УДК 621.391:517.518:510.52

О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер

Наближене обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Пропонуються та досліджуються кубатурні формули обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерфлетації на класі функцій, у яких $|f^{(r,0,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,r,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,0,r)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(r,r,r)}(x,y,z)| \leqslant \tilde{M}$, $r = 1, 2$. *Інформацію про функцію задано слідами на системі взаємоперпендикулярних площин. Доводиться, що оцінку похибки кубатурної формули можна виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.*

На даний час методи комп'ютерної томографії є найбільш ефективними методами дослідження внутрішньої структури тривимірного тіла без його руйнування. При розв'язанні задачі тривимірної комп'ютерної томографії використовується метод, який узагальнює прямий метод Фур'є з двовимірного на тривимірний випадок. В цьому методі шукана функція від трьох змінних наводиться у вигляді ряду Фур'є. Вибір методу при розв'язанні задачі наближеного обчислення коефіцієнтів цього ряду пояснюється видом задання початкових даних. У випадку, коли дані — це сліди функції на площинах, для наближеного обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є будуються кубатурні формули з використанням інтерфлетації функцій [1].

В [2, 3] викладений загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного і дискретного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій у випадку, коли задані значення функції у вузлах. Випадок, коли дані — це сліди функції на площинах, розглядається вперше. Показано, що оцінку похибки кубатурної формули можна виразити через відповідні похибки квадратурних формул.

Отже, метою даної работи є: 1) побудова кубатурних формул для обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерфлетації функцій на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G = [0,1]^3$:

$$|f^{(r,0,0)}(x,y,z)| \leqslant M, \qquad |f^{(0,r,0)}(x,y,z)| \leqslant M, \qquad |f^{(0,0,r)}(x,y,z)| \leqslant M,$$
$$|f^{(r,r,r)}(x,y,z)| \leqslant \widetilde{M}, \qquad r = 1, 2,$$

у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на площинах $x_k = k\Delta$, $y_j = j\Delta$, $z_s = s\Delta$, $k, j, s = \overline{0,\ell}$, $\Delta = 1/\ell$; 2) показати, що оцінку похибки побудованих кубатурних формул можна виразити через відповідні похибки квадратурних формул. Для досягнення цієї мети доводяться допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $g(x) \in C[0,1]$, $|g'(x)| \leqslant M$. Для функції однієї змінної справедлива нерівність:*

$$\left|\sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - S_k g(x)) \sin 2\pi m x dx\right| \leqslant M\frac{\Delta}{3},$$

де

$$S_k g(x) = g(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{-\Delta} - g(x_{k+1})\frac{x - x_k}{\Delta}, \qquad x \in [x_k, x_{k+1}], \qquad x_k = k\Delta, \qquad \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

Лема 2. *Нехай $g(x) \in C^2[0,1]$, $|g''(x)| \leqslant M$. Для функції однієї змінної справедлива нерівність:*

$$\left|\sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - S_k g(x)) \sin 2\pi m x dx\right| \leqslant M\frac{\Delta^2}{12},$$

де $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $x_k = k\Delta$, $\Delta = 1/\ell$.

Нехай $p_k(x)$, $p_j(y)$, $p_s(z)$ — базисні сплайни порядку 0,1,2,3 з властивостями

$$p_k(x_\alpha) = \delta_{\alpha k}, \qquad p_j(y_\beta) = \delta_{\beta j}, \qquad p_s(z_\gamma) = \delta_{\gamma s}, \qquad \alpha, \beta, \gamma = \overline{0, \ell}.$$

Розглянемо оператори

$$O_1 f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y, z) p_k(x), \qquad O_2 f(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j, z) p_j(y),$$

$$O_3 f(x,y,z) = \sum_{s=0}^{\ell} f(x, y, z_s) p_s(z), \qquad k, j, s \in \overline{0, \ell}.$$

Оператор сплайн-інтерфлетант $Of(x,y,z)$ виражається через оператори $O_\mu f(x,y,z)$, $\mu = 1,2,3$, таким чином:

$$Of(x,y,z) = O_1 f(x,y,z) + O_2 f(x,y,z) + O_3 f(x,y,z) - \\ - O_1 O_2 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z).$$

Лема 3. *Для залишку $R(f)$ справедлива рівність*

$$R(f) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (f(x,y,z) - Of(x,y,z)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy \sin 2\pi p z dz = \\ = \widetilde{R}_1 \widetilde{R}_2 \widetilde{R}_3 f(x,y,z),$$

$$\widetilde{R}_1(f; y, z) = \int_0^1 (f(x,y,z) - O_1 f(x,y,z)) \sin 2\pi m x dx,$$

$$\widetilde{R}_2(f;x,z) = \int\limits_0^1 (f(x,y,z) - O_2 f(x,y,z)) \sin 2\pi n y dy,$$

$$\widetilde{R}_3(f;x,y) = \int\limits_0^1 (f(x,y,z) - O_3 f(x,y,z)) \sin 2\pi p z dz.$$

