ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2012

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 517.977

Л. А. Власенко, член-корреспондент НАН Украины **С. И. Ляшко, А. Г. Руткас**

Об одной стохастической системе с импульсными воздействиями

Исследуется вырожденное стохастическое дифференциальное уравнение с импульсными воздействиями, которое встречается в финансово-экономической модели динамики корпорации предприятий. Получены условия существования и единственности решения начальной задачи.

В [1] описывается модель динамики n-мерного вектора $S(t)$ основных производственных фондов корпорации из n предприятий с учетом влияния импульсных внешних инвестиций при корпоративном использовании реинвестиционных средств предприятий. Полученное уравнение динамики оказалось не разрешенным относительно производной $S'(t)$ (см. формулу (37) в [1]). В данной работе, в отличие от [1], мы учитываем случайные возмущения при поступлении внешних инвестиций и влияние случайной окружающей среды на динамику основных фондов. Поэтому динамика основных производственных фондов $S(t)$ описывается *неявным стохастическим дифференциальным уравнением с импульсными воздействиями*

$$d[AS(t)] + BS(t)dt = f(t)dt + \beta d\zeta(t) + \Lambda dw(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь A, B, β — квадратные $n \times n$-матрицы; Λ — $n \times m$-матрица; $f(t)$ — n-мерный случайный процесс; $\zeta(t)$ — n-мерный процесс скачков; $w(t)$ — m-мерный винеровский процесс. Матрица A может быть необратимой и отражает корпоративное (взаимное) использование индивидуальных средств накопления предприятий. Элементы матрицы B зависят от прибыли и фондоотдачи предприятий. Компоненты векторов $f(t)$ и $\zeta(t)$ отвечают инвестициям, вложенным в каждое предприятие.

Стохастическое дифференциальное уравнение (1) будем понимать в смысле Ито. Подобно [2, гл. 1], стохастическое уравнение (1) содержит импульсное слагаемое. В отличие от уравнений в [2], уравнение (1) является неявным, т. е. не разрешенным относительно стохастического дифференциала $dS(t)$. Изучение уравнения (1) вызывает трудности, если матрица A в стохастическом дифференциале вырождена (не обратима). В этом случае уравнение будем называть *вырожденным* или *дифференциально-алгебраическим* (по аналогии с детерминированной ситуацией). Стохастические дифференциально-алгебраические уравнения без импульсной составляющей исследовались в [3–5]. В данной работе для анализа вырожденного стохастического дифференциального уравнения с импульсными воздействиями (1) применяется техника исследования детерминированных сосредоточенных и распределенных систем типа Соболева с импульсными воздействиями [6–10]. К исследованию статистики случайных процессов и, в частности, случайных процессов, являющихся решениями уравнения (1), можно применять теорию обобщенной разрешимости линейных уравнений [11, разд. 4.4].

Исследуем разрешимость уравнения (1) и получим явную формулу для решений. Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — полное вероятностное пространство с неубывающим семейством σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ ($\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$); $w(t)$ — винеровский процесс со значениями в $\mathbf{R}^m$, выходящий из нуля и согласованный с семейством σ-алгебр. Введем обозначения: $L_1(0,T;\mathbf{R}^n)$ — пространство вектор-функций со значения в $\mathbf{R}^n$, суммируемых на $[0,T]$; $W_1^l(0,T;\mathbf{R}^n)$ — пространство Соболева вектор-функций из $L_1(0,T;\mathbf{R}^n)$, у которых обобщенные производные до порядка l включительно принадлежат $L_1(0,T;\mathbf{R}^n)$. Относительно уравнения (1) предполагаем: матрицы и вектор-функции, входящие в уравнение, имеют вещественные коэффициенты; пучок матриц $\lambda A+B$ является регулярным ($\det(\lambda A+B) \not\equiv 0$); $f(t) = f(t,\omega)$ — неупреждающий случайный процесс со значениями в $\mathbf{R}^n$ такой, что $f(t,\omega) \in L_1(0,T;\mathbf{R}^n)P$-п. н.; $\zeta(t) = \zeta(t,\omega)$ — процесс скачков

$$\zeta(t,\omega) = \sum_{k=1}^{N} \widehat{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k), \qquad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = T, \tag{2}$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице — для положительных; $\widehat{\zeta}_k(\omega)$ — $\mathcal{F}_{t_k}$-измеримые случайные величины со значениями в $\mathbf{R}^n$.

