

УДК 532.526.10

ЧИСЛЕННОЕ ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В РЕЖИМЕ РАЗВИТОЙ ШЕРОХОВАТОСТИ НА ОСНОВЕ LES-ТЕХНОЛОГИИ

В. Г. КУЗЬМЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 16.10.2001 ◊ Пересмотрено 7.05.2002

Турбулентный пограничный слой на плоской шероховатой пластине с нулевым градиентом давления численно моделируется посредством LES-технологии для числа Рейнольдса, равного 10^5 . Крупномасштабное поле течения получается путем прямого интегрирования отфильтрованных трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, используя конечно-разностный метод. Маломасштабные движения параметризованы посредством "смешанной" модели. "Top-hat" фильтр в физическом пространстве использован со вторым порядком точности. Численное моделирование выполнено для того, чтобы изучить среднюю скорость, полные турбулентные напряжения, разрешаемые турбулентные напряжения, кинетическую энергию турбулентности и подсеточномасштабные эффекты. Вычисленные профили средней скорости и турбулентные статистики с экспериментальными данными хорошо согласуются.

Турбулентний пограничний шар на плоскій шорсткій пластині з нульовим градієнтом тиску чисельно моделюється за допомогою LES-технології для числа Рейнольдса, яке дорівнює 10^5 . Великомасштабне поле течії одержується шляхом прямого інтегрування відфільтрованих тривимірних нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої рідини з використанням кінцево-різницевого методу. Маломасштабні рухи параметризовані за допомогою "змішаної" моделі. "Top-hat" фільтр у фізичному просторі використаний з другим порядком точності. Чисельне моделювання виконано для того, щоб вивчити середню швидкість, повні турбулентні напруги, розв'язані турбулентні напруги, кінетичну енергію турбулентності та підсітковомасштабні ефекти. Профілі середньої швидкості і турбулентних статистик, які обчислені, добре узгоджуються з експериментальними результатами.

The fully rough turbulent boundary layer on a flat plate, with zero pressure gradient, is simulated numerically by LES-technique for a Reynolds number of 10^5 . The large-scale flow field has been obtained by directly integrating the filtered three-dimensional time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using a finite-difference method. The small-scale motions were parametrized by a "mixed" model. The "top-hat" filter in physical space was used with second-order-accurate scheme. The simulation were performed to study the mean velocity, the total turbulent stresses, the resolved turbulent stresses, the turbulence kinetic energy and subgrid-scale-model effects. The agreement of the computer mean-velocity profile and turbulence statistics with experimental data is good.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проблема изучения турбулентного пограничного слоя для высоких чисел Рейнольдса все еще далека до полного разрешения. До сих пор не создана единая теория турбулентности, а существуют много разноплановых и многоуровневых подходов, часто противоречащих друг другу. Как известно [1–4], турбулентность трехмерна, нестационарна и нелинейна. Она является вихревым движением с диссипацией. При изучении характеристик турбулентности всегда возникает проблема осреднения по пространству и времени получаемых результатов. Особенно остро этот вопрос стоит при исследовании турбулентного пограничного слоя при высоких числах Рейнольдса вследствие влияния твердой поверхности и наличия многомасштабных вихревых движений.

На данный момент времени существуют следующие основные классы способов описания турбулентных сдвиговых течений:

1) Безразмерные эмпирические зависимости, эмпирические и полуэмпирические методы расчета. На основе эмпирических данных предложены законы подобия для профиля скорости ("закон стенки" и "закон дефекта") [4, 5]. Эмпирические методы расчета основаны на соотношении импульсов [4, 6, 7]. Полуэмпирические методы созданы на базе интегрального соотношения импульсов и универсальных переменных подобия течения [4, 8].

2) Численные решения уравнений Рейнольдса (осредненных по времени уравнений Навье-Стокса). Уравнения Рейнольдса замыкаются относительно "кажущихся" турбулентных напряжений с помощью полуэмпирических моделей турбулентности и уравнений Фридмана-Келлера [4, 9]. Получаются уравнения моментов того или иного порядка с соответствующими допущениями [9–11]. Уравнения Рейнольдса не вытекают полностью из основополагающих принципов, так как для замыкания системы уравнений привлекаются дополни-

тельные гипотезы. Большим недостатком является осреднение этих уравнений по всем масштабам турбулентности на промежутке времени, который велик по сравнению с временами, соответствующими доминирующим частотам турбулентности, что требует моделирования сразу всех масштабов вихрей. Таким образом, нереально сконструировать универсальную модель турбулентности для различных классов движений. В настоящее время существуют каталоги моделей и подмоделей турбулентности [11], насчитывающие тысячи единиц. Для изучения турбулентного пограничного слоя часто применяется метод параболизации осредненных уравнений Навье-Стокса [4, 5, 12].

3) Численное моделирование крупных вихрей (LES — Large Eddy Simulation) с использованием замыкающих моделей "подсеточных" масштабов. Концепция моделирования крупных вихрей LES основана на расщеплении общего движения на крупно- и мелкомасштабные структуры. К уравнениям Навье-Стокса применяется операция фильтрации. При этом движения крупномасштабных вихрей определяются непосредственно путем интегрирования "сглаженных" (отфильтрованных) уравнений Навье-Стокса, а моделируются лишь подсеточнокомасштабные пульсации и тензор подсеточнокомасштабных напряжений. Результаты расчетов течения в турбулентном пограничном слое на основе LES-технологии для случая $Re = 10^5$ в мировой научной литературе нами не обнаружены. В русскоязычных научных источниках практически нет глубоких исследований по LES-методу и, соответственно, отсутствует специализированная общепринятая терминология.

4) Прямое численное решение уравнений Навье-Стокса (DNS — Direct Numerical Simulation). В настоящее время с помощью прямых численных методов DNS проведено ограниченное количество исследований турбулентного пограничного слоя [13-16] с относительно небольшими числами Рейнольдса (до $Re_\theta=1410$). На данном уровне развития компьютерной техники получить численное решение уравнений Навье-Стокса методом DNS для больших чисел Рейнольдса не представляется возможным [17].

