УДК 517.9;519.86

М. С. Гончар, Д. О. Каплуненко

Ймовірність банкрутства банку за необмежених виплат

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Отримано оцінку ймовірності банкрутства банку, яка вказує на величину початкового капіталу банку, за якого він спроможний функціонувати без банкрутства за достатньо малої ймовірності систематичного ризику.

Проблеми сутності економічного ризику та дослідження ймовірності банкрутства банку є одними з найважливіших в умовах сучасних ринкових відносин, адже чим невизначенішим є соціально-економічне середовище, тим актуальнішими стають необхідність урахування ризику, побудова і вивчення нових моделей, зокрема для ймовірності банкрутства банку. Проблема оцінювання ймовірності банкрутства фірми бере свій початок з роботи [1]. Важливими для подальшого розвитку оцінки ймовірності банкрутства фірм, зокрема страхових компаній та реальних опціонів, стали моделі Крамера–Лундберга [2, 3] та Мертона [4]. Сучасні моделі Var та аксіоматизація оцінки ризиків [5] є домінуючими в літературі. У даній роботі аналізується динамічна модель роботи банку, запропонована в [6], у руслі досліджень, викладених у монографіях [7, 8]. Розглядається випадок, коли розподіл платежів за борговими зобов'язаннями банку має "ненульові хвости". Доведено декілька теорем, які дають оцінку ймовірності банкрутства банку. Ця оцінка залежить від ймовірності втрати капіталу банком внаслідок систематичного ризику, величини частки проблемних кредитів, початкового капіталу банку, мінімального рівня прибутковості. Отримана оцінка вказує величину початкового капіталу банку, за якого банк спроможний функціонувати без банкрутства за умови достатньо малої ймовірності систематичного ризику.

Модель роботи банку. Як і в [6], припускаємо, що банк може інвестувати свій капітал на початку кожного операційного періоду. Вважаємо, що існує n можливих результатів інвестування в кожному операційному періоді. Яка з цих можливостей реалізується, залежить від інвестиційного середовища і рівня банківського менеджменту. Нехай у початковий момент часу капітал банку x. Еволюція банківського капіталу відбувається в дискретні моменти часу $n = 1, 2, \ldots$ таким чином: у нульовий момент часу банк має початковий капітал x, який він інвестує в активи так, що з імовірністю p_1 він може втратити деяку частину капіталу, а з імовірністю p_i, $i = \overline{2, n}$, може його збільшити. У момент часу $t = n$ капітал банку описується співвідношенням $R_n = R_{n-1}(1+\varphi_n)+C-Z_n$, $n = 1, 2, \ldots$, де R_i — капітал банку в момент часу i; φ_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — послідовність однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень у множині $\{b_1, \ldots, b_n\}$, причому $P(\varphi_k = b_i) = p_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_k \geqslant 0$, $k = \overline{1, n}$. Додатково припускаємо: $0 > b_1 > -1$, $b_i > b_{i-1} \geqslant 0$, $i = \overline{3, n}$. $C > 0$ — обсяг надходжень коштів на депозити в першому періоді функціонування банку (у даній моделі вважаємо надходження однаковими в кожному періоді), Z_i, $i = 1, 2, \ldots$, є послідовністю невід'ємних однаково розподілених випадкових величин, що описують зобов'язання банку перед кредиторами.

Оцінка ймовірності банкрутства банку за необмежених виплат. Введемо для $\lambda > 0$ банахів простір B_λ борелевих функцій $f(x)$, означених на $[0, \infty)$, для яких скінченна норма

$$\|f\|_\lambda = \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,\infty)} e^{\lambda x}|f(x)|, \qquad \lambda > 0.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

$$1 - F(x) \leqslant c_1 e^{-ax^\alpha}, \qquad F(0) = 0, \qquad \alpha > 1, \qquad c_1 > 0, \tag{1}$$

де константа $a > 0$ така, що

$$e^{-C\lambda}\left(1 + c_1\lambda\int_0^\infty e^{-ay^\alpha}e^{\lambda y}dy\right) < 1. \tag{2}$$

Тоді рівняння

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{i=2}^n p_i \int_0^{(1+b_i)x+C} f((1 + b_i)x + C - y))\, dF(y) \tag{3}$$

має єдиний розв'язок у просторі B_λ для довільного $\varphi(x) \in B_\lambda$. Для цього розв'язку справедлива оцінка

$$|f(x)| \leqslant \frac{e^{-\lambda x}\|\varphi\|_\lambda}{1 - e^{-C\lambda}\left[1 + c_1\lambda\int_0^\infty e^{-ax^\alpha}e^{\lambda x}dx\right]}.$$

