ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2002. Том 4 (76), N 3. С. 42 – 47

УДК 532.526

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ОДНОГО ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ, ЩО ЗВ'ЯЗАНИЙ З ОБМЕЖЕНОЮ ТРИЗВ'ЯЗНОЮ ДВОВИМІРНОЮ ОБЛАСТЮ

ВАЛ. І. МАМЧУК

Національний авіаційний університет, Київ

Отримано 12.02.2002

Разработан метод решения задач обтекания тел произвольной формы в виде итерационного процесса отображения трехсвязных двумерных областей. Итерационный процесс позволяет эффективно численно строить и отображать рассматриваемые области с помощью конформных и квазиконформных отображений на канонический прямоугольник, на котором решение задач обтекания значительно упрощается. Для него сформулированы и доказаны условия сходимости. Обоснованы значения параметров, при которых достигается максимальная скорость сходимости итерационного процесса.

Розроблено метод розв'язування задач обтікання тіл довільної форми у вигляді ітераційного процесу відображення трьохзв'язних двовимірних областей. Ітераційний процес дозводляє ефективно чисельно будувати і відображати розглядувані області за допомогою конформних і квазіконформних відображень на канонічний прямокутник, на якому розв'язування задач обтікання значно спрощується. Для нього сформульовано і доведено умови збіжності. Обгрунтовано значення параметрів, при яких досягається максимальна швидкість збіжності ітерацейного процесу.

The method of the tasks of bodies flow decision of the any form as iterative process of representation three-coherent two-dimensional of areas is developed. The iterative process allows effectively numerically constructing and to representing considered areas with the help conformal and quasi-conformal of representation to an initial rectangular, on which the decision of tasks of a flow considerably becomes simpler. For it are formulated and the conditions of convergence are proved. The meanings of parameters are reasonable, at which the maximal speed of convergence of iterative process is reached.

ВСТУП

Розв'язування широкого класу задач гідроаеромеханіки можна звести до використання методу чисельної автоматичної побудови загальної системи криволінійних координат, що зв'язана з тілами, наприклад, криловим профілем та закрилком літака. Це дозволяє крайові задачі розв'язувати на канонічній області (параметричному прямокутнику). При цьому фізична область конформно відображається на область прямокутника, а складові такого відображення знаходяться як чисельні розв'язки відповідної системи диференціальних рівнянь еліптичного типу.

Згідно з [1], для розв'язування такої системи рівнянь використовується явний ітераційний процес. Метою роботи є встановлення необхідних та достатніх умов збіжності цього процесу, що дає можливість чисельно будувати конформні відображення обмеженої тризв'язної двовимірної області на канонічну область і розв'язувати на прямокутнику відповідні крайові задачі.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо прямокутну сіткову область

$$G' = \left\{(n,m) \in Z^2 : 0 \le n \le d, 0 \le m \le c\right\},$$

де $c, d \in N \setminus \{1\}$ і c – відносно велике число, з границею

$$H' = G' \setminus \left\{(n,m) \in Z^2 : 0 < n < d, 0 < m < c\right\}.$$

На множині H' виділимо підмножини

$$\begin{aligned} H_1' &= \{(0,m) \in G' : 0 \le m \le k\}, \\ H_2' &= \{(0,m) \in G' : k+l < m < c-k-l\}, \\ H_3' &= \{(0,m) \in G' : c-k \le m \le c\}, \end{aligned}$$

де k, l – натуральні числа, такі, що $2k+2l < c-p$ і $p \ge 4$.

Потрібно знайти визначену на G' функцію $x_{n,m}$, для якої

$$x_{n,0} = x_{n,c}, \quad n = \overline{0,d}, \tag{1}$$

$$x_{n,m} = \frac{1}{4}\left(x_{n+1,m} + x_{n-1,m} + x_{n,m+1} + x_{n,m-1}\right), \quad (n,m) \in G' \setminus H', \tag{2}$$

$$x_{n,0} = \frac{1}{4}\left(x_{n+1,0} + x_{n-1,0} + x_{n,1} + x_{n,c-1}\right), \quad n = \overline{1,d-1}, \tag{3}$$

$$x_{0,m} = x_{0,c-m}, \quad m = \overline{k+1,k+l}, \tag{4}$$

$$x_{0,m} = \frac{1}{4}\left(x_{0,m-1} + x_{0,m+1} + x_{1,m} + x_{1,c-m}\right), \quad m = \overline{k+1,k+l}, \tag{5}$$