LES-технология развивалась на протяжении последних 30 лет с целью численного моделирования турбулентных течений с большими числами Рейнольдса. Современными исследованиями установлено, что важные свойства турбулентного течения, обусловленного крупномасштабным движением, остаются почти неизменными, если для мел-

комасштабного движения используются подсеточные модели. После введения моделей мелкомасштабной турбулентности для неразрешимых движений с масштабами, меньшими шага расчетной сетки, становится возможным корректное прямое численное исследование крупномасштабных движений.

Для анализа стационарной в среднем турбулентности необходимо ввести некоторую модель процесса диссипации. Эта модель не должна зависеть от геометрических характеристик крупномасштабного движения вследствие того, что мелкомасштабная турбулентность имеет более консервативную и универсальную структуру, в отличие от турбулентности со всевозможными масштабами. Используемые для этих целей модели основаны, главным образом, на хорошо известном каскадном процессе передачи энергии, впервые описанном Колмогоровым [18].

LES-модели базируются на идее, что основная часть турбулентной кинетической энергии сосредоточена в вихрях большого масштаба. Турбулентность с малыми пространственными масштабами лишь обеспечивает (в большей части пограничного слоя) эффективный сток турбулентной кинетической энергии. LES-подход соединяет численное моделирование основных уравнений для крупных разрешаемых сеточнокомасштабных вихрей с моделями, предложенными для малых неразрешаемых подсеточнокомасштабных вихрей. Наименьший разрешаемый масштаб выбирается так, что он попадает в инерционный интервал турбулентности. Хотя моделирование крупных вихрей требует решения трехмерных неустановившихся уравнений Навье-Стокса, как это происходит при прямом численном моделировании DNS, расчетные сетки для LES можно использовать более грубые, чем сетки для DNS, потому что малые масштабы не нужно разрешать. Меньшие вычислительные затраты позволяют использовать LES для течений с большими числами Рейнольдса, где DNS было бы невозможно. Привлекательность LES-подхода заключается в том, что численное моделирование крупных вихрей в состоянии вполне успешно вычислить все интересующие нас характеристики турбулентного течения с помощью подсеточнокомасштабного (SGS — Sub-GridScale) моделирования. SGS-моделирование является более простым и универсальным, чем рейнольдсово-осреднительное.

Существуют два основополагающих эффекта, которые требуют моделирования в LES для турбулентных сдвиговых течений, а именно: 1) подсеточнокомасштабное сдвиговое напряжение, чей гра-

диент прямо подвержен воздействию средним течением; 2) общий энергоперенос между крупными и малыми масштабами, который включает как доминантный диссипативный эффект, связанный с прямым энергопереносом от крупных к малым вихрям, так и возвратный энергоперенос от малых к крупным вихрям.

Используя допущение об изотропии малых масштабов посредством аналогии молекулярной вязкости, вводится "вихревая вязкость", которая берет в расчет механизм прямого энергопереноса, в том числе диссипации кинетической энергии турбулентности [18], и может установить отношение неизвестного подсеточномасштабного напряжения с разрешаемым сеточным напряжением. Известная модель [19] является наиболее популярной моделью вихревой вязкости для неразрешаемых малых масштабов и относится к первому типу подсеточномасштабных моделей. В случае неоднородных течений модель [19] описывает хорошо лишь глобальную диссипацию энергии, она чрезмерно диссипативна в случае течений, ограниченных стенкой. Для неоднородных сложных турбулентных течений необходимо, чтобы подсеточномасштабная модель приспособлялась к локальной гидродинамике течения. Следовательно, применяется динамическая процедура для модельного коэффициента [20]. Но при этом получается чрезмерное энерговозвратное рассеяние вследствие больших локальных флуктуаций динамического модельного коэффициента, которое ведет к экспоненциально возрастающей неустойчивости.

К другому типу подсеточных моделей принадлежит модель масштабного подобия, которая предсказывает подсеточномасштабное напряжение, основанное на наименьших разрешаемых масштабах (при этом используется повторное фильтрование). Модель допускает прямое подобие между наибольшими неразрешаемыми масштабами и наименьшими разрешаемыми масштабами, подходящими к инерционному интервалу [18]. Такая модель является недостаточно диссипативной: задается неточное значение подсеточномасштабных напряжений, тем самым плохо обеспечивается переток энергии от разрешаемых масштабов к неразрешаемым. Существуют различные модификации [20-23], в том числе с использованием динамической процедуры.

Для устранения указанных выше недостатков моделей вихревой вязкости и масштабного подобия созданы модели третьего типа – смешанные модели (модель вихревой вязкости "плюс" масштабоподобная модель). Применение динамической процедуры к смешанной модели делает ее бо-

лее чувствительной к локальному состоянию потока [24, 25].

На данный момент времени все еще острой является проблема взаимосвязи конечно-разностного метода решения сглаженных (отфильтрованных) уравнений Навье-Стокса с выбором вида фильтра и их влияния на корректность и точность получаемых численных результатов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью настоящей работы является описание LES-технологии численного моделирования трехмерного турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости в режиме развитой шероховатости. Данная технология называется методом моделирования крупных вихрей LES (Large Eddy Simulation).

Модель создается на основе ряда основных допущений: 1) однородное течение вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами при отсутствии внешних массовых сил натекает на плоскую песочно-шероховатую поверхность; 2) исследуется трехмерное течение пограничного слоя при числе Рейнольдса $Re = 10^5$; 3) течение в пограничном слое находится в режиме развитой шероховатости и начинается на передней кромке; 4) задача рассматривается в конечной трехмерной вычислительной области с заданными граничными условиями.

LES-технология разрешает явно крупномасштабные движения. Влияние мелких масштабов учитывается в параметризованном виде и для этой цели используются различные представления. Наименьший разрешаемый масштаб выбирается так, что он попадает в инерционный интервал турбулентности. Если число Рейнольдса достаточно велико, то может существовать широкий интервал масштабов (волновых чисел), в котором ни энергоснабжение, ни вязкая диссипация не играют роли и имеет место только инерционный перенос ко все более малым вихрям. Этот интервал называется инерционным. В инерционном интервале спектр турбулентной кинетической энергии зависит только от скорости ее диссипации и волнового числа, но не зависит от вязкости.