Стохастическое уравнение в дифференциалах (1) с процессом скачков (2) можно переписать в виде

$$[AS(t)]' + BS(t) = f(t) + \beta \sum_{k=1}^{N} \widehat{\zeta}_k(\omega)\delta(t-t_k) + \Lambda w'(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; $w'(t)$ — обобщенная производная винеровского процесса (“белый шум”). Начальное условие для уравнения (3) задается в виде

$$(AS)(0,\omega) = \xi(\omega), \tag{4}$$

где $\xi(\omega)$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина со значениями в $\mathbf{R}^n$.

Принимая во внимание определения различных классов обобщенных решений операторных уравнений в абстрактных пространствах [11, гл. 2], введем понятие решения задачи (1), (2), (4) с импульсными (обобщенными) воздействиями. *Решением задачи* (1), (2), (4) называется неупреждающий случайный процесс $S(t,\omega) \in L_1(0,T;\mathbf{R}^n)$ P-п. н., который удовлетворяет стохастическим уравнениям

$$d[AS(t)] + BS(t)dt = f(t)dt + \Lambda dw(t), \qquad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1},$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, N$, в точках t_k P-п. н. удовлетворяет равенствам (импульсным воздействиям)

$$(AS)(t_k + 0, \omega) - (AS)(t_k - 0, \omega) = \beta\widehat{\zeta}_k(\omega), \qquad k = 1, \ldots, N,$$

и в начальный момент времени $t_0 = 0$ P-п. н. удовлетворяет начальному условию (4). Таким образом, решение $S(t)$ задачи (1), (2), (4) определяется последовательно для $k = 0, 1, \ldots, N$ через неупреждающие случайные процессы $S_k(t) \in L_1(t_k, t_{k+1}; \mathbf{R}^n)$ P-п. н., которые удовлетворяют уравнениям

$$AS_k(t) - \widehat{\xi}_k + \int\limits_{t_k}^{t} BS_k(s)\,ds = \int\limits_{t_k}^{t} f(s)\,ds + \Lambda w(t), \qquad \text{п. в.} \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}, \qquad \omega \in \Omega, \quad (5)$$

где

$$\widehat{\xi}_0(\omega) = \xi(\omega), \qquad \widehat{\xi}_k(\omega) = (AS_{k-1})(t_k, \omega) + \beta\widehat{\zeta}_k(\omega), \qquad k = 1, \ldots, N. \qquad (6)$$

Пусть пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен и контур Γ в комплексной плоскости охватывает все собственные числа пучка. Определим матрицу

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} (\lambda A + B)^{-1} d\lambda.$$

Известно [12], что пространство $\mathbf{R}^n$ распадается в прямые суммы

$$\mathbf{R}^n = X_1 \dot{+} X_2 = Y_1 \dot{+} Y_2, \qquad X_j = P_j \mathbf{R}^n, \qquad Y_j = Q_j \mathbf{R}^n, \qquad j = 1, 2,$$

где проекционные матрицы P_j, Q_j определяются как

$$P_1 = IA, \qquad P_2 = E - P_1, \qquad Q_1 = AI, \qquad Q_2 = E - Q_1.$$

Здесь символ E обозначает единичную матрицу. Далее, матрица

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B, \qquad GP_j = Q_j G, \qquad j = 1, 2,$$

обратима и обратная G^{-1} обладает следующими свойствами [9, подраздел 6.2]:

$$AG^{-1}Q_1 = Q_1, \qquad BG^{-1}Q_2 = Q_2, \qquad G^{-1}AP_1 = P_1, \qquad G^{-1}BP_2 = P_2.$$

Матрица

$$H = AG^{-1}Q_2 = Q_2 AG^{-1} = AP_2 G^{-1}$$

является нильпотентной с индексом нильпотентности r. Обозначим

$$C = -Q_1 BG^{-1} = -BG^{-1}Q_1 = -BP_1 G^{-1}.$$

Справедлива следующая теорема о разрешимости задачи (1), (2), (4).

