УДК 517.927.8

М. І. Шкіль, П. Ф. Самусенко

Про періодичні розв'язки системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Запропоновано алгоритм побудови періодичних розв'язків сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами у некритичному випадку.

Різноманітні аспекти теорії сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами розглядались в роботах Д. В. Аносова, В. Вазова, Л. Флатто і Н. Левінсона, Дж. Хейла та ін. Так, Дж. Хейл [1] навів достатні умови існування і єдиності періодичного розв'язку системи

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + f(x, t, \varepsilon)$$

зі сталою матрицею A і періодичною за змінною t вектор-функцією $f(x, t, \varepsilon)$.

В. Вазов [2] для лінійної сингулярно збуреної системи

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \tag{1}$$

у випадку голоморфності матриці $A(t, \varepsilon)$ за змінними t, ε, розробив алгоритм побудови асимптотичних розвинень періодичних розв'язків. Аналогічні результати були ним отримані для нелінійної системи

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon)$$

за умови голоморфності вектор-функції $f(x, t, \varepsilon)$ за всіма змінними.

Системи лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь (1) з матрицею $A(t, \varepsilon)$, що зображується у вигляді асимптотичного ряду

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s A_s(t),$$

були всебічно досліджені в роботах М. І. Шкіля та його учнів [3, 4]. Зокрема, знайдено умови, при яких система (1) має єдиний періодичний розв'язок у випадку як простих, так і кратних коренів характеристичного рівняння (елементарних дільників); наведено асимптотичні формули для мультиплікаторів, на підставі чого з'ясовано умови некритичності системи (1) та її стійкості.

А. М. Самойленком і В. П. Яковцем закладено основи теорії лінійних вироджених систем з періодичними коефіцієнтами та узагальнено результати з асимптотичного інтегрування систем (1) [5, 6].

У даній роботі розглядається система

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(x,t,\varepsilon), \qquad t \in [0;T], \tag{2}$$

де $x = x(t,\varepsilon)$ та $f(x,t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, $A(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, — малий параметр. При цьому на відміну від [2, 7] вимагається лише неперервність $f(x,t,\varepsilon)$, що суттєво узагальнює дослідження, проведені в [1, 2, 7].

Отже, нехай виконуються такі умови:

1. Компоненти $A(t,\varepsilon)$ та $f(x,t,\varepsilon)$ — функції, періодичні за змінною t з періодом T.

2. Матриця $A(t,\varepsilon)$ має асимптотичне розвинення за степенями ε, тобто

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{s\geqslant 0}\varepsilon^s A_s(t),$$

$A_s(t) \in C^{m+1-s}[-T;T]$, $m \in N\bigcup\{0\}$.

3. $f(x,t,\varepsilon) \in C(\overline{D})$, де $\overline{D} = \{(x,t,\varepsilon) \in R^{n+2} \colon \|x\| \leqslant a, t \in [0;T], \varepsilon \in [0;\varepsilon_0]\}$ і $f(0,t,0) = 0$.

4. Існує така функція $\eta(\rho,\varepsilon) \in C([0;a] \times [0;\varepsilon_0])$ неспадна за змінною ρ, що

$$\|f(x_1,t,\varepsilon) - f(x_2,t,\varepsilon)\| \leqslant \eta(\rho,\varepsilon)\|x_1 - x_2\|$$

для всіх (x_1,t,ε), $(x_2,t,\varepsilon) \in \overline{D}$, причому $\eta(0,0) = 0$.

5. Корені $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\ldots$, $\lambda_n(t)$ характеристичного рівняння $\det(A_0(t) - \lambda E) = 0$, E — одинична матриця, та відповідні їм елементарні дільники на відрізку $[0;T]$ зберігають сталу кратність.

6. $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$, $i = \overline{1,n}$.

Згідно з умовою 5 існує така неособлива періодична з періодом T матриця $V(t) \in C^{m+1}[-T;T]$, що

$$V^{-1}(t)A_0(t)V(t) = W(t),$$

де $W(t) = \operatorname{diag}\{W_1(t), W_2(t), \ldots, W_p(t)\}$, $W_i(t)$ — жорданові клітини k_i-го порядку, k_i, $i = \overline{1,p}$, — кратності елементарних дільників матриці $A_0(t)$, причому $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$ [8]. Тому, не обмежуючи загальності, вважаємо, що $A_0(t) = W(t)$.

У системі (2) покладемо

$$x = U_m(t,\varepsilon)y, \qquad U_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_s(t).$$

Маємо

$$\varepsilon U_m(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = (A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon U_m'(t,\varepsilon))y + g(y,t,\varepsilon), \tag{3}$$

де $g(y,t,\varepsilon) = f(U_m(t,\varepsilon)y,t,\varepsilon)$.