і

$$x_{0,m} = a_m, \quad (0,m) \in H_1' \cup H_2' \cup H_3', \qquad (6)$$

$$x_{d,m} = b_m, \quad m = \overline{0,c}, \qquad (7)$$

де a_m і b_m – довільні задані числа, для яких

$$ca_0 = a_c, \; a_k = a_{c-k},$$
$$a_{k+l+1} = a_{c-k-l-1}, \; b_0 = b_c. \qquad (8)$$

Розв'язок задачі (1)-(8) можна знайти, використавши явний ітераційний процес

$$x_{n,m}^{(i+1)} = x_{n,m}^{(i)} + \frac{1}{4}\omega F_{n,m}^{(i)}, \; i \geq 1, \qquad (9)$$

де

$$F_{n,m}^{(i)} = \begin{cases} x_{n+1,m}^{(i)} + x_{n-1,m}^{(i)} + x_{n,m+1}^{(i)} + x_{n,m-1}^{(i)} - \\ -4x_{n,m}^{(i)}, \text{ якщо } (n,m) \in G' \setminus H', \\ x_{n+1,0}^{(i)} + x_{n-1,0}^{(i)} + x_{n,1}^{(i)} + x_{n,c-1}^{(i)} - \\ -4x_{n,0}^{(i)}, \text{ якщо } m = 0, \; n = \overline{1, d-1}, \\ x_{0,m-1}^{(i)} + x_{0,m+1}^{(i)} + x_{1,m}^{(i)} + x_{0,c-m}^{(i)} - \\ -4x_{0,m}^{(i)}, \text{ якщо } n = 0, \; m = \overline{k+1, k+l}; \end{cases}$$

i – номер ітерації; ω – дійсний параметр. Вважається, що для всіх $i \geq 1$

$$x_{n,0}^{(i)} = x_{n,c}^{(i)}, \; n = \overline{0,d}, \qquad (10)$$

$$x_{d,m}^{(i)} = b_m, \; m = \overline{0,c} \qquad (11)$$

і

$$x_{0,m}^{(i)} = a_m, \quad (a,m) \in H_1' \cup H_2' \cup H_3'. \qquad (12)$$

Встановимо умови збіжності розглянутого ітераційного процесу.

2. ПОДАННЯ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ У МАТРИЧНОМУ ВИГЛЯДІ

Розглянемо матрицю

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} T & K \\ K^* & H \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

де

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матриця}$$

порядку l; $K = (\Theta_1 D_1 \Theta_2 D_2 \Theta_3 \Theta_4)$ – матриця порядку $l \times c(d-1)$, де Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 – нульові матриці відповідно розмірів $l \times (k+1)$, $l \times (c-2k-2l+1)$, $l \times k$ та $l \times c(d-2)$; D_1 – одинична матриця порядку l;

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матриця}$$

порядку l; K^* – матриця, отримана транспонуванням матриці K;

$$H = \begin{pmatrix} S & D & \Theta & \cdots & \Theta & \Theta & \Theta \\ D & S & D & \cdots & \Theta & \Theta & \Theta \\ \Theta & D & S & \cdots & \Theta & \Theta & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \cdots & S & D & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \cdots & D & S & D \\ \Theta & \Theta & \Theta & \cdots & \Theta & D & S \end{pmatrix} \text{ – матриця}$$

порядку $c(d-1)$, де

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матриці}$$

порядку c.

Теорема 1. Ітераційний процес (9)-(12) можна подати у вигляді

$$X^{(i+1)} = ((1-\omega)I + \omega P)\, X^{(i)} + \omega C,\ i \geq 1, \quad (14)$$

в якому I – одинична матриця порядку $c(d-1)+l$; P – матриця порядку $c(d-1)+l$, яка визначена рівністю (13);

$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} X_0^{(i)} \\ X_1^{(i)} \\ \vdots \\ X_{d-1}^{(i)} \end{pmatrix} \text{ – матриця розміру}$$

$(c(d-1)+l) \times 1$, де

$$X_0^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{0,k+1}^{(i)} \\ x_{0,k+2}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{0,k+l}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad X_1^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{1,0}^{(i)} \\ x_{1,1}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{1,c-1}^{(i)} \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$X_{(d-1)}^{(i)} = \begin{pmatrix} X_{d-1,0}^{(i)} \\ X_{d-1,1}^{(i)} \\ \vdots \\ X_{d-1,c-1}^{(i)} \end{pmatrix};$$

C – матриця розміру $(c(d-1)+l) \times 1$, елементи якоє визначаються співвідношеннями (9)-(12).

