УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, О. О. Пипка, І. Я. Субботін

Про деякі зв'язки та узагальнення пронормальних підгруп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Отримано нові результати щодо зв'язків та узагальнень пронормальних підгруп. Зокрема, розглянуто групи, кожна циклічна підгрупа яких є самоспряжено-переставною. Наведено повний опис таких груп в деяких дуже широких класах груп, які містять в собі всі скінченні групи.

При вивченні різноманітних властивостей груп природним чином виникали різні важливі типи підгруп. Так, наприклад, при вивченні властивостей силовських та холлівських підгруп в скінченних групах виник такий важливий тип підгруп, як пронормальні. Підгрупа H групи G називається *пронормальною* в G, якщо для кожного елемента $g \in G$ підгрупи H та H^g спряжені в підгрупі $\langle H, H^g \rangle$. Пронормальні підгрупи були введені до розгляду Ф. Холлом. Пронормальність виявилась досить тісно пов'язаною з іншими важливими властивостями групи, зокрема, з такою суттєвою властивістю, як нормальність. Група G називається T-групою, якщо кожна її субнормальна підгрупа є нормальною. Група G називається $\overline{T}$-групою, якщо кожна підгрупа G є T-групою. Треба відзначити, що T-групи вивчаються вже досить довгий період часу. Будова скінченних розв'язних T-груп була описана В. Гашюцем [1]. Зокрема, ним доведено, що кожна скінченна розв'язна T-група є $\overline{T}$-групою. Зазначимо також, що скінченна $\overline{T}$-група є метабелевою. Нескінченні розв'язні T-групи та $\overline{T}$-групи вивчалися Д. Робінсоном [2]. Т. А. Пенгом була отримана характеризація скінченних $\overline{T}$-груп за допомогою пронормальних підгруп. Він довів у роботі [3], що скінченна група G є $\overline{T}$-групою тоді і тільки тоді, коли її кожна підгрупа є пронормальною. Треба зауважити, що у випадку нескінченних груп це вже не так. Нескінченні групи, кожна підгрупа яких є пронормальною, вивчалися М. Ф. Кузенним та І. Я. Субботіним [4]. З основного результату роботи [4] випливає, що клас нескінченних періодичних розв'язних $\overline{T}$-груп та клас нескінченних періодичних розв'язних груп, кожна підгрупа яких пронормальна, є різними. В іншій своїй роботі М. Ф. Кузенний та І. Я. Субботін [5] довели, що класи локально розв'язних $\overline{T}$-груп та локально розв'язних груп, кожна циклічна підгрупа яких є пронормальною, збігаються. Як виявилось, остання характеризація локально розв'язних $\overline{T}$-груп може бути розширена. Будемо говорити, що підгрупа H групи G є контранормальною в G, якщо $H^G = G$. Підгрупа H групи G називається *наближено пронормальною*, якщо $N_L(H)$ — контранормальна підгрупа в L для кожної підгрупи L, що містить у собі H. Зазначимо, що кожна пронормальна підгрупа є наближено пронормальною, але не навпаки. У роботі [6] було доведено, що класи локально розв'язних $\overline{T}$-груп та локально розв'язних груп, усі циклічні підгрупи яких наближено пронормальні, збігаються. У даній роботі ми розглядатимемо інше узагальнення пронормальних підгруп, що виникає із цілком іншої тематики — з тематики, пов'язаної з властивістю переставності.

Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається *переставною* в G, якщо $HK = KH$ для кожної підгрупи K групи G. У роботі [7] Т. Фогуел ввів до розгляду таке узагальнення переставних підгруп. Підгрупа H групи G називається *спряжено-переставною* в G, якщо $HH^g = H^gH$ для кожного елемента $g \in G$. Нижченаведений тип підгруп є дуальним до спряжено-переставних підгруп. Підгрупа H групи G називається *самоспряжено-переставною*, якщо H задовольняє таку умову: з рівності $HH^g = H^gH$ завжди випливає, що $H^g = H$. Поняття самоспряжено-переставної підгрупи виникло в роботі [8], у якій були отримані деякі властивості скінченних груп, циклічні підгрупи яких є самоспряжено-переставними. У даній роботі ми наводимо повний опис таких груп у дуже широкому класі груп, який містить усі скінченні групи.

Нехай G — група, $\mathfrak{R}_{\mathbf{LN}}$ — системи тих її нормальних підгруп, для яких відповідна факторгрупа G/H є локально нільпотентною. Перетин $\bigcap \mathfrak{R}_{\mathbf{LN}} = \mathbf{R}_{\mathbf{LN}}$ усіх підгруп цієї системи називається *локально нільпотентним резидуалом* групи G. Неважко довести, що якщо група G є локально скінченною, то факторгрупа $G/\mathbf{R}_{\mathbf{LN}}$ є локально нільпотентною.

Перший основний результат роботи дає опис локально скінченних груп, усі циклічні підгрупи яких є самоспряжено-переставними.

Теорема 1. *Нехай G — локально скінченна група і L — її локально нільпотентний резидуал. Якщо кожна циклічна підгрупа G є самоспряжено-переставною, то мають місце такі твердження:*

(i) підгрупа L є абелевою;

(ii) $2 \notin \Pi(L)$ та $\Pi(L) \bigcap \Pi(G/L) = \varnothing$;

(iii) факторгрупа G/L є дедекіндовою групою;

(iv) кожна підгрупа $C_G(L)$ є G-інваріантною.

Навпаки, якщо група G задовольняє умови (i)-(iv), то кожна підгрупа G є самоспряжено-переставною.

