Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2012

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.872

О. Н. Дышлюк

О системе обслуживания множественных заявок с учетом времени подготовки обслуживающего канала

(Представлено академиком НАН Украины И. Н. Коваленко)

Найдены условия устойчивости и эргодичности вложенной цепи Маркова, которая описывает поведение системы массового обслуживания $GI/\overrightarrow{G}/1$, где символ $\overrightarrow{G}$ означает множественную заявку, с учетом предварительной подготовки обслуживания операций заявки на протяжении случайного времени. Приведен алгоритм статистического моделирования системы.

В классической теории массового обслуживания обычно заявка нуждается в обслуживании в течение некоторого интервала времени. Между тем в ряде технических систем каждая заявка предполагает выполнение некоторой конечной последовательности операций, разнесенных во времени. Такая ситуация характерна для систем обработки информации о движущихся объектах. В работах [1, 2] исследованы системы с заявками сложной структуры (множественными заявками), которые требуют выполнения n-го числа операций; в работе [3] рассмотрена система, в которой $n = 2$. Такие системы мы назвали системами со сдвоенными заявками. Можно условно считать, что обслуживание заявки состоит из времени приема сигнала от некоторого объекта и времени передачи ответного сигнала. Оба этих времени могут сдвигаться диспетчером в некоторых пределах.

Ниже рассматривается система обслуживания с множественными заявками, где каждая заявка состоит из случайного числа операций, имеющих случайную длительность. Интервалы времени, выделяемые диспетчером для различных операций, выполняются одним обслуживающим каналом.

Автор включает в модель также такую особенность, как наличие времени подготовки каждой операции той или иной заявки. Если t_n — момент поступления n-й заявки в систему обслуживания, то k-я операция данной заявки может начаться не ранее момента t_n+U_{nk}, где U_{nk} — случайные величины с конечным математическим ожиданием. Предполагается, что случайные векторы $(U_{n1}, U_{n2}, \ldots, U_{nN_n})$ независимы и одинаково распределены, а также что $U_{n1} \leqslant U_{n2} \leqslant \cdots \leqslant U_{nN_n}$.

Алгоритм работы диспетчера описывается следующим образом.

Первая операция заявки, поступившей в начальный момент времени ($t_0 = 0$), размещается в интервале времени $(U_{01}, U_{01} + Y_{01})$, где через Y_{nk} обозначим длительность k-й операции n-й заявки.

Операции n-й заявки размещаются на оси времени после окончания операций $(n-1)$-й заявки. При этом k-я операция n-й заявки размещается после окончания $(k-1)$-й операции данной заявки и в то же время после времени подготовки данной операции, т. е. момента $t_n + U_{nk}$. Подразумевается, что диспетчеру известны величины U_{nk} и Y_{nk} в момент t_n поступления n-й множественной заявки.

Описание системы и основные соотношения. Рассмотрим систему массового обслуживания, в которой входящий поток заявок — рекуррентный. Моменты поступления заявок: t_n, $n \geqslant 0$, где $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + X_n$, где X_n — независимые случайные величины с функцией распределения $A(x)$; $EX_n = a \in (0, \infty)$. Заявка с номером n требует выполнения N_n операций O_{nk} длительностью Y_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant N_n$, соответственно. Расположение величин Y_{nk} на оси времени планируется диспетчером в момент t_n по следующему протоколу. Операция O_{nk} занимает интервал времени $\Gamma_{nk} = (t_n + Z_{nk}, t_n + Z_{nk} + Y_{nk})$, где Z_{nk} выбирается из условия:

$$Z_{nk} = \min\bigl(z \geqslant U_{nk} \colon \Gamma_{nk} \bigcap \Gamma_{ml} = \varnothing,\ m < n \text{ либо } m = n,\ l < k\bigr),$$

где $U_{nk} \geqslant 0$ — заданные величины.

Величину U_{nk} можно интерпретировать как время ориентации для операции O_{nk}: эта операция может начаться не раньше, чем произойдет соответствующая ориентация в течение времени U_{nk}, отсчитываемого с момента t_n поступления заявки. Возможны и иные интерпретации. В любом случае $U_{n1} \leqslant U_{n2} \leqslant \dots \leqslant U_{nN_n}$.

Обозначим такую систему $GI/\overrightarrow{G}/1$, т. е. это одноканальная система массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком самого общего вида, символ $\overrightarrow{G}$ означает, что заявка множественная. Каждая операция множественной заявки требует предварительной подготовки канала обслуживания.

Примем следующие вероятностные условия.

1. Случайные векторы $(Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{nN_n}; U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{nN_n})$ не зависят от входящего потока заявок, взаимно независимы и одинаково распределены.

2. Случайные векторы $Y_n = Y_{n1} + Y_{n2} + \dots + Y_{nN_n}$ и U_{nN_n} независимы и

$$b = E(Y_{n1} + Y_{n2} + \dots + Y_{nN_n}) \leqslant \infty, \qquad c = E(U_{nN_n}) < \infty.$$

Введем случайную величину $W_n = Z_{nN} + Y_n$. Эта величина равна времени от момента t_n до того момента, когда закончится последняя операция n-й заявки.

Предельные теоремы.

Теорема 1. *В принятых условиях, если, к тому же,*

$$\frac{b}{a} < 1,$$

последовательность (W_n) *стохастически ограничена.*

Теорема 2. *Если, в дополнение к условиям теоремы 1, распределение* $A(x)$ обладает плотностью и

$$A(x) < 1, \qquad x \geqslant 0,$$

то последовательность случайных векторов (W_n) имеет предельное распределение при $n \to \infty$.