Ця теорема встановлюється прирівнюванням відповідних елементів лівої та правої частин матричного співвідношення (14) та співставленням отриманих рівностей із співвідношеннями (9)-(12).

3. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Нехай $\sigma(A)$ і $r(A)$ – спектр і спектральний радіус матриці A.

Відповідно до [2, с. 123], ітераційний процес (14) є збіжним при довільному початковому наближенні $X^{(0)} \in R^{c(d-1)+l}$ тоді і тільки тоді, коли $r((1-\omega)I + \omega P) < 1$.

Для вияснення, при яких значеннях параметра ітераційний процес (14) є збіжним, наведемо ряд допоміжних тверджень.

Розглянемо множину

$$G'' = G_1'' \cup G_2'',$$

де

$$G_1'' = \left\{(n,m) \in Z^2 :\ 1 \leq n \leq d-1,\ 0 \leq m \leq c-1\right\},$$

$$G_2'' = \left\{(0,m) \in Z^2 :\ k+1 \leq m \leq k+l\right\}.$$

В точках цієї множини знаходимо розв'язок задачі (1)-(8), яку можна подати у вигляді

$$X = PX + C.$$

Тут C – елемент простору $R^{c(d-1)+l}$, що у виразі (14), а

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{d-1} \end{pmatrix} \text{ – елемент цього ж простору, що}$$

потрібно знайти, в якому

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{0,k+1} \\ x_{0,k+2} \\ \vdots \\ x_{0,k+l} \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,c-1} \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$X_{(d-1)} = \begin{pmatrix} X_{d-1,0} \\ X_{d-1,1} \\ \vdots \\ X_{d-1,c-1} \end{pmatrix}.$$

Координати векторів простору $R^{c(d-1)+l}$, для зручності, наділимо двома індексами n і m так, щоб сумісно область зміни їх збігалась із D''. Нехай Y – довільний вектор із $R^{c(d-1)+l}$, а $y_{n,m}$, $(n,m) \in G''$, – координати цього вектора. Використаємо евклідову норму в $R^{c(d-1)+l}$, визначену рівністю

$$\| Y \| = \left(\sum_{(n,m) \in G''} y_{n,m}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай $\| P \|$ – норма матриці P, що визначається рівністю

$$\| P \| = \sup_{Y \neq 0} \frac{\| PY \|}{\| Y \|}.$$

Лема 1. $\| P \| \leq 1$

Доведення. Розглянемо довільний ненульовий вектор $Y \in R^{c(d-1)+l}$. З визначення матриці P випливає, що:

1) для кожної координати $z_{n,m}$, $(n,m) \in G''$ вектора $Z = PY$ виконується рівність

$$z_{n,m} = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in \Omega_{n,m}} y_{i,j}, \quad (15)$$

де $\Omega_{n,m}$ – деяка множина, залежна від (n,m), що містить три або чотири точки множини G'', причому $(n+1,m)\in\Omega_{n,m}$, якщо $n\neq d-1$;

2) кожний елемент $(n,m)\in G''$ належить одночасно не більше, ніж чотирьом множинам $\Omega_{i,j}$, $(i,j)\in G''$.

Звідси та з означення норми в $R^{c(d-1)+l}$ отримуємо

$$\| PY \| = \left(\sum_{(n,m)\in G''} z^2_{n,m}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{(n,m)\in G''} \frac{1}{16}\left(\sum_{(i,j)\in\Omega_{n,m}} y_{i,j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\sum_{(n,m)\in G''}\left(\sum_{(i,j)\in\Omega_{n,m}} |y_{i,j}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\sum_{(n,m)\in G''} 4 \sum_{(i,j)\in\Omega_{n,m}} y^2_{i,j}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\sum_{(n,m)\in G''} 16 y^2_{n,m}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{(n,m)\in G''} y^2_{n,m}\right)^{\frac{1}{2}} = \| Y \| .$$

Отже, $\| PY \| \leq \| Y \|$ для кожного ненульового вектора $Y\in R^{c(d-1)+l}$.

