УДК 517.91:532.26

Т. М. Пилипюк, викладач

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ—ФУР'Є—ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В КРАЙОВИХ УМОВАХ ТА УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя—Фур'є—Лежандра на полярній осі з виколотим полюсом та з двома точками спряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь в крайових умовах і умовах спряження.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, ядро Коші, вагова функція, спектральна функція, спектральна щільність, функції впливу, основна тотожність.*

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП), започаткованих в роботі [11]. Основні положення теорії ГІП закладено в роботі [12]. Ця стаття присвячена запровадженню одного з типів ГІП із спектральним параметром в умовах спряження та крайових умовах.

Основна частина. Розглянемо диференціальні оператори Бесселя, Лежандра та Фур'є: $B_{\upsilon,\alpha} = \dfrac{d^2}{dr^2} - q_3^2 + \dfrac{2\alpha+1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{\upsilon^2 - \alpha^2}{r^2}$ [1],

$\Lambda_{(\mu)} = \dfrac{d^2}{dr^2} + cthr\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu_1^2}{1-chr} + \dfrac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ [2], $\dfrac{d^2}{dr^2}$ [3], $2\alpha + 1 > 0$,

$\upsilon \geq \alpha$; $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1 \mu_2)$.

З допомогою одиничної функції Гевісайда $\theta(x)$ [4] утворимо гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\upsilon,\alpha} + \\ +\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)\Lambda_{(\mu)} a_3^2. \tag{1}$$

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \left\{ r: \;\; r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0 \right\}$ ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$, в припущенні, що в крайових умовах та в умовах спряження бере участь спектральний параметр.

Означення. Областю визначення ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \left\{ B_{\upsilon,\alpha}[g_1(r)]; g_2''(r); \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)] \right\}$ неперервна на I_2^+,
2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left. (\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0) g_1(r) \right|_{r=R_0} = 0, \;\; \lim_{r \to \infty} \left[r^\gamma g_3(r) \right] = 0, \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left. \left[(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k) g_k(r) - (\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k) g_{k+1}(r) \right] \right|_{r=R_k} = 0, \;\; j,k = 1,2. \tag{3}$$

У рівностях (2), (3) прийняті позначення: $\tilde{\alpha}_{11}^0 = \alpha_{11}^0 - \left(\beta^2 + \gamma^2 \right) \delta_{11}^0$, $\tilde{\beta}_{11}^0 = \beta_{11}^0 - \left(\beta^2 + \gamma^2 \right) \gamma_{11}^0$, $\tilde{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k - (\beta^2 + \gamma^2) \delta_{jm}^k$, $\tilde{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k - (\beta^2 + \gamma^2) \gamma_{jm}^k$, де $\gamma^2 \geq 0$ β — спектральний параметр.

Будемо вважати, що виконані умови на коефіцієнти:

$$\alpha_{11}^0 \leq 0, \; \beta_{11}^0 \geq 0, \; \left| \alpha_{11}^0 \right| + \beta_{11}^0 \neq 0; \; \alpha_{jm}^k \geq 0, \; \beta_{jm}^k \geq 0, \; \delta_{jm}^k \geq 0, \; \gamma_{jm}^k \geq 0;$$

$$c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0, \;\; c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k; \; c_{j2,k} \equiv \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0,$$

$$\alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k = \beta_{1j}^k \delta_{2j}^k - \beta_{2j}^k \delta_{1j}^k, \; a_1 > 0, \; a_2 > 0, \; a_3 > 0.$$

Визначимо величини

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1} c_{11,2}}{c_{21,1} c_{21,2}} \frac{shR_2}{R_1^{2\alpha+1}}, \; a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}} shR_2, \;\; a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\begin{gathered} \sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha+1} + \\ + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2)\sigma_3 shr \end{gathered} \tag{4}$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r),v(r)\big)=\int_0^{\infty}u(r)v(r)\sigma(r)dr\equiv\int_0^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha+1}dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr+\int_{R_2}^{\infty}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 shrdr. \tag{5}$$

Зауважимо, що із умов спряження (3) випливає базова тотожність:

$$\left[u_j'(r)v_j(r)-u_j(r)v_j'(r)\right]\Big|_{r=R_j}=$$
$$=\frac{c_{21,j}}{c_{11,j}}[u_{j+1}'(r)v_{j+1}(r)-u_{j+1}(r)v_{j+1}'(r)]\Big|_{r=R_j}. \tag{6}$$

Покажемо, що ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений оператор.