Теорема 1. *Пусть выполняются такие предположения: пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен; $Q_2\Lambda = 0$; $Q_2\beta = 0$; $f(t) = f(t, \omega)$ — неупреждающий случайный процесс такой, что*

$f(t) = f(t,\omega) \in L_1(0,T;\mathbf{R}^n)$ P-п. н.; $Hf(t,\omega) = h(t)$ — детерминированная функция такая, что, если $r \geqslant 2$, то $H^j h(t) \in W_1^j(0,T;\mathbf{R}^n)$, $j = 1,\dots r-1$; $\widehat{\zeta}_k(\omega)$ — $\mathcal{F}_{t_k}$-измеримые случайные величины со значениями в Y_1, $k = 1,\dots,N$; $\xi(\omega)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина такая, что $Q_2\xi$ — детерминированный вектор, причем

$$Q_2\xi = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j}[H^j h(0)].$$

Тогда с точностью до стохастической эквивалентности существует единственное решение $S(t)$ задачи (1), (2), (4) и это решение P-п. н. допускает представление

$$S(t) = G^{-1}\Bigg\{ e^{Ct}Q_1\xi + \int_0^t e^{C(t-s)}Q_1 f(s)\,ds + \int_0^t e^{C(t-s)}\Lambda dw(s) + \\ + \sum_{k=1}^{N}\chi(t-t_k)e^{C(t-t_k)}\beta\widehat{\zeta}_k + \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}[H^j Q_2 f(t)]\Bigg\}, \qquad \text{п. в.} \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

где случайные векторы $\widehat{\xi}_k$ последовательно определяются в (6).

Доказательство. После применения к уравнению (5) проекционных матриц Q_1, Q_2 получаем, что каждое из уравнений (5) эквивалентно системе двух уравнений

$$GP_1S_k(t) - Q_1\widehat{\xi}_k = \int_{t_k}^t CGP_1S_k(s)ds + \int_{t_k}^t Q_1 f(s)\,ds + \Lambda w(t), \tag{8}$$

$$HGP_2S_k(t) - Q_2\widehat{\xi}_k + \int_{t_k}^t GP_2S_k(s)ds + \int_{t_k}^t Q_2 f(s)\,ds. \tag{9}$$

Так как r — индекс нильпотентности матрицы H, то в силу (9) однозначно находим

$$P_2S_k(t) = G^{-1}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{d^j}{dt^j}[H^j Q_2 f(t)], \qquad \text{п. в.} \qquad t \in [t_k, t_{k+1}], \qquad \omega \in \Omega. \tag{10}$$

Отсюда получаем необходимые ограничения на начальные векторы $\widehat{\xi}_k(\omega)$:

$$Q_2\widehat{\xi}_k = \sum_{j=0}^{r-1}\frac{d^j}{dt^j}[H^j h(t_k)]. \tag{11}$$

С помощью уравнения (8) устанавливается, что случайный процесс $v_k(t) = GP_1S_k(t)$ является решением следующей задачи для явного стохастического дифференциального уравнения:

$$dv_k(t) = Cv_k(t)dt + Q_1 f(t)dt + \Lambda dw(t), \qquad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}, \qquad v_k(t_k) = Q_1\widehat{\xi}_k.$$

Хорошо известно, что эта задача имеет единственное решение

$$v_k(t) = e^{C(t-t_k)}Q_1\widehat{\xi}_k + \int\limits_{t_k}^{t} e^{C(t-s)}Q_1 f(s)\,ds + \int\limits_{t_k}^{t} e^{C(t-s)}\Lambda dw(s). \tag{12}$$

Поэтому однозначно находим $P_1S_k(t) = G^{-1}v_k(t)$.

Таким образом, уравнение (5) имеет единственное решение $S_k(t) = P_1S_k(t) + P_2S_k(t) = G^{-1}v_k(t) + P_2S_k(t)$, где $P_2S_k(t)$, $v_k(t)$ определяются в (10), (12) соответственно.