Тому $\| P \| \leq 1$.

Лема 1 доведена.

Лема 2. $1\notin\sigma(P)$.

Доведення. Припустимо, що $1\in\sigma(P)$. Існує ненульовий вектор Y, для якого $PY=Y$. Позначимо через (i_0,j_0) таку точку множини G'', для якої

$$|y_{i_0,j_0}| = \max_{(i,j)\in G''} |y_{i,j}|. \qquad (16)$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $|y_{i_0,j_0}|=1$. Згідно з рівністю (15),

$$\frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in\Omega_{i_0,j_0}} y_{i,j} = 1.$$

Тому, на підставі рівності (15), $y_{i,j}=1$ для $(i,j)\in\Omega_{i_0,j_0}$. Оскільки $(i_0+1,j_0)\in\Omega_{i_0,j_0}$, якщо $i_0\neq d-1$, то $y_{i_0+1,j_0}=1$. Якщо $i_0+1\neq d-1$, то за допомогою аналогічних міркувань отримуємо, що $y_{i_0+2,j_0}=1$. Аналогічно, $y_{i_0+3,j_0}=1$, якщо $i_0+2\neq d-1$ і тощо.

Отже,

$$y_{d-1,j_0} = 1. \qquad (17)$$

Тоді

$$y_{d-1,j_0} = \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in\Omega_{d-1,j_0}} y_{i,j}. \qquad (18)$$

Через те, що множина Ω_{d-1,j_0} містить три елементи, то рівність (18) суперечить рівності (17). На підставі виразу (16)

$$\left|\frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in\Omega_{d-1,j_0}} y_{i,j}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in\Omega_{d-1,j_0}} |y_{i,j}| \leq \frac{3}{4}.$$

Таким чином, припущення про те, що $1\in\sigma(P)$ є хибним.

Лема 2 доведена.

Лема 3. $-1\in\sigma(P)$.

Доведення. Припустимо, що $-1\in\sigma(P)$, тобто $PY=-Y$ для деякого ненульового вектора Y. Існує точка $(i_0,j_0)\in G''$, для якої

$$|y_{i_0,j_0}| = \max_{(i,j)\in G''} |y_{i,j}|. \qquad (19)$$

На підставі рівності (15)

$$-y_{i_0,j_0} = \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in\Omega_{i_0,j_0}} y_{i,j}.$$

Тому, згідно з виразом (19) та властивостями множин $\Omega_{i,j}$, $(i,j)\in G''$,

$$|y_{i_0+1,j_0}| = |y_{i_0,j_0}|,$$

якщо $i_0\neq d-1$. За допомогою аналогічних міркувань отримуємо

$$|y_{i_0,j_0}| = |y_{i_0+1,j_0}| = \cdots = |y_{d-1,j_0}| > 0.$$

Це співвідношення суперечить рівності (18), оскільки множина Ω_{d-1,j_0} містить три елементи і тому, згідно з (19),

$$\left|\frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in\Omega_{d-1,j_0}} y_{i,j}\right| \leq \frac{3}{4}\,|y_{d-1,j_0}|\,.$$

Отже, припущення, що $-1\in\sigma(P)$ є хибним.

Лема 3 доведена.

4. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Оскільки матриця P дійсна і симетрична, то $\sigma(P) \subset R$. Позначимо через $\lambda_{min}(P)$ та $\lambda_{max}(P)$ відповідно найменше та найбільше власні значення матриці P.

Теорема 2.

$\lambda_{max}(P) = 1 - \delta_1(c,d,l)$,

$\lambda_{min}(P) = -1 + \delta_2(c,d,l)$, де δ_1 і δ_2 – додатні нескінченно малі величини при $c \to \infty$, $d \to \infty$ і $l \to \infty$, для яких

$$\delta_1(c,d,l) \leq \frac{c+l}{2c(d-1)+2l},$$

$$\delta_2(c,d,l) \leq \max \frac{c+d-1}{2c(d-1)}, \quad \frac{c+l}{2c(d-1)+2l}.$$