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з такої оцінки для лінійного оператора

$$A_2 f = \sum_{i=2}^n p_i \int_0^{(1+b_i)x+C} f((1 + b_i)x + C - y)\, dF(y),$$

$$\|A_2 f\|_\lambda \leqslant \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,\infty)} e^{\lambda x}\sum_{i=2}^n p_i \int_0^{(1+b_i)x+C} |f((1 + b_i)x + C - y))\, |dF(y) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,\infty)} e^{\lambda x}\sum_{i=2}^n p_i \int_0^{(1+b_i)x+C} e^{-\lambda[(1+b_i)x+C-y]}dF(y)\|f\|_\lambda \leqslant$$

$$\leqslant (1 - p_1)\int_0^\infty e^{\lambda y}dF(y)e^{-C\lambda}\|f\|_\lambda.$$

Внаслідок виконання рівності $\int\limits_0^\infty e^{\lambda y}dF(y) = 1+\lambda\int\limits_0^\infty e^{\lambda y}(1-F(y))\,dy$ та завдяки припущенням теореми 1 маємо оцінку

$$\int_0^\infty e^{\lambda y}(1 - F(y))\, dy \leqslant c_1\int_0^\infty e^{\lambda y}e^{-ay^\alpha}dy.$$

Отже, A_2 є оператором стиску, норма якого не перевищує

$$(1-p_1)e^{-C\lambda}\left(1+c_1\lambda\int\limits_0^{\infty}e^{\lambda y}e^{-ay^{\alpha}}\,dy\right)<1.$$

Остання оцінка і доводить теорему.

Наведена нижче теорема дає достатні умови для отримання оцінки ймовірності банкрутства банку.

Теорема 2. *Нехай* $\lambda_0>0$, $\lambda_i=(1+b_1)^i\lambda_0$, $\overline{i=1,n}$, *та для деякого* $a>0$ *виконуються нерівності*

$$1+c_1\lambda_0\int\limits_0^{\infty}e^{\lambda_0 y}e^{-ay^{\alpha}}\,dy<e^{C\lambda_n}, \tag{4}$$

$$1-F(x)\leqslant c_1e^{-ax^{\alpha}}. \tag{5}$$

Тоді система інтегральних рівнянь

$$\psi_2^0(x)=\varphi_2^0(x)+A_2\psi_2^0(x), \tag{6}$$

$$\psi_2^i(x)=A_1\psi_2^{i-1}(x)+A_2\psi_2^i(x),\qquad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

$$\varphi_2^0(x)=\sum_{j=2}^{n}p_j[1-F((1+b_j)x+C)], \tag{8}$$

$$A_1f(x)=p_1\int\limits_0^{(1+b_1)x+C}f((1+b_1)x+C-y)\,dF(y) \tag{9}$$

має единий розв'язок $\psi_2^i(x)$, *для якого виконуються нерівності*

$$\psi_2^i(x)\leqslant D_ie^{-\lambda_i x},\qquad i=\overline{0,n},$$

де

$$D_i=\frac{p_1e^{-\lambda_{i-1}C}\left(1+c_1\lambda_{i-1}\int\limits_0^{\infty}e^{-ay^{\alpha}}e^{\lambda_{i-1}y}dy\right)}{1-e^{-\lambda_iC}\left(1+c_1\lambda_i\int\limits_0^{\infty}e^{-ay^{\alpha}}e^{\lambda_i y}dy\right)}D_{i-1}, \tag{10}$$

$$D_0=\frac{c_1\sum\limits_{i=2}^{n}p_i\exp\left(-\lambda_0\dfrac{C}{1+b_i}+\dfrac{\lambda_0^{\alpha/(\alpha-1)}}{(1+b_i)^{\alpha/(\alpha-1)}}\dfrac{1}{a^{1/(\alpha-1)}}\left[\dfrac{1}{\alpha^{1/(\alpha-1)}}-\dfrac{1}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}}\right]\right)}{1-e^{-C\lambda_0}\left(1+c_1\lambda_0\int\limits_0^{\infty}e^{-ay^{\alpha}}e^{\lambda_0 y}dy\right)}. \tag{11}$$

Доведення. Доведення вестимемо індукцією за кількістю рівнянь. Припустимо, що для $i-1$ рівнянь твердження теореми 2 вже доведено. Розглянемо рівняння

$$\psi_2^i(x) = A_1\psi_2^{(i-1)}(x) + A_2\psi_2^i(x). \tag{12}$$

За теоремою 1 рівняння (12) має єдиний розв'язок у банаховому просторі B_{λ_i}, якщо $A_1\psi_2^{(i-1)}(x)$ належить B_{λ_i}. За припущенням $\psi_2^{(i-1)}(x) \leqslant D_{i-1}e^{-\lambda_{i-1}x}$. З цієї оцінки випливає, що $A_1\psi_2^{(i-1)}(x)$ належить простору B_{λ_i}. Справді,