Матрицю $U_m(t,\varepsilon)$ визначаємо з тотожності

$$A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon U_m'(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)(\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)),$$

де $\Lambda_m(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_s(t)$ — діагональна матриця, $C_m(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку [9].

За побудовою матриці $U_m(t,\varepsilon)$, $\Lambda_m(t,\varepsilon)$, $C_m(t,\varepsilon)$ — періодичні за змінною t з періодом T, причому $U_m(t,\varepsilon) = E$, $\Lambda_0(t) = W(t)$. А тому існує таке ε_1, $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, що $\det U_m(t,\varepsilon) \neq 0$, $t \in [0;T]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$.

Таким чином, система (3) набуде вигляду

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = (\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_m(t,\varepsilon))y + h(y,t,\varepsilon), \tag{4}$$

де $h(y,t,\varepsilon) = U_m^{-1}(t,\varepsilon) g(y,t,\varepsilon)$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $W(t) = \mathrm{diag}\{W_+(t), W_-(t)\}$, де $W_+(t)$ та $W_-(t)$ — квазідіагональні матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $W(t)$ з додатними та від'ємними дійсними частинами відповідно. Тоді систему (4) можна записати таким чином:

$$\varepsilon \frac{dy_+}{dt} = (\Lambda_{m+}(t,\varepsilon) y_+ + \varepsilon^{m+1}(C_{m1}(t,\varepsilon) y_+ + C_{m2}(t,\varepsilon) y_-) + h_+(y,t,\varepsilon),$$
$$\varepsilon \frac{dy_-}{dt} = (\Lambda_{m-}(t,\varepsilon) y_- + \varepsilon^{m+1}(C_{m3}(t,\varepsilon) y_+ + C_{m4}(t,\varepsilon) y_-) + h_-(y,t,\varepsilon),$$

де

$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\{\Lambda_{m+}(t,\varepsilon), \Lambda_{m-}(t,\varepsilon)\}, \qquad \Lambda_{m+}(t,0) = W_+(t), \qquad \Lambda_{m-}(t,0) = W_-(t),$$
$$C_m(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} C_{m1}(t,\varepsilon) & C_{m2}(t,\varepsilon) \\ C_{m3}(t,\varepsilon) & C_{m4}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$C_{m1}(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця, порядок якої дорівнює порядку $W_+(t)$; $y = \mathrm{colon}(y_+, y_-)$, $h = \mathrm{colon}(h_+, h_-)$, y_+, y_-, h_+, h_- — вектори відповідної розмірності.

З умови періодичності $y(0,\varepsilon) = y(T,\varepsilon)$ дістаємо

$$\begin{aligned} y_+(t,\varepsilon) = {} & \frac{1}{\varepsilon} Y_+(t,\varepsilon)(Y_+(0,\varepsilon) - E_+)^{-1} \int\limits_0^T Y_+(0,\varepsilon) Y_+^{-1}(\tau,\varepsilon) \times \\ & \times (\varepsilon^{m+1}(C_{m1}(\tau,\varepsilon) y_+(\tau,\varepsilon) + C_{m2}(\tau,\varepsilon) y_-(\tau,\varepsilon)) + h_+(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)) d\tau + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} Y_+(t,\varepsilon) \int\limits_T^t Y_+^{-1}(\tau,\varepsilon)(\varepsilon^{m+1}(C_{m1}(\tau,\varepsilon) y_+(\tau,\varepsilon) + C_{m2}(\tau,\varepsilon) y_-(\tau,\varepsilon)) + \\ & + h_+(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)) d\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y_-(t,\varepsilon) = {} & \frac{1}{\varepsilon} Y_-(t,\varepsilon)(E_- - Y_-(T,\varepsilon))^{-1} \int\limits_0^T Y_-(T,\varepsilon) Y_-^{-1}(\tau,\varepsilon) \times \\ & \times (\varepsilon^{m+1}(C_{m3}(\tau,\varepsilon) y_+(\tau,\varepsilon) + C_{m4}(\tau,\varepsilon) y_-(\tau,\varepsilon)) + h_-(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)) d\tau + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}Y_-(t,\varepsilon)\int\limits_0^t Y_-^{-1}(\tau,\varepsilon)(\varepsilon^{m+1}(C_{m3}(\tau,\varepsilon)y_+(\tau,\varepsilon)+C_{m4}(\tau,\varepsilon)y_-(\tau,\varepsilon))+$$

$$+\,h_-(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon))d\tau, \tag{6}$$

де

$$Y_+(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_T^t \Lambda_{m+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right),\qquad Y_-(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \Lambda_{m-}(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right),$$

E_+, E_- — одиничні матриці відповідного порядку.