Доказательство теорем. Фиксируем некоторое $n \geqslant 1$ и допустим, что $W_{n-1} = w > 0$. Возможны два случая: $X_{n-1} + Z_{nN} \leqslant w$ (событие A) и $X_{n-1} + Z_{nN} > w$ (событие B). При событии A обслуживание операций n-го требования начнется ранее момента $t_{n-1} + w$, и все они произойдут подряд, без зазора. Следовательно,

$$W_n = w + Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nN_n} - X_{n-1}. \tag{1}$$

При событии B имеем

$$W_n \leqslant w + U_{nN} + Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nN_n}. \tag{2}$$

Из (1) и (2)

$$E(W_n - w) \leqslant b + E(U_{nN}; B) - E(X_{n-1}; A).$$

Имеем $a = E(X_{n-1}) = E(X_{n-1}; A) + E(X_{n-1}; B)$. При $w \to \infty$ последнее слагаемое представляет собой остаток сходящегося интеграла, откуда

$$-E(X_{n-1}; A) = -a + o(1), \qquad \text{при} \qquad w \to \infty. \tag{3}$$

Аналогично

$$E(U_{nN}; B) \leqslant E(X_{n-1} + U_{nN}; B) = o(1), \qquad w \to \infty. \tag{4}$$

Как остаток сходящегося ряда из (3) и (4)

$$E(W_n - W_{n-1} | W_{n-1} = w) = b - a + o(1), \qquad w \to \infty, \tag{5}$$

т. е., в силу $b/a \leqslant 1$, в пределе получаем отрицательное число.

Из (1) и (2) получаем

$$E(W_n - W_{n-1}) \leqslant E(U_{nN}) + E(Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nN}) \leqslant c + b. \tag{6}$$

На основании соотношений (5) и (6), теоремы 1 и 2 легко доказать с помощью теоремы 1 § 20 из работы [4].

Алгоритм статистического моделирования. Обозначим через W_{nk} время от момента t_n до момента окончания k-й операции n-й заявки, если $N_n \geqslant k$; положим $W_{nk} = 0$ — в противном случае. Легко доказать, что в условиях теоремы 1 существует эргодическое среднее

$$W_k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(W_{1k} + W_{2k} + \cdots + W_{nk}), \tag{7}$$

где имеется в виду сходимость по вероятности. Следовательно, W_{nk} можно сколь угодно точно аппроксимировать допредельным значением правой части (7). Так как случайные векторы $(W_{n1}, W_{n2}, \ldots)$ образуют однородную цепь Маркова, то их можно вычислить методом статистического моделирования. Для этого достаточно реализовать рекуррентные соотношения, которым эти величины удовлетворяют.

Для начальных значений ($n = 0$) получаем формулы:

$$W_{01} = \begin{cases} U_{01} + Y_{01}, & \text{если} \quad N_0 > 0, \\ 0, & \text{если} \quad N_0 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

При $k > 1$ имеем

$$W_{0k} = \begin{cases} \max(W_{0,k-1}, U_{0k}) + Y_{0k}, & \text{если} \quad N_0 \geqslant k, \\ 0, & \text{если} \quad N_0 < k. \end{cases} \tag{9}$$

При $n > 0$ получаем следующие формулы:

$$W_{n1} = \begin{cases} \max(W_{n-1,N-1} - t_n + t_{n+1}, U_{n1}) + Y_{n1}, & \text{если} \quad N_n > 0, \\ 0, & \text{если} \quad N_n = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Если к тому же $k > 1$, имеем:

$$W_{nk} = \begin{cases} \max(W_{n,k-1}, U_{nk}) + Y_{nk}, & \text{если} \quad N_n \geqslant k, \\ 0, & \text{если} \quad N_n < k. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, формулы (8)–(11) дают возможность методом статистического моделирования реализовать вложенную цепь Маркова, что значительно облегчает исследование системы $GI/\overrightarrow{G}/1$.

1. *Коба Е. В., Дышлюк О. Н.* Оценка вероятности пересечения заявок сложной структуры в системах обслуживания // Кибернетика и систем. анализ. – 2010. – № 3. – С. 175–180.
2. *Коба Е. В., Дышлюк О. Н.* Системы обслуживания с ограниченным последействием и потоками заявок сложной структуры // Пробл. управления и информатики. – 2010. – № 4. – С. 123–130.
3. *Дышлюк О. Н., Коба Е. В., Пустовая С. В.* Исследование распределения времени ожидания в системе обслуживания со сдвоенными заявками // Там же. – 2011. – № 4. – С. 98–107.
4. *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. – Москва: Эдиториал УРСС, 1999. – 440 с.

Национальный авиационный университет, Киев

Поступило в редакцию 05.07.2011

О. М. Дишлюк

Про систему обслуговування множинних заявок з урахуванням часу підготовки обслуговуючого каналу

Знайдено умови стійкості та ергодичності вкладеного ланцюга Маркова, який описує поведінку системи масового обслуговування $GI/\overrightarrow{G}/1$, де символ $\overrightarrow{G}$ означає множинну заявку, з урахуванням попередньої підготовки обслуговування операцій заявки протягом випадкового часу. Наведено алгоритм статистичного моделювання системи.

O. N. Dyshliuk

A system of multiple service applications with regard for the preparation time of a service channel

The conditions of stability and ergodicity of the embedded Markov chain, which describes the operation of a queuing system $GI/\overrightarrow{G}/1$, where the symbol $\overrightarrow{G}$ is a multiple application, with the pre-service training operations of the application for a random time being taken into account are obtained. An algorithm for the statistical modeling of the system is given.