$$A_1\psi_2^{(i-1)}(x) \leqslant p_1 \int\limits_0^{(1+b_1)x+C} e^{-\lambda_{i-1}[(1+b_1)x+C-y]}dF(y)D_{i-1},$$

$$D_{i-1}e^{-\lambda_{i-1}C}p_1e^{-\lambda_{i-1}(1+b_1)x} \int\limits_0^{(1+b_1)x+C} e^{\lambda_{i-1}y}dF(y) \leqslant$$

$$\leqslant D_{i-1}e^{-\lambda_{i-1}C}p_1\left[1 + c_1\int\limits_0^{\infty}\lambda_{i-1}e^{-ay^\alpha}e^{\lambda_{i-1}y}dy\right]e^{-\lambda_{i-1}(1+b_1)x}.$$

За теоремою 1 розв'язок рівняння (12) існує і єдиний у просторі B_{λ_i}, $\lambda_i = (1+b_1)\lambda_{i-1}$, і для нього виконується нерівність

$$\psi_2^i(x) \leqslant \frac{e^{-\lambda_i x}p_1e^{-C\lambda_{i-1}}\left[1 + c_1\lambda_{i-1}\int\limits_0^{\infty} e^{-ay^\alpha}e^{\lambda_{i-1}y}dy\right]D_{i-1}}{1 - e^{-C\lambda_i}\left[1 + c_1\lambda_i\int\limits_0^{\infty} e^{-ay^\alpha}e^{\lambda_i y}dy\right]}.$$

Поклавши

$$D_i = \frac{p_1e^{-C\lambda_{i-1}}\left[1 + c_1\lambda_{i-1}\int\limits_0^{\infty} e^{-ay^\alpha}e^{\lambda_{i-1}y}dy\right]D_{i-1}}{1 - e^{-C\lambda_i}\left[1 + c_1\lambda_i\int\limits_0^{\infty} e^{-ay^\alpha}e^{\lambda_i y}dy\right]},$$

отримаємо твердження теореми 2, бо рівняння (6) має єдиний розв'язок за теоремою 1 у просторі B_{λ_0} зі сталою D_0.

Теорема 3. *Нехай для деякого $a > 0$ виконуються нерівності $1 - F(x) \leqslant c_1e^{-ay^\alpha}$, $\alpha > 1$, та $1 + c_1\lambda_0\int\limits_0^{\infty} e^{-ay^\alpha}e^{\lambda_0 y}dy < e^{c\lambda_n}$. Тоді ймовірність банкрутства банку за n кроків задовольняє нерівність $\psi_n(x) \leqslant p_1 + \sum\limits_{i=0}^{n} D_ie^{-\lambda_i x}$, $\lambda_i = (1+b_1)^i\lambda_0$. Існує значення капіталу x таке, що для довільного $\varepsilon > 0$ справедлива оцінка $\sum\limits_{i=0}^{n} D_ie^{-\lambda_i x_0} < \varepsilon$.*

Для доведення теореми 3 використовуємо лему 3 та теорему 7 з [6].

1. *Altman E.* Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy // J. Finance. – 1968. – **23**. – P. 589–609.
2. *Cramer H.* On the mathematical theory of risk // Skandia Jubilee Volume. – Stockholm, 1930. – P. 7–84.
3. *Lundberg F.* Some supplementary researches on the collective risk theory // Skandinavisk Aktuarietidskrift. – 1932. – **15**. – P. 137–158.
4. *Merton R.* On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates // J. Finance. – 1974. – **29**. – P. 449–470.
5. *Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.* Coherent measures of risk // Math. Finance. – 1999. – **9**, No 3. – P. 203–228.
6. *Гончар М. С.* Теорема про капіталізацію банків // Боголюбовські читання: програма і тези доповідей конф. з нагоди 45-річчя Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, 13–15 грудня 2010 р. – Київ, 2010. – С. 23.
7. *Гончар М. С.* Математичні основи інформаційної економіки. – Київ: Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова, 2007. – 464 с.
8. *Gonchar N. S.* Mathematical foundations of information economics. – Kiev: N. N. Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 2008. – 468 p.

Інститут теоретичної фізики
ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 24.05.2011

Н. С. Гончар, Д. А. Каплуненко

Вероятность банкротства банка при условии неограниченных выплат

Получена оценка вероятности банкротства банка, которая указывает величину начального капитала банка, при котором он способен функционировать без банкротства при достаточно маленькой вероятности систематического риска.

N. S. Gonchar, D. A. Kaplunenko

Probability of bank bankruptcy under unbounded payments

A bound on the probability of bank bankruptcy is obtained. This bound gives a possibility to determine the initial capital of bank, with which it can function without default if the probability of systematic risk of the loss of the bank capital is sufficiently small.