Далі як $p_k(x)$, $p_j(y)$, $p_s(z)$ будемо розглядати лінійні базисні сплайни. Введемо позначення

$$h_{10}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{-\Delta}, & x_0 \leqslant x < x_1, \\ 0, & x \geqslant x_1, \end{cases} \qquad h_{20}(y) = \begin{cases} \dfrac{y - y_1}{-\Delta}, & y_0 \leqslant y < y_1, \\ 0, & y \geqslant y_1, \end{cases}$$

$$h_{30}(z) = \begin{cases} \dfrac{z - z_1}{-\Delta}, & z_0 \leqslant z < z_1, \\ 0, & z \geqslant z_1, \end{cases}$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{k-1}, \\ \dfrac{x - x_{k-1}}{\Delta}, & x_{k-1} < x < x_k, \\ \dfrac{x - x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k \leqslant x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geqslant x_{k+1}, \end{cases} \qquad k = \overline{1, \ell - 1};$$

$$h_{2j}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant y_{j-1}, \\ \dfrac{y - y_{j-1}}{\Delta}, & y_{j-1} < y < y_j, \\ \dfrac{y - y_{j+1}}{-\Delta}, & y_j \leqslant y < y_{j+1}, \\ 0, & y \geqslant y_{j+1}, \end{cases} \qquad j = \overline{1, \ell - 1};$$

$$h_{3s}(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant z_{s-1}, \\ \dfrac{z - z_{s-1}}{\Delta}, & z_{s-1} < z < z_s, \\ \dfrac{z - z_{s+1}}{-\Delta}, & z_s \leqslant z < z_{s+1}, \\ 0, & z \geqslant z_{s+1}, \end{cases} \qquad s = \overline{1, \ell - 1};$$

$$h_{1\ell}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{\ell-1}, \\ \dfrac{x - x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1} < x < x_\ell, \end{cases} \qquad h_{2\ell}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant y_{\ell-1}, \\ \dfrac{y - y_\ell}{\Delta}, & y_{\ell-1} < y < y_\ell, \end{cases}$$

$$h_{3\ell}(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant z_{\ell-1}, \\ \dfrac{z - z_\ell}{\Delta}, & z_{\ell-1} < z < z_\ell, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta, \qquad y_j = j\Delta, \qquad z_s = s\Delta, \qquad \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

Нехай $Of(x,y,z)$ — оператор сплайн-інтерфлетант

$$Of(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\ell} f(x_k,y,z)h_{1k}(x)+\sum_{j=0}^{\ell} f(x,y_j,z)h_{2j}(y)+\sum_{s=0}^{\ell} f(x,y,z_s)h_{3s}(z)-$$

$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} f(x_k,y_j,z)h_{1k}(x)h_{2j}(y)-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell} f(x_k,y,z_s)h_{1k}(x)h_{3s}(z)-$$

$$-\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell} f(x,y_j,z_s)h_{2j}(y)h_{3s}(z)+\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell} f(x_k,y_j,z_s)h_{1k}(x)h_{2j}(y)h_{3s}(z).$$

Лема 4 [1]. *Для $Of(x,y,z)$ виконуються такі властивості:*

1) $|f(x,y,z)-Of(x,y,z)|=O\left(\dfrac{1}{\ell^{3r}}\right)=O(\Delta^{3r}),\quad \forall\,(x,y,z)\in G=[0,1]^3,\quad r=1,2;$

2) $Of(x_k,y,z)=f(x_k,y,z),\quad Of(x,y_j,z)=f(x,y_j,z),$

$Of(x,y,z_s)=f(x,y,z_s),\qquad k,j,s=\overline{0,\ell}.$

Для обчислення інтегралів

$$I_1^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$\Phi_2^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$\Phi_3^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz.$$

Теорема. *Для кубатурної формули $\Phi_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива така оцінка при $r=1,2$:*

$$|R(f)|\leqslant\frac{8\widetilde{M}}{[(r+2)!]^3}\Delta^{3r}=\frac{8\widetilde{M}}{[(r+2)!]^3}\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Тобто при $r = 1$, $|\widetilde{R}_1| \leqslant M\Delta/3$ *(лема 1), а за лемою 3 маємо*

$$|R(f)| \leqslant \widetilde{M}\frac{\Delta^3}{3^3} = \frac{\widetilde{M}}{27\ell^3},$$