Уравнения, описывающие поведение полей с разрешаемыми масштабами, получаются из обычных уравнений для непрерывных мгновенных полей после процедуры фильтрации. Для каждого непрерывного поля f вводится отфильтрованное поле:

$$\bar{f}(\vec{x}) = \int_D f(\vec{x}') G(\vec{x} - \vec{x}', \Delta) d\vec{x}',$$

$$\int_D G(\vec{x} - \vec{x}', \Delta) d\vec{x}' = 1,$$

где $G(\vec{x} - \vec{x}', \Delta)$ – функция фильтра, описывающая окно сглаживания; Δ – ширина фильтра; D – вычислительная область. Полное поле f представляется в виде суммы отфильтрованной компоненты (разрешаемое поле) \bar{f} и мелкомасштабной добавки (подсеточномасштабная неразрешаемая часть поля) f' :

$$f = \bar{f} + f'.$$

В качестве уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости используются уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности. После применения к ним операции фильтрации и обезразмеривания получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1)$$

В данной модели используется правая декартова система координат $Oxyz$. Ось Ox направлена по вектору скорости внешнего невозмущенного потока, ось Oy – по нормали к плоской поверхности; ось Oz – перпендикулярно к осям Ox и Oy ; $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ или $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ – компоненты вектора скорости вдоль координатных осей x, y, z ; t – время, \bar{p} – давление, деленное на плотность; Re – число Рейнольдса, составленное из постоянной скорости набегающего потока U , масштаба длины L , равного размеру вычислительной области в направлении, перпендикулярном стенке (порядка высоты пограничного слоя) и ν – кинематического коэффициента вязкости жидкости; Q_{ij} – тензор истинных подсеточномасштабных напряжений, деленный на плотность; $Q_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Тензор истинных подсеточномасштабных напряжений Q_{ij} требует моделирования. Введем тензор моделируемых подсеточномасштабных напряжений τ_{ij} следующим образом:

$$\tau_{ij} = Q_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} Q_{kk},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; $Q_{kk} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 2\bar{k}$; \bar{k} – обобщенная истинная подсеточномасштабная кинетическая энергия турбулентности.

Уравнения (1) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

где обобщенное давление $P = \bar{p} + \frac{2}{3}\bar{k}$.

В настоящее время наиболее популярна и надежная "смешанная" модель тензора подсеточномасштабных напряжений, состоящая из двух частей – вихревязкостной и масштабоподобной:

$$\tau_{ij} = -2C_V \Delta^2 |\bar{S}_{ij}| \bar{S}_{ij} + C_M (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j). \quad (3)$$

Каждый из коэффициентов C_V, C_M имеет свое одно определенное значение для конкретного вида течения (в данном случае $C_V = 0,0032$ и $C_M = 1,37$); S_{ij} – тензор скоростей деформаций; ширина фильтра Δ равна двойному шагу расчетной сетки.

ОПЕРАЦИЯ ФИЛЬТРОВАНИЯ

Простые течения, такие как однородная турбулентность, могут быть численно смоделированы с периодическими граничными условиями, а Фурье-преобразование в таких течениях допускает использование спектрального "обрезающего" фильтра. Этот спектральный фильтр является идеальным в смысле того, что он точно разделяет сеточномасштабные и подсеточномасштабные вихри. Но в большинстве практических приложений турбулентность не является однородной и, следовательно, требуются фильтры в физической области [9]. Сейчас широко используются гауссовы и top-hat фильтры. Однако в этом случае происходит проникновение результатов фильтрации в подсеточномасштабное движение, которое вовлекает не только доминирующий вклад малых масштабов, но также и малый вклад крупных вихрей. Следовательно, однозначное разделение масштабов не достигается и подсеточная модель должна зависеть от типа фильтра. Установлено в [26–28], что масштабоподобная модель не пригодна при спектрально-обрезающем фильтре. В работе [29] тензор подсеточномасштабного напряжения исследуется с теоретической точки зрения. Выводятся условия реализуемости для компонент этого тензора, которые справедливы тогда и только тогда, когда функция фильтра является "положительной". Спектральный "обрезающий" фильтр – не "положительный". Следовательно, тензор турбулентного напряжения, основанный на спектрально отфильтрованных полях, не удовлетворяет условиям реализуемости, что ведет к отрицательным значениям обобщенной турбулентной кинетической энергии подсеточных масштабов. Положительные фильтры (гауссовы и top-

hat) всегда приводят к положительной обобщенной турбулентной кинетической энергии. Положительность функции фильтра является необходимым и достаточным требованием для того, чтобы обобщенная турбулентная кинетическая энергия подсеточных масштабов была положительной во всех регионах течения [29].

В настоящей работе используется операция фильтрации в физическом пространстве с применением конечно-разностной схемы и "положительного" top-hat фильтра, который сохраняет крупномасштабные (низковолновые) компоненты, а отфильтровывает мелкомасштабные (высоковолновые). Этот фильтр в физическом пространстве, например, в случае однородного направления Ox , имеет следующий вид:

$$G(x_n - x'_n, \Delta) = 1/\Delta, \quad |x_n - x'_n| < \Delta/2;$$

$$G(x_n - x'_n, \Delta) = 0, \quad |x_n - x'_n| \geq \Delta/2.$$

Применение в конечно-разностной форме top-hat фильтра второго порядка точности, например для компоненты скорости, выражается такой зависимостью:

$$\bar{u}_n = u_n/2 + (u_{n-1} + u_{n+1})/4.$$

Операция фильтрации (сглаживания) является частным примером общей проблемы осреднения поля мгновенных величин [3], которая может быть представлена в различных формах, но должна в конечном итоге корректно согласовываться с конкретной начально-краевой задачей.

КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАВЛЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Строгие математические теоремы, касающиеся задания начальных и граничных условий, обеспечивающих существование и единственность решения уравнений Навье-Стокса, в настоящее время отсутствуют. Тем не менее опыт решения систем дифференциальных уравнений в частных производных подсказывает, что при постановке краевой задачи следует учитывать физический смысл проблемы и математические свойства решаемых уравнений. Требование физической обоснованности приводит нас к понятию корректно поставленной краевой задачи.

Для корректной постановки краевой задачи очень существенно знать тип решаемых уравнений в частных производных. К сожалению, наши знания относительно классификации систем дифференциальных уравнений в частных производных весьма ограничены. Даже для уравнений второго порядка при числе независимых переменных

более двух, не всегда возможно представление в простой канонической форме.

