодельные формы уравнений Прандтля // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– 1 (73), N 2.– С. 3–11.
3. *Авраменко А.А.* Автомодельный анализ турбулентных гидродинамических и температурных пограничных слоев // Теплофизика высоких температур.– 2000.– 38, N 3.– С. 452–457.
4. *Lloyd, S.P.* The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations // Acta Mechanica.– 1981.– 38.– P. 85–98.
5. *Khor'kova, N. G and Verbovetsky, A. M.* On symmetry subalgebras and conservation laws for k-turbulence model and the Navier-Stokes equations // Amer. Math. Soc. Trans.– 1995.– 167 (2).– P. 61–90.
6. *Пухначев В.В.* Групповые свойства уравнений Навье-Стокса в плоском случае // Ж. прикл. мех. и техн. физ.– 1960.– N 1.– С. 83–90.
7. *Пухначев В.В.* Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса, описывающие движение со свободной границей // ДАН СССР.– 1972.– 202 N 2.– С. 302–305.
8. *Бытев В.О.* Групповые свойства уравнений // Сб. Численные методы механики сплошной среды.– Новосибирск: ВЦ СО АН СССР.– 1972.– 3 5.– С. 13–17q.
9. *Ландау Л.Д.* Новое точное решение уравнений Навье-Стокса // ДАН СССР.– 1944.– 44.– С. 311–314.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.– 712 с.
11. *Le Palec G., Daguenet M.* Laminar three-dimensional mixed convection about a rotating sphere in a stream // J. Heat and Mass Transfer.– 1987.– 30, N 7.– P. 1511–1523.
12. *Rajasekaran R., Polekar M.G.* Mixed convection about a rotating sphere // J. Heat and Mass Transfer.– 1985.– 28, N 5.– P. 959–967.
13. *Авраменко А.А., Басок Б. И., Соловьев Е.Н. и др.* Симметрии турбулентных процессов теплообмена и гидродинамики // Пром. теплотехника.– 2001.– 23, N 6.– С. 25–29.
14. *Авраменко А.А.* Свойства симметрии турбулентных динамических и температурных пограничных слоев // Пром. теплотехника.– 2000.– 22, N 5-6.– С. 29–36.