Наслідок 1. *Нехай G — локально скінченна група. Якщо кожна циклічна підгрупа G самоспряжено-переставна, то комутант групи G є абелевою підгрупою.*

Розглянемо тепер деякі неперіодичні групи, всі циклічні підгрупи яких є самоспряжено-переставними.

Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо вона має зростаючий ряд, фактори якого локально нільпотентні або локально скінченні.

Відзначимо, що періодичні узагальнено радикальні групи будуть локально скінченними, а тому і періодичні локально узагальнено радикальні групи будуть локально скінченними.

Теорема 2. *Нехай G — неперіодична локально узагальнено радикальна група. Якщо кожна циклічна підгрупа G самоспряжено-переставна, то або G є абелевою, або $G = R\langle b\rangle$, де R — нормальна абелева підгрупа, $b^2 \in R$ та $a^b = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in R$. Більш того, у другому випадку мають місце такі твердження:*

(i) якщо $b^2 = 1$, то силовська 2-підгрупа D підгрупи R є елементарною абелевою;

(ii) якщо $b^2 \neq 1$, то або D є елементарною абелевою, або $D = E \times \langle v\rangle$, де E — елементарна абелева, а $\langle b, v\rangle$ — це група кватерніонів.

Навпаки, якщо група G має вказану структуру, то кожна її циклічна підгрупа є самоспряжено-переставною.

Наслідок 2. *Нехай G — неперіодична локально узагальнено радикальна група. Кожна циклічна підгрупа G є самоспряжено-переставною тоді і тільки тоді, коли G є абелевою групою.*

Ми можемо отримати опис будови груп, усі підгрупи яких є самоспряжено-переставними, для більш широкого класу груп.

Група G називається *локально ступінчатою*, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу.

Теорема 3. *Нехай G — локально ступінчата група і L — її локально нільпотентний резидуал.*

(A) Якщо G неперіодична, то кожна підгрупа G самоспряжено-переставна тоді і тільки тоді, коли G є абелевою.

(B) Якщо G є періодичною, то кожна підгрупа G є самоспряжено-переставною тоді і тільки тоді, коли мають місце такі умови:

(i) підгрупа L є абелевою;

(ii) $2 \notin \Pi(L)$ та $\Pi(L) \bigcap \Pi(G/L) = \varnothing$;

(iii) факторгрупа G/L є дедекіндовою групою;

(iv) кожна підгрупа $C_G(L)$ є G-інваріантною.

Нижченаведений результат вказує на зв'язок самоспряжено-переставних підгруп та пронормальних підгруп.

Твердження. *Нехай G — група і L — пронормальна підгрупа G. Тоді L є самоспряжено-переставною підгрупою G.*

Обернене твердження в загальному випадку невірне. Розглянемо приклад, що ілюструє це. Нехай G — спеціальна унітарна група всіх 3×3 матриць над полем $\mathbf{F}_9$ порядку 9. Ця група є простою та має порядок 6048. Мультиплікативна група $\mathbf{U}(\mathbf{F}_9)$ цього поля є циклічною. Нехай g — такий елемент, що $\langle g \rangle = \mathbf{U}(\mathbf{F}_9)$. Позначимо через K підгрупу, що породжується такими матрицями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g^4 & g^4 \\ 1 & g^4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & g^4 \\ 0 & g^4 & 0 \\ g^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Підгрупа K є самоспряжено-переставною, але не пронормальною. Її порядок дорівнює 6. Також відзначимо, що вона є розв'язною, але не нільпотентною.

Наслідок 3 [9]. *Нехай G — локально ступінчата група. Якщо G неперіодична, то кожна підгрупа G є пронормальною тоді і тільки тоді, коли G є абелевою.*

Наслідок 4 [4]. *Нехай G — локально розв'язна група. Якщо G — неперіодична, то кожна підгрупа G є пронормальною тоді і тільки тоді, коли G є абелевою.*

1. *Gaschütz W.* Gruppen in denen das Normalreilersein transitiv ist // J. Reine Angew. Math. – 1957. – **198**. – P. 87–92.
2. *Robinson D. J. S.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1964. – **60**. – P. 21–38.
3. *Peng T. A.* Finite groups with pronormal subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **20**. – P. 232–234.
4. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Группы, в которых все подгруппы пронормальны // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 3. – С. 325–329.
5. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1988. – **11**. – С. 77–79.
6. *Kurdachenko L. A., Russo A., Vincenzi G.* On some groups all subgroups of which are near to pronormal // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**. – P. 1332–1339.
7. *Foguel T.* Conjugate-permutable subgroups // J. Algebra. – 1997. – **191**, No 1. – P. 235–239.
8. *Li S., Meng Z.* Groups with conjugate-permutable conditions // Math. Proc. Royal Irish Academy. – 2007. – **107A**. – P. 115–121.
9. *Robinson D. J. S., Russo A., Vincenzi G.* On groups which contain no HNN-extensions // Int. J. Algebra Computat. – 2007. – **17**, No 7. – P. 1377–1387.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 12.04.2011

Л. А. Курдаченко, А. А. Пыпка, И. Я. Субботин

О некоторых связях и обобщениях пронормальных подгрупп

Получены новые результаты относительно связей и обобщений пронормальных подгрупп. В частности, рассмотрены группы, каждая циклическая подгруппа которых является самосопряженно-переставляемой. Приведено полное описание таких групп в некоторых очень широких классах групп, которые содержат в себе все конечные группы.

L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, I. Ya. Subbotin

On some connections and generalizations of pronormal subgroups

New results concerning the connections and generalizations of pronormal subgroups are presented. In particular, we studied groups, in which every cyclic subgroup is self-conjugate-permutable. We obtained the full description of such groups in some very wide classes of groups which contain all finite groups.