В настоящее время не решенной полностью остается очень важная проблема численного задания граничных условий, обеспечивающего устойчивость счета. Проблема возникает из-за введения искусственных границ, необходимых для того, чтобы сделать вычислительную область ограниченной в пространстве, иными словами, привести ее размеры в соответствие с возможностями современных компьютеров. Хорошо известно также, что большинство разностных схем приводит к дискретным уравнениям, требующим задания большего числа граничных условий, чем исходные дифференциальные уравнения в частных производных. Следовательно, на искусственных границах приходится задавать наряду с граничными условиями "дифференциальной" задачи и избыточные граничные условия, обусловленные спецификой разностной аппроксимации.

Даже если алгоритм расчета во внутренних узлах устойчив и обеспечивает необходимую точность, неудачное задание условий (тех или других) на искусственных границах может привести к неустойчивости и снижению точности. Таким образом, корректное задание граничных условий на искусственных границах в численных методах имеет решающее значение.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Уравнения (2) дискретизируются на прямоугольной расчетной сетке с шагом $\bar{\Delta}$ по всем трем координатам. Пределы изменения координат в исследуемой вычислительной безразмерной области следующие: $D = \{x_1 \leq x \leq x_k; h \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq z_k\}$. Конечно-разностная сетка имеет следующий вид:

$$x_n = x_1 + (n-1)\bar{\Delta}, \quad n = \overline{1, N};$$

$$y_l = h + (l-1)\bar{\Delta}, \quad l = \overline{1, L_*};$$

$$z_m = (m-1)\bar{\Delta}, \quad m = \overline{1, M},$$

где $x_1 = 45$ (при $Re = 10^5$); $x_k = x_1 + 10(1-h)$; $z_k = 1-h$; $\bar{\Delta} = (1-h)/(L_*-1)$; $N = 501$; $L_* = M = 51$; h – средняя высота неровностей плоской поверхности. На основе исследований [9] установлено, что для LES оптимальное безразмерное значение шага расчетной сетки составляет порядка $Re^{-3/8}$. При этом граница раздела на крупно- и подсеточномасштабные компоненты находится в довольно широком инерционном интервале ближе к более крупным вихрям, чем к

интервалу масштабов Колмогорова. Такой выбор величины шага сетки обеспечивает значительные преимущества LES-технологии по экономии ресурсов компьютера в сравнении с применением DNS-методов.

Производные аппроксимируются центральными конечными разностями с точностью $(\bar{\Delta})^2$, за исключением конвективных производных. Для предания устойчивости численной схеме конвективные производные имеют следующий вид:

$$\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} \sim (u_n + |u_n|) \frac{u_n - u_{n-1}}{2\bar{\Delta}} + (u_n - |u_n|) \frac{u_{n+1} - u_n}{2\bar{\Delta}}.$$

Эта процедура устраняет дестабилизирующее действие схемной вязкости при ее отрицательных значениях.

К дискретизированным уравнениям Навье-Стокса применяется метод покоординатного расщепления и экономичная неявная абсолютно устойчивая конечно-разностная схема. После преобразований получаем системы линейных алгебраических уравнений, которые решаются методом прогонки. Такая методика решения при соответствующем представлении коэффициентов в методе прогонки [12] обеспечивает приемлемо малое значение численной диффузии.

Для определения обобщенного давления P используется уравнение Пуассона, которое решается итерационным методом последовательной верхней релаксации. Граничные условия определяются на каждой грани вычислительной области в виде краевых условий Неймана для $\partial P / \partial x_i$ с использованием конечно-разностных аналогов сглаженных уравнений Навье-Стокса, что в результате обеспечивает корректную взаимосвязь между полем скоростей, давлением и подсеточно-масштабным напряжением.

Уравнения (2)–(3) вместе с начальными и граничными условиями образуют замкнутую нелинейную начально-краевую задачу относительно неизвестных \bar{u}_i, P, τ_{ij} . Стратегия вычислительного алгоритма для задачи (2)–(3) заключается в следующем. На каждом шаге по времени последовательно решаются уравнение Пуассона для давления и уравнения движения. В данной модели турбулентного пограничного слоя в режиме развитой шероховатости рассматривается задача, которая при фиксированных условиях на границах решается до выхода на установившийся режим при необходимом количестве шагов по времени.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Дифференциальные уравнения Навье-Стокса в частных производных в данном случае относятся к "эллиптическому" типу, согласно [9]. Число независимых граничных условий однозначно определяется рангом матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений в частных производных и числом отрицательных собственных значений (равных числу отрицательных элементов в диагонализованной матрице). Но на этот процесс влияют дополнительные граничные условия численного метода.

Граничное условие "нескольжения" ("прилипания") не может быть использовано на плоской шероховатой поверхности в LES-технологии, потому что сеточный интервал $\bar{\Delta}$ является намного большим, чем высота вязкого подслоя в турбулентном пограничном слое при $Re = 10^5$ в режиме развитой шероховатости. На первом расчетном уровне при $y = h$ среднее течение должно подчиняться логарифмическому "закону стенки". Следовательно, подробное актуальное течение подчиняется этому закону только в среднем:

$$1) y = h; 0 \leq z \leq z_k; x_1 \leq x \leq x_k :$$

$$\bar{u} = \bar{U}_c + \bar{u}_p; \quad \bar{v} = \bar{v}_p; \quad \bar{w} = \bar{w}_p;$$

$$2) y = 1; 0 \leq z \leq z_k; x_1 \leq x \leq x_k :$$

$$\bar{u} = \bar{U}_c + \bar{u}_p; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = 0.$$

$$3)-4) z = 0; z = z_k; h \leq y \leq 1; x_1 \leq x \leq x_k :$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0.$$

$$5) \text{ условие на входе в расчетную область } x = x_1; 0 \leq z \leq z_k; h \leq y \leq 1 :$$

$$\bar{u} = \bar{U}_c + \bar{u}_p; \quad \bar{v} = \bar{v}_p; \quad \bar{w} = \bar{w}_p;$$

6) на выходе из расчетной области ($x = x_k; 0 \leq z \leq z_k; h \leq y \leq 1$) используется "конвективное" граничное условие, которое позволяет распространяющимся вихрям покидать вычислительную область с минимальными искажениями. Это граничное условие в настоящее время считается самым эффективным для LES-технологии [16, 24]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u_c \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_c \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + w_c \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0.$$