при $r = 2$, $|\widetilde{R}_1| \leqslant M\Delta^2/12$ *(лема 2) і за лемою 3*

$$|R(f)| \leqslant \widetilde{M}\frac{\Delta^6}{12^3} = \frac{\widetilde{M}}{1728\ell^6}.$$

Наведемо результати чисельного експерименту. Розглянемо функцію

$$f(x,y,z) = \frac{1}{4}(\sin(2x+2y-2z) + \sin(2x+2z-2y) + \sin(2z+2y-2x) -$$
$$- \sin(2x+2y+2z)),$$

у якої

$$|f^{(1,0,0)}(x,y,z)| \leqslant 2, \quad |f^{(0,1,0)}(x,y,z)| \leqslant 2, \quad |f^{(0,0,1)}(x,y,z)| \leqslant 2, \quad |f^{(1,1,1)}(x,y,z)| \leqslant 8.$$

Обчислюючи інтеграл $I_1^3(1,2,3)$ за кубатурою формулою $\Phi_1^3(1,2,3)$ при $\ell = 19$, маємо

$$|R(f)| = |I_1^3(1,2,3) - \Phi_1^3(1,2,3)| = |-0{,}000583286650235 + 0{,}000583286649765| =$$
$$= 4{,}7 \cdot 10^{-13}.$$

Функцію $f(x,y,z)$ можна подати у вигляді

$$f(x,y,z) = \sin 2x \sin 2y \sin 2z,$$

тому якщо взяти за $g(u) = \sin 2u$, $u = x,y,z$, то можна при $\ell = 19$ отримати такі результати обчислень для

$$\widetilde{R}_i(g,u,s) = \left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int\limits_{u_k}^{u_{k+1}}(g(u) - S_k g(u))\sin 2\pi s u du\right|, \qquad i = 1,2,3,$$

тобто

$$\widetilde{R}_1(g,x,1) = 0{,}000148883597615, \qquad \widetilde{R}_2(g,y,2) = 0{,}000069018217309,$$
$$\tilde{R}_3(g,z,3) = 0{,}00004578277933.$$

Отже,

$$|R(f)| = |I_1^3(1,2,3) - \Phi_1^3(1,2,3)| = \widetilde{R}_1(g,x,1)\widetilde{R}_2(g,y,2)\widetilde{R}_3(g,z,3) =$$
$$= 0{,}000148883597615 \cdot 0{,}000069018217309 \cdot 0{,}00004578277933 = 4{,}7 \cdot 10^{-13}.$$

Чисельний експеримент підтверджує теоретичні твердження роботи.

Таким чином, в роботі досліджено кубатурні формули обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерфлетації на класі функцій, у яких $|f^{(r,0,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,r,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,0,r)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(r,r,r)}(x,y,z)| \leqslant \tilde{M}$, $r = 1,2$. Інформацію про функцію задано слідами на системі взаємоперпендикулярних площин. Доведено, що оцінку похибки кубатурної формули можна виразити через відповідні похибки квадратурних формул.

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М., Удовиченко В. М.* Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4(29). – С. 130–133.
3. *Литвин О. М., Удовиченко В. М.* Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій // Вестн. Нац. техн. ун-та "ХПИ". Сб. науч. тр. Темат. вып. "Автоматика и приборостроение". № 38. – Харьков, 2005. – С. 90–130.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків *Надійшло до редакції 11.05.2011*

О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвитер

Приближенное вычисление 3D коэффициентов Фурье на классе дифференцированных функций с помощью сплайн-интерфлетации

Предлагаются и исследуются кубатурные формулы вычисления 3D коэффициентов Фурье с использованием интерфлетации на классе функций, где $|f^{(r,0,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,r,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,0,r)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(r,r,r)}(x,y,z)| \leqslant \tilde{M}$, $r = 1,2$. *Информацию о функции задано следами на системе взаимоперпендикулярных плоскостей. Доказывается, что оценку погрешности кубатурной формулы можно выразить через соответствующие оценки погрешности квадратурных формул.*

O. N. Lytvyn, O. P. Nechuiviter

The approximate calculation of 3D Fourier coefficients on a class of differentiable functions with the use of a spline-interflatation

Cubature formulas for the calculation of 3D Fourier coefficients are presented by using the interflatation in the case where information about a function is set on the class $|f^{(r,0,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,r,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,0,r)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(r,r,r)}(x,y,z)| \leqslant \tilde{M}$, $r = 1,2$. *The error of the cubature formulas is evaluated by the errors of quadrature formulas.*