Так как решение $S(t)$ задачи (3), (4) определяется последовательно для $k = 0, 1, \ldots, N$ через решения $S_k(t)$ уравнений (5) с начальными векторами $\widehat{\xi}_k(\omega)$ (6), то для того, чтобы установить однозначную разрешимость задачи (3), (4), осталось показать, что случайные векторы $\widehat{\xi}_k(\omega)$ (6) являются $\mathcal{F}_{t_k}$-измеримыми и удовлетворяют ограничению (11). По условию теоремы, случайный вектор $\widehat{\xi}_0(\omega) = \xi(\omega)$ является $\mathcal{F}_0$-измеримым и удовлетворяет ограничению (11) при $k = 0$. Для остальных случайных векторов $\widehat{\xi}_k(\omega)$, $k = 1, \ldots, N$, $\mathcal{F}_{t_k}$-измеримость и ограничение (11) устанавливаются последовательно через ограничения на $\widehat{\zeta}_k(\omega)$ и свойства последовательно определяемых с помощью формул (10), (12) решений $S_{k-1}(t)$.

Справедливость формулы (7) устанавливается последовательно для отрезков $[t_0, t_1], \ldots, [t_N, t_{N+1}]$ с помощью выражений для $S_k(t)$ через (10), (12) и представлений (6) для случайных начальных векторов $\widehat{\xi}_k(\omega)$. Теорема доказана.

В работе получена явная формула (7), которая описывает динамику основных производственных фондов предприятий в рассмотренной математической модели финансово-экономической деятельности корпорации предприятий, когда импульсные и непрерывные инвестиции являются случайными. Формула (7) справедлива, если характеристический матричный пучок $\lambda A + B$ является регулярным. Пучок будет регулярным, например, если матрица B обратима, как в соответствующей модели из [1]. Такая ситуация возникает, когда каждое предприятие направляет на другие предприятия значительно меньшую долю своей чистой прибыли на реинвестирование и погашение долгов, чем оставляет себе для этих же целей.

1. *Власенко Л. А., Лысенко Ю. Г., Руткас А. Г.* Математические модели динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования // Эконом. кибернетика. – 2009. – № 5–6 (59–60). – С. 64–71.
2. *Бенсусан А., Лионс Ж.-Л.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства. – Москва: Наука, 1987. – 600 с.
3. *Гиря Т. В., Осуала С., Руткас А. Г.* Об одном классе стохастических уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестн. Харьк. ун-та. Математика, механика. – 1986. – Вып. 286. – С. 29–34.
4. *Winkler R.* Stochastic differential algebraic equations of index 1 and applications in circuit simulation // J. Computat. and Appl. Math. – 2003. – **157**, No 2. – P. 477–505.
5. *Alabert A., Ferrante M.* Linear stochastic differential algebraic equations with constant coefficients // Electr. Comm. in Probability. – 2006. – **11**. – P. 316–335.
6. *Ляшко С. И.* Некоторые вопросы импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 3. – С. 368–371.
7. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 465 с.
8. *Власенко Л. А., Перестюк Н. А.* О разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 458–468.

9. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006. – 272 с.
10. *Власенко Л. А., Руткас А. Г., Самойленко А. М.* Проблема импульсного регулятора для одной динамической системы типа Соболева // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 8. – С. 1027–1034.
11. *Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A. et al.* Generalized solutions of operator equations and extreme elements. – Berlin: Springer, 2011. – 198 p.
12. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 11. – С. 1996. – 2010.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 02.06.2011

Л. А. Власенко, член-кореспондент НАН України **С. І. Ляшко, А. Г. Руткас**

Про одну стохастичну систему з імпульсними діями

Досліджується вироджене стохастичне диференціальне рівняння з імпульсними діями, що зустрічається у фінансово-економічній моделі динаміки корпорації підприємств. Отримано умови існування та єдиності початкової задачі.

L. A. Vlasenko, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **S. I. Lyashko, A. G. Rutkas**

On a stochastic impulsive system

We investigate a degenerate stochastic impulsive differential equation, which arises in the dynamical financial economic model of a corporation of companies. We obtain the existence and uniqueness conditions for the initial value problem.