Величина средней скорости течения в турбулентном пограничном слое определяется следующим образом [8]:

$$U_c = \frac{u_*}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{y-d}{y_0} \right) + \Pi \left[1 - \cos \left(\frac{\pi[y-d]}{\delta-d} \right) \right] \right),$$

где u_* – динамическая скорость; y_0 – параметр песочной шероховатости, κ – постоянная Кармана ($\kappa = 0.4$); $\Pi = 0.55$. На основе принятого допущения о том, что течение находится в режиме развитой шероховатости расчеты проводятся от уровня $y = h$. Выполняется также условие $Re_h = hLu_*U/\nu \geq 100$, где Re_h – число Рейнольдса по шероховатости. Поэтому в данной модели принято $y_0 = 1/30h$, $d = 2h/3$, что согласуется с [3]. Средняя высота неровностей плоской поверхности h в безразмерном виде определяется так:

$$h = [Re_h / (0,0835Re)]^{14/15} x_1^{1/15},$$

где Re и Re_h – входные параметры задачи.

Динамическая скорость вычисляется по эмпирической формуле [4]:

$$u_* = 0,0835(x/h)^{-1/14}.$$

Условная высота турбулентного пограничного слоя δ равна такому значению координаты y , в которой $U_c = 0.995$:

$$\delta = d + y_0 \exp(0,995\kappa/u_* - 1.1).$$

В данном случае турбулентный пограничный слой близок в среднем к сдвиговому плоскопараллельному течению вдоль плоской стенки (с однородными для скорости направлениями вдоль оси Ox и Oz). Поэтому пульсации компонент скорости можно моделировать следующим образом:

$$\begin{aligned} u_p &= a_1 \sum_{j=1}^J \sin\left(\frac{4\pi x}{j\bar{\Delta}}\right) \sum_{m=1}^J \sin\left(\frac{4\pi z}{m\bar{\Delta}}\right); \\ v_p &= -a_2 \sum_{j=1}^J \sin\left(\frac{4\pi x}{j\bar{\Delta}}\right) \sum_{m=1}^J \sin\left(\frac{4\pi z}{m\bar{\Delta}}\right); \\ w_p &= a_3 \sum_{j=1}^J \sin\left(\frac{4\pi x}{j\bar{\Delta}}\right) \sum_{m=1}^J \sin\left(\frac{4\pi z}{m\bar{\Delta}}\right), \end{aligned}$$

где $J = 100$ (определено на основе предварительных численных расчетов).

В принципе, a_1 , a_2 и a_3 определяются из эксперимента. В данной работе они аппроксимируются следующими зависимостями:

$$a_1 = a_{u1}f_1u_*; \quad a_2 = a_{v2}f_2u_*; \quad a_3 = a_{w3}f_3u_*.$$

Функции $f_1(y)$, $f_2(y)$ и $f_3(y)$ определены на основе экспериментальных данных [30].

Параметры a_{u1} , a_{u2} и a_{u3} находятся предварительным численным расчетом для $y = h$ при соблюдении следующих условий:

$$\overline{\left\langle \frac{u'' u''}{u_*^2} \right\rangle} = a_{01}; \quad \overline{\left\langle \frac{v'' v''}{u_*^2} \right\rangle} = a_{02}; \quad \overline{\left\langle \frac{w'' w''}{u_*^2} \right\rangle} = a_{03}.$$

Величины a_{01} , a_{02} и a_{03} определены с использованием экспериментальных данных [30].

Операция фильтрации (сглаживания) " \bar{u} " производится по однородным направлениям Ox и Oz ; $\langle u \rangle$ – операция осреднения по плоскости Oxz в смысле среднего арифметического значения.

Параметры u_c , v_c и w_c из конвективного граничного условия определяются при использовании конечно-разностной схемы решения. Уравнение конвективного граничного условия дискретизируется так:

$$\frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\Delta t} + u_c \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{\Delta} = 0.$$

Величина u_c определяется в численной схеме следующим образом:

$$u_c = -\frac{\bar{\Delta}}{\Delta t} \frac{u_N^{k-1} - u_N^{k-2}}{u_N^{k-2} - u_{N-1}^{k-2}}.$$

Аналогично получаем для v_c и w_c .

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ.

Принятые допущения решаемой задачи и опыт численных исследований [9,12] позволяют взять начальные условия как структуру поля скорости, которая возникает из предварительного пробного интегрирования поставленной задачи в конечно-разностной форме, для чего используются и обобщаются на всю вычислительную область зависимости, описанные выше для граничных условий.

ПОДСЕТОЧНОМАСШТАБНЫЙ ВКЛАД В ТУРБУЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим общий случай взаимосвязи экспериментально измеренных турбулентных напряжений F_{ij} и вычисленных R_{ij} по LES-технологии. Представим флуктуирующую во времени скорость в следующей форме:

$$u_i'' = u_i - \langle u_i \rangle. \quad (4)$$

В свою очередь, подсеточномасштабная скорость имеет такое представление:

$$u_i' = u_i - \bar{u}_i. \quad (5)$$

Пространственно отфильтрованная переменная обозначена " \bar{u}_i ", а осредненная по времени – $\langle u_i \rangle$. Поэтому экспериментально измеренные турбулентные напряжения F_{ij} и вычисленные R_{ij} приобретают следующий вид:

$$F_{ij} = \langle u_i'' u_j'' \rangle; \quad (6)$$

$$R_{ij} = \langle \bar{u}_i'' \bar{u}_j'' \rangle. \quad (7)$$

Подставляем выражение (4) в (6) и имеем:

$$F_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle, \quad (8)$$

так как $\langle u_i \langle u_j \rangle \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle$. Аналогично получаем:

$$R_{ij} = \langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle - \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle. \quad (9)$$

Подставляем выражение (5) в (8) и имеем:

$$F_{ij} = \langle (\bar{u}_i + u_i') (\bar{u}_j + u_j') \rangle - \langle \bar{u}_i + u_i' \rangle \langle \bar{u}_j + u_j' \rangle$$