Це твердження випливає з того, що $r(P) \leq \| P \|$, $\| P \| \leq 1$ (лема 1), $1 \notin \sigma(P)$ (лема 2), $-1 \notin \sigma(P)$ (лема 3), $\lambda_{min}(P) = \inf\limits_{(x,x)\neq 0} R(x)$, $\lambda_{max}(P) = = \sup\limits_{(x,x)\neq 0} R(x)$, де $R(x) = \dfrac{(x,Px)}{x,x}$ (використано властивості відношення Релея $\dfrac{(x,Px)}{x,x}$ для матриці P, згідно з [4, с.100-102]) і для вектора

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{d-1} \end{pmatrix},$$

в якому

$$a_0 = \begin{pmatrix} a_{0,k+1} \\ a_{0,k+2} \\ \vdots \\ a_{0,k+l} \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,c-1} \end{pmatrix},$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{2,c-1} \end{pmatrix}, \cdots, a_{d-1} = \begin{pmatrix} a_{d-1,0} \\ a_{d-1,1} \\ \vdots \\ a_{d-1,c-1} \end{pmatrix},$$

виконуються співвідношення

$$0 < 1 - R(a) = \frac{c+l}{2c(d-1)+2c},$$

якщо $a_{i,j} = 1$;

$$0 < 1 + R(a) = \frac{c+l}{2c(d-1)+2c},$$

якщо c – парне число і $a_{i,j} = (-1)^{i+j}$ для всіх i, j;

$$0 < 1 + R(a) = \frac{c+d-1}{2c(d-1)},$$

якщо c – непарне число і

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, \text{ якщо } i \neq 0, \\ 0, \text{ якщо } i = 0, \end{cases}$$

Для матриці $(1-\omega)I + \omega P$ справджуються такі твердження.

Теорема 3.

$$r\left((1-\omega)I + \omega P\right) =$$
$$= \begin{cases} |1 + \omega(\lambda_{min}(P) - 1)|, \\ \qquad \text{якщо } \omega \notin \left(0, \dfrac{2}{2 - \lambda_{min}(P) - \lambda_{max}(P)}\right), \\ |1 + \omega(\lambda_{max}(P) - 1)|, \\ \qquad \text{якщо } \omega \in \left(0, \dfrac{2}{2 - \lambda_{min}(P) - \lambda_{max}(P)}\right). \end{cases}$$

Це твердження випливає з рівностей

$$\sigma((1-\omega)I + \omega P) = \{1 - \omega + \omega\lambda_{min}(P), \cdots$$
$$\cdots, 1 - \omega + \omega\lambda_{max}(P)\},$$
$$r((1-\omega)I + \omega P) =$$
$$= \max\{|1 - \omega + \omega\lambda_{min}(P)|, \cdots, |1 - \omega + \omega\lambda_{max}(P)|\} =$$
$$= \max\{|1 - \omega + \omega\lambda_{min}(P)|, |1 - \omega + \omega\lambda_{max}(P)|\}.$$

Наслідок 1. $r((1-\omega)I + \omega P) < 1$ тоді і тільки тоді, коли

$$\omega \in \left(0, \ \frac{2}{1 + |\lambda_{min}(P)|}\right). \tag{20}$$

Наслідок 2. Ітераційний процес (9)-(12) є збіжним при довільному початковому наближенні $x^0 \in R^{c(d-1)+l}$ тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення (20). При цьому максимальна швидкість збіжності ітераційного процесу досягається при

$$\omega = \frac{2}{2 - \lambda_{min}(P) - \lambda_{max}(P)} =$$
$$= \frac{2}{2 + \delta_1(c,d) - \delta_2(c,d)}.$$

ВИСНОВКИ

З наведених тверджень випливає

Теорема 4. Задача (1)-(8) для довільних чисел a_m і b_m, що задовольняють співвідношення (7) і (8), має єдиний розв'язок, який можна знайти методом ітерацій (14) з довільним

$$\omega \in \left(0,\ \frac{2}{1 + |\lambda_{min}(P)}\right)$$

і $X^{(0)} \in R^{c(d-1)+l}$.

1. *Мамчук Вал. І.* До побудови системи криволінійних координат з використанням чисельно-конформних відображень // Прикладна гідромеханіка.– 2000.– **2**(74), N 3.– С. 110–114.
2. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы высшей математики.– Минск: Вышейшая школа, 1972.– 484 с.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц.– М: Наука, 1982.– 270 с.