Оператор, що визначений за допомогою співвідношень (5), (6), відображає замкнену множину $\overline{P}$,

$$\overline{P}=\{y(t,\varepsilon)\in C[0;T]\colon y(t+T,\varepsilon)=y(t,\varepsilon),\ t\in[0;T],\ \|y(t,\varepsilon)\|\leqslant\sigma\},$$

у себе і є оператором стиску. Отже, система (5), (6) на множині $\overline{P}$ має єдиний розв'язок [10]. При цьому

$$\|y(t,\varepsilon)\|=O(\eta(\sigma,\varepsilon))+O(\varepsilon). \tag{7}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1–6. Тоді існують такі сталі $\sigma>0$, $\varepsilon_1>0$, що для всіх $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$ система (2) має єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)\in C[0;T]$, періодичний за змінною t з періодом T, для якого вірна оцінка (7).*

Якщо замість системи (2) розглядати систему

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x+\varepsilon f(x,t,\varepsilon),\qquad t\in[0;T], \tag{8}$$

то аналогічно переконуємось у правильності такого твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1–6. Тоді існують такі сталі $\sigma>0$, $\varepsilon_1>0$, що для всіх $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$ система (8) має єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)\in C[0;T]$, періодичний за змінною t з періодом T, для якого справджується оцінка*

$$\|x(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon\eta(\sigma,\varepsilon))+O(\varepsilon^2).$$

Нехай тепер система (2) є лінійною, тобто

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x+f(t,\varepsilon),\qquad t\in[0;T]. \tag{9}$$

7. Припустимо, що $f(t,\varepsilon)\in C[0;T]$.

Тоді для періодичного розв'язку $x=x(t,\varepsilon)$ системи (9) маємо такі асимптотичні формули:

$$x(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon), \tag{10}$$

$$y_+(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}Y_+(t,\varepsilon)\left(\int\limits_0^T Y_+(0,\varepsilon)Y_+^{-1}(\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)\,d\tau+\int\limits_T^t Y_+^{-1}(\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right)+O(\varepsilon), \tag{11}$$

$$y_-(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} Y_-(t,\varepsilon)\left(\int\limits_0^T Y_-(T,\varepsilon)Y_-^{-1}(\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)\,d\tau + \int\limits_0^t Y_-^{-1}(\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right) + $$
$$+ O(\varepsilon). \tag{12}$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1, 2, 5–7. Тоді існує така стала* $\varepsilon_1 > 0$*, що для всіх* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ *система* (9) *має єдиний розв'язок* $x(t,\varepsilon) \in C[0;T]$*, періодичний за змінною* t *з періодом* T*, для якого вірні асимптотичні оцінки* (10)–(12).

Зауваження. Покладемо $U_m^{-1}(t,\varepsilon) = V_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})$, де $V_m(t,\varepsilon) = E + \sum\limits_{s=1}^{m} \varepsilon^s V_s(t)$. Тоді замість оцінок (11), (12) маємо

$$y_+(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} Y_+(t,\varepsilon)\left(\int\limits_0^T Y_+(0,\varepsilon)Y_+^{-1}(\tau,\varepsilon)V_m(\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \int\limits_T^t Y_+^{-1}(\tau,\varepsilon)V_m(\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right) + O(\varepsilon^{m+1}), \tag{13}$$
$$y_-(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} Y_-(t,\varepsilon)\left(\int\limits_0^T Y_-(T,\varepsilon)Y_-^{-1}(\tau,\varepsilon)V_m(\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t Y_-^{-1}(\tau,\varepsilon)V_m(\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right) + O(\varepsilon^{m+1}). \tag{14}$$

Наслідок. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді існує така стала* $\varepsilon_1 > 0$*, що для всіх* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ *система* (9) *має єдиний розв'язок* $x(t,\varepsilon) \in C[0;T]$*, періодичний за змінною* t *з періодом* T*, для якого справджуються оцінки* (10), (13), (14).

1. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. – Москва: Мир, 1966. – 230 с.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1968. – 464 с.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1989. – 287 с.
4. *Божко В. А.* О периодических решениях системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1980. – № 3. – С. 80–84.
5. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Киев: Вища шк., 2000. – 294 с.
6. *Яковець В. П., Акименко А. М.* Про існування і асимптотику періодичного розв'язку виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратних елементарних дільників // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, № 1. – С. 123–141.
7. *Самусенко П. Ф.* Построение периодических решений нелинейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. – 2006. – **32**, № 6. – С. 756–763.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
9. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – Київ: Вища шк., 1971. – 226 с.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.

Національний педагогічний університет
ім. М. П. Драгоманова, Київ

Надійшло до редакції 26.05.2011

Н. И. Шкиль, П. Ф. Самусенко

О периодических решениях системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Предложен алгоритм построения периодических решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в некритическом случае.

M. I. Shkil, P. F. Samusenko

About the periodic solutions of a system of singularly perturbed differential equations with periodic coefficients

An algorithm of constructing the periodic solutions of a singularly perturbed system of differential equations with periodic coefficients in the uncritical case is proposed.