или

$$F_{ij} = R_{ij} + A_{ij}, \quad (10)$$

где

$$A_{ij} = \langle \bar{u}_i u_j' \rangle + \langle \bar{u}_j u_i' \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle - \langle \bar{u}_i \rangle \langle u_j' \rangle - \langle \bar{u}_j \rangle \langle u_i' \rangle - \langle u_i' \rangle \langle u_j' \rangle. \quad (11)$$

Далее мы полагаем, что длинновременное осреднение подсеточномасштабной скорости мало настолько, что

$$\langle u_i' \rangle \simeq 0. \quad (12)$$

Поэтому мы можем пренебречь тремя членами в правой части выражения (11):

$$A_{ij} \simeq \langle \bar{u}_i u_j' \rangle + \langle \bar{u}_j u_i' \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle. \quad (13)$$

Установим связь между A_{ij} и подсеточномасштабным напряжением τ_{ij} . Осреднение τ_{ij} по времени дает:

$$\langle \tau_{ij} \rangle = \langle \overline{u_i u_j} \rangle - \langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle. \quad (14)$$

Подставляя выражение (5) в (14), получаем:

$$\langle \tau_{ij} \rangle = \langle \overline{(\bar{u}_i + u_i') (\bar{u}_j + u_j')} \rangle - \langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle. \quad (15)$$

Предполагая, что операция пространственного фильтрования и осреднения по времени меняется местами, после преобразований имеем:

$$\langle \tau_{ij} \rangle = \langle \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle + \langle \overline{\bar{u}_i u_j'} \rangle + \langle \overline{\bar{u}_j u_i'} \rangle + \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle. \quad (16)$$

Сравнение выражений (13) и (15) дает:

$$\bar{A}_{ij} \simeq \langle \tau_{ij} \rangle - \langle L_{ij} \rangle, \quad (17)$$

где L_{ij} – Леонардово напряжение,

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j.$$

Применяя фильтрование к выражению (10) и подставляя (16) в (10), получаем:

$$\bar{F}_{ij} \simeq \bar{R}_{ij} + \langle \tau_{ij} \rangle - \langle L_{ij} \rangle. \quad (18)$$

Хотя соотношение (18) только связывает пространственно отфильтрованные величины F_{ij} и R_{ij} , это обеспечивает приближенное определение подсеточномасштабного вклада в турбулентные напряжения. Отметим, что пространственное осреднение Леонардова напряжения стремится к нулю. Таким образом, в случаях, когда существует однородное направление, осреднение уравнения (18) в этом направлении должно исключать действие Леонардова напряжения.

Используя правую сторону соотношения (18), мы можем определить полные турбулентные напряжения на основе вычислений по LES-технологии и сравнить с экспериментально измеренными турбулентными напряжениями F_{ij} . Таким образом устанавливается адекватность и точность получаемых LES-результатов.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

На основе разработанного численного алгоритма автором проведен расчет по моделированию турбулентного пограничного слоя для случая $Re=10^5$ и $Re_h=100$. В исследовании использовался компьютер PENTIUM-IV с тактовой частотой 1.6 ГГц и оперативной памятью 512 МБ. Для выхода на установившийся режим произведено $K=500$ шагов по времени ($\Delta t = 0.005$). В процессе численных расчетов по неявной схеме для достижения требуемой точности соблюдается критерий численной устойчивости явной схемы по времени в форме условия Куранта для трехмерного случая в виде $\Delta t \leq \bar{\Delta}/3$. Следовательно, при долговременном осреднении по промежутку времени $T_c = K \Delta t$ достигается статистически стационарная средняя скорость турбулентного течения. Поскольку в данной работе рассматривается установившееся турбулентное течение в пограничном слое, операцию длинновременного осреднения можно свести, согласно [3], к операции осреднения по однородным направлениям Ox и Oz .

На рис. 1–5 представлены изменения основных осредненных безразмерных характеристик турбулентного пограничного слоя вдоль безразмерной координаты $Y = (y - h)/\delta$.

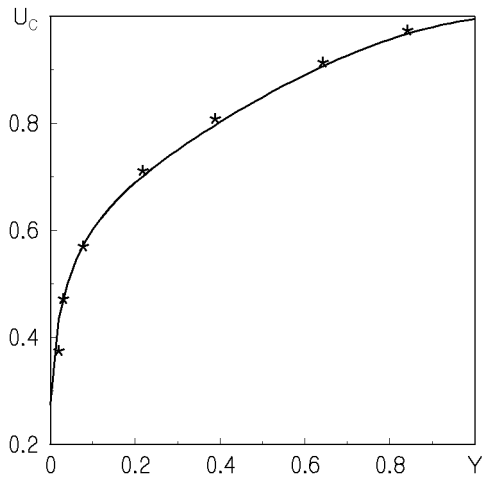


Рис. 1. Зависимость безразмерной средней скорости $\langle \bar{U}_c \rangle$ от Y : сплошная линия – расчетная кривая; * – экспериментальные данные [30]

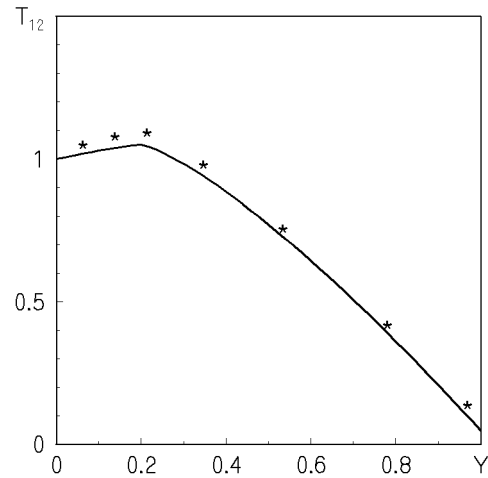


Рис. 3. Изменение полного сдвигового турбулентного напряжения T_{12} вдоль Y : сплошная – расчетные данные; * – экспериментальные данные [30]

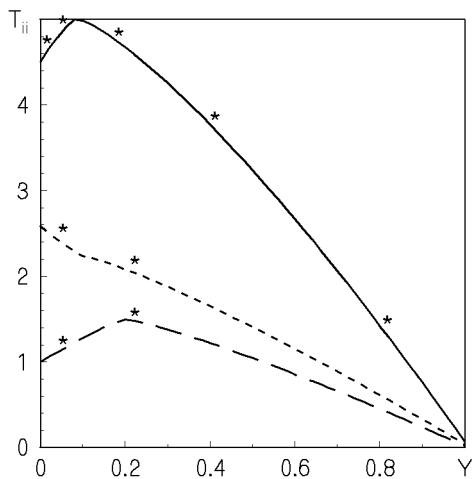


Рис. 2. Зависимость полных турбулентных напряжений T_{ij} от Y : расчетные кривые – T_{11} – сплошная; T_{22} – — — — T_{33} – - - - ; * – экспериментальные данные [30]

На рис. 1 дана зависимость безразмерной средней скорости $\langle \bar{U}_c \rangle$ от Y и экспериментальные данные [30]. При сопоставлении результатов видно, что разработанная модель довольно точно описывает изменение средней скорости течения поперек турбулентного пограничного слоя.

На рис. 2 приведены зависимости полных турбулентных напряжений $T_{ij} = \langle \overline{u_i u_j} \rangle / u_*^2$ от Y и экспериментальные данные [30]. Из сравнения расчетных и экспериментальных данных видно, что они хорошо согласуются.

На рис. 3 показано изменение полного сдвигового турбулентного напряжения $T_{12} = -\langle \overline{u'' v''} \rangle / u_*^2$

вдоль Y и экспериментальные результаты [30]. Расчетные и экспериментальные данные хорошо коррелируют.

На рис. 4 приведены зависимости разрешаемых по LES турбулентных напряжений $\bar{T}_{ii} = \langle \overline{u_i u_i} \rangle / u_*^2$ от Y . На основе численных расчетов определено, что $\langle \tau_{ij} \rangle / u_*^2 \simeq 0,15 T_{ij}$, иными словами, вклад подсеточно-масштабных напряжений в полные турбулентные напряжения составляет около 15 процентов для выбранного типа фильтра и конечно-разностной схемы.

На рис. 5 показано изменение безразмерной кинетической энергии турбулентности E вдоль безразмерной координаты Y и экспериментальные данные [30], где

$$E = \langle \overline{u'' u''} \rangle / u_*^2 + \langle \overline{v'' v''} \rangle / u_*^2 + \langle \overline{w'' w''} \rangle / u_*^2.$$

Анализ результатов расчета качественно и количественно подтверждает характер поведения кинетической энергии турбулентности и одну из основных причин ее существования – наличие шероховатой поверхности, но при определенных значениях Re_h . В данной модели $Re_h = 100$. Поэтому значение кинетической энергии турбулентности максимально вблизи вершин шероховатостей и стремится к нулю на верхней границе турбулентного пограничного слоя.

В силу принятых допущений (12), (13) значения экспериментальных данных закономерно незначительно больше, чем вычисленные (рис. 2, 3, 5).

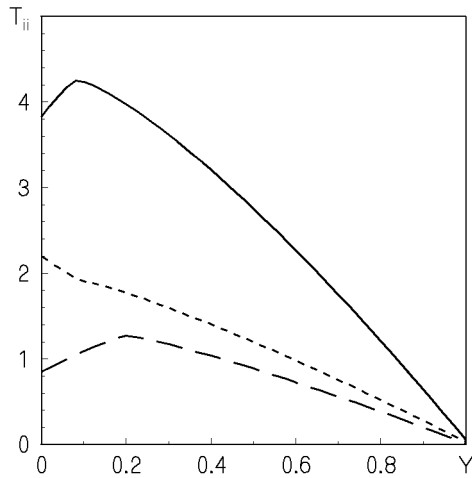


Рис. 4. Зависимость разрешаемых турбулентных напряжений T_{ii} от Y ; расчетные данные – T_{11} – сплошная кривая; T_{22} – — — ; T_{33} – - - - ; * – экспериментальные данные [30]

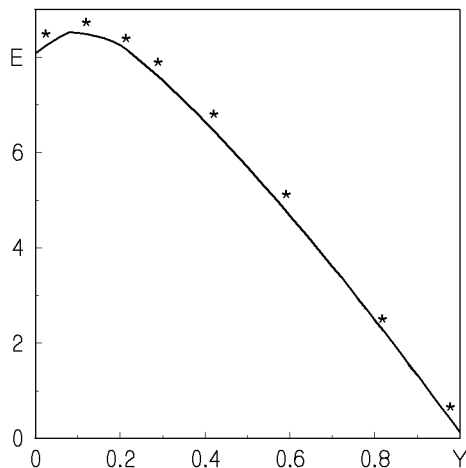


Рис. 5. Зависимость кинетической энергии турбулентности E от Y : сплошная – расчетная кривая; * – экспериментальные данные [30]

ВЫВОДЫ

1. Создана численная трехмерная модель турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости при высоком числе Рейнольдса на основе LES-технологии: применение операции фильтрования к уравнениям Навье-Стокса и моделирование тензора подсеточномасштабных напряжений в физическом пространстве с последующим приложением к конечно-разностной схеме. К новизне можно отнести попытку введения автором приемлемой специализированной русскоязычной терминологии для описания LES-технологии на основе об-

щепринятой англоязычной и представления данной статьи на русском языке на фоне кратких сообщений в отечественной научной литературе.

2. Разработан численный алгоритм решения замкнутой трехмерной нелинейной начально-краевой задачи определения основных характеристик течения в режиме установления. Создана неявная конечно-разностная схема со специальным видом конвективных членов, которая обеспечивает устойчивость численного расчета. Используется корректное задание граничных условий для уравнения Пуассона, исходя из "сглаженных" уравнений Навье-Стокса на границе. Это обеспечивает требуемую точность получаемых результатов.

3. Созданная численная трехмерная безразмерная модель турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости в режиме развитой шероховатости при высоком числе Рейнольдса содержит два параметра подобия: число Рейнольдса течения в заданной расчетной области Re и число Рейнольдса по шероховатости Re_h . Модель подсеточномасштабных напряжений содержит две константы C_V и C_M . Характеристики течения для конкретного выбранного случая полностью определяются параметрами общей модели Re , Re_h , C_V и C_M при заданных граничных условиях.

4. Впервые проведен расчет течения в турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости в режиме развитой шероховатости для случая $Re = 10^5$ и $Re_h = 100$ на основе LES-технологии. Получены численные значения осредненной скорости, полных и подсеточномасштабных турбулентных напряжений и кинетической энергии турбулентности. Сравнение наших численных результатов с экспериментальными данными другого автора показало хорошую согласованность. Новизной настоящей работы является то, что определение адекватных экспериментальным данным характеристик течения связано с комплексным учетом взаимодействия конечно-разностного способа решения сглаженных уравнений Навье-Стокса, соответствующего уравнения Пуассона, подсеточномасштабной модели, операции фильтрования и выбора граничных условий. Вклад подсеточномасштабных напряжений в полные турбулентные напряжения составляет 15 процентов при заданных расчетных характеристиках модели.

5. Целесообразность использования технологии моделирования крупных вихрей LES (Large Eddy Simulation) по сравнению с прямым методом численного моделирования DNS (Direct Numerical Simulation) для течений с высокими числами Рейнольдса определяется необходимой величиной ша-

гов расчетной сетки LES и DNS. Для LES безразмерный шаг сетки составляет порядка $Re^{-3/8}$, а для DNS — $Re^{-3/4}$. В практике численных расчетов на основе DNS так или иначе применяются сглаживающие (фильтрующие) процедуры для достижения устойчивости счета, но такой подход не входит корректно в идеологию прямого численного моделирования для всех масштабов течения. К тому же, такое громадное количество расчетных точек ведет к значительному росту численной диффузии. Поэтому на современном этапе развития компьютерной техники использование прямого метода численного моделирования DNS для турбулентного пограничного слоя при $Re = 10^5$ невозможно. Технология моделирования крупных вихрей LES разрешает явно только крупные масштабы течения, следовательно, объем вычислений и вклад численной диффузии резко уменьшаются в случае такого большого числа Рейнольдса при корректном учете взаимосвязи подсеточного моделирования, метода решения, выбранных граничных условий и явно задаваемых фильтрующих процедур, органично входящих в LES. Такая LES-технология является пока единственной возможностью численного определения мгновенных трехмерных полей гидродинамических характеристик данного класса задач.

- Хинне И.О. Турбулентность.— М.: Физматгиз, 1963.— 680 с.
- Ламли Д.Л., Пановский Г.А. Структура атмосферной турбулентности.— М.: Мир, 1966.— 264 с.
- Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.1.— С.-П.: Гидрометеоиздат, 1992.— 694 с.
- Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1987.— 840 с.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Инлит, 1956.— 528 с.
- Новожилов В.В. Теория плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.— Л.: Судостроение, 1977.— 167 с.
- Романенко П.Н. Гидродинамика и теплообмен в пограничном слое. Справочник.— М.: Энергия, 1974.— 464 с.
- Себиси Е., Бредшоу П. Конвективный теплообмен.— М.: Мир, 1987.— 590 с.
- Методы расчета турбулентных течений: Пер. с англ./ Под ред. В.Кольмана.— М.: Мир, 1984.— 464 с.
- Воропаев Г.А., Птуха Ю.А. Моделирование турбулентных сложных течений.— К.: Наук. думка, 1991.— 166 с.
- Марвин Д.Г. Моделирование турбулентности для вычислительной аэродинамики // Аэрокосмическая техника.— 1984.— 2, N3.— С. 21–41.
- Андерсон Д., Танненхил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 2.— М.: Мир, 1990.— 726 с.
- Spalart P.R. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta=1410$ // J. Fluid Mech.— 1988.— v. 187.— P. 61–98.
- Spalart P.R., Watmuff J.H. Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients // J. Fluid Mech.— 1993.— v. 249.— P. 337–371.
- Kong H., Choi H., Lee J. Direct numerical simulation of turbulent thermal boundary layers // Phys. Fluids.— 2000.— v. 12, N 10.— P. 2555–2568.
- Orellano A., Wengle H. Numerical simulation (DNS and LES) of manipulated turbulent boundary layer flow over a surface-mounted fence // Eur. J. Mech. B/Fluids.— 2000.— v. 19, N 5.— P. 765–788.
- Минайлос А.Н. Точность численных решений уравнений Навье-Стокса // Ж. вычисл. матем. и мат. физ.(Россия).— 1998.— Т. 38, N7.— С. 1220–1232.
- Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, сер. физ.— 1942.— Т. 6, N1–2.— С. 56–58.
- Smagorinsky J. General circulation experiments with primitive equation // Mon. Wether.— 1963.— v.91.— P. 99–105.
- Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // Phys. Fluids A.— 1991.— v. 3, N 7.— P. 1760–1765.
- Bardina J., Ferziger J., Reynolds W. Improved turbulence models based on LES of homogeneous incompressible turbulent flows // Department of Mechanical Engineering Report, Stanford.— 1984.— No. TF-19.— P. 1.
- Horiuti K. The role of the Bardina model in large eddy simulation of turbulent channel flow // Phys. Fluids A.— 1989.— v. 1, N2.— P. 426–428.
- Sarghini F., Piomelli U., Balaras F. Scale-similar models for large-eddy simulations // Phys. Fluids.— 1999.— v. 11, N6.— P. 1596–1607.
- Zang Y., Street R., Koseff J. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows // Phys. Fluids A.— 1993.— v. 5, N 12.— P. 3186–3196.
- Vreman B., Geurts B., Kuerten H. On the formulation of the dynamic subgrid-scale model // Phys. Fluids.— 1994.— v. 6, N 12.— P. 4057–4059.
- Piomelli U., Moin P., Ferziger J. Model consistency in large eddy simulation of turbulent channel flows // Phys. Fluids.— 1988.— v. 31, N 7.— P. 1884–1891.
- Piomelli U., Cabot W., Moin P., Lee S. Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flows // Phys. Fluids.— 1991.— v. 3, N 7.— P. 1766–1771.
- Piomelli U. High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model // Phys. Fluids A.— 1993.— v. 5, N 6.— P. 1484–1490.
- Vreman B., Geurts B., Kuerten H. Realizability conditions for the turbulent stress tensor in large-eddy simulation // J. Fluid. Mech.— 1994.— v. 278.— P. 351–362.
- Ligrani P., Moffat R. Structure of transitionally rough and fully rough turbulent boundary layers // J. Fluid. Mech.— 1986.— v. 162.— P. 69–98.