Згідно правила (5) розглянемо вираз

$$\Big(\mathrm{M}_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left[u(r)\right],v(r)\Big)=\int_{R_0}^{R_1}\Big(a_1^2B_{\upsilon,\alpha}\left[u_1(r)\right]\Big)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha+1}dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(a_2^2\frac{d^2u_2}{dr^2}\right)v_2(r)\sigma_2 dr+\int_{R_2}^{\infty}\Big(a_3^2\Lambda_{(\mu)}\left[u_3(r)\right]\Big)v_3(r)\sigma_3 shrdr. \tag{7}$$

Проінтегруємо в рівності (7) під знаками інтегралів два рази частинами:

$$\Big(M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[u(r)],v(r)\Big)=a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_0}^{R_1}+$$
$$+\sigma_2a_2^2\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1}^{r=R_2}+a_3^2\sigma_3\left[shr\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_2}^{\infty}+ \tag{8}$$
$$+\Big(u(r),M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[v(r)]\Big).$$

В силу крайової умови в точці $r=R_0$ вираз

$$\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_0}=\frac{1}{\tilde{\alpha}_{11}^0}\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0\right)u_1(r)\Bigg|_{r=R_0}\cdot v_1(R_0)-$$
$$-u_1(R_0)(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0)v_1(r)\Bigg|_{r=R_0}=\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1}[0\cdot v_1(R_0)-u_1(R_0)\cdot 0]=0. \tag{9}$$

В силу вибору чисел σ_1 та σ_2 і внаслідок базової тотожності (6) в точці $r=R_1$ знаходимо, що

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)_{r=R_1}-a_2^2\sigma_2\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)_{r=R_1}=$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha+1}\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-a_2^2\sigma_2\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\bigg|_{r=R_1}=\\
&=\left(\frac{c_{11,1}}{c_{21,1}}\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}shR_2\times\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}shR_2\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\bigg|_{r=R_1}=\\
&=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}shR_2(1-1)\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\bigg|_{r=R_1}=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

В силу вибору чисел σ_2 та σ_3 і внаслідок базової тотожності (6) в точці $r=R_2$ знаходимо, що

$$
\begin{aligned}
&a_2^2\sigma_2\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)_{r=R_2}-a_3^2\sigma_3 shR_2\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)_{r=R_2}=\\
&=\left(a_2^2\sigma_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-a_3^2\sigma_3 shR_2\right)\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\bigg|_{r=R_2}=\\
&=\left(\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}shR_2\cdot\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-shR_2\right)\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\bigg|_{r=R_2}=0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Внаслідок співвідношень (9)—(11) та умови обмеження в точці $r=\infty$ позаінтегральні доданки в рівності (8) дорівнюють нулю. Рівність (8) набуває вигляду

$$\left(M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[u],v\right)=\left(u,M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[v]\right). \tag{12}$$

Наявність рівності (12) означає, що ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ є самоспряжений. Звідси випливає, що власні числа ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ дійсні. Оскільки оператор $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r=\infty$, то його спектр неперервний.

Висновок: Спектр ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ дійсний та неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$
\begin{aligned}
V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)&=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)+\\
+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)&V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

При цьому функції $V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\left(B_{\upsilon,\alpha}+b_1^2\right)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ r\in(R_0,R_1),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2\right)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2)\,, \tag{14}$$

$$\left(\Lambda_{(\mu)}+b_3^2\right)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,\infty)\,,$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j=a_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\ge 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha}+b_1^2\right)v=0$ складають функції $J_{\upsilon,\alpha}(b_1r)$ та $N_{\upsilon,\alpha}(b_1r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}+b_3^2\right)v=0$ складають функції $A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr)$, $\upsilon_3^*=-1/2+ib_3$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2)v=0$ складають функції $\cos b_2r$ та $\sin b_2r$ [3].

В силу лінійності задачі (2), (3), (14) покладемо

$$V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=A_1J_{\upsilon,\alpha}(b_1r)+B_1N_{\upsilon,\alpha}(b_1r),\quad r\in(R_0,R_1)\,,$$

$$V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=A_2\cos b_2r+B_2\sin b_2r,\quad r\in(R_1,R_2)\,, \tag{15}$$

$$V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=A_3A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr)+B_3B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr),\quad r\in(R_2,\infty).$$

Крайова умова в точці $r=R_0$ та умови спряження (3) для визначення шести величин $A_j,B_j\,(j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$\begin{gathered}u_{\upsilon,\alpha;11}^{01}(b_1R_0)A_1+u_{\upsilon,\alpha;11}^{02}(b_1R_0)B_1=0\,,\\ u_{\upsilon,\alpha;j1}^{11}(b_1R_1)A_1+u_{\upsilon,\alpha;j1}^{12}(b_1R_1)B_1-\\ -v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2-v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=0,\quad j=1,2;\\ v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2+v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2-Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);21}(chR_2)A_3-Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);22}(chR_2)B_3=0.\end{gathered} \tag{16}$$

Сумісну алгебраїчну систему (16) розв'язуємо стандартним способом [5].

Нехай $A_1=-A_0u_{\upsilon,\alpha;11}^{02}(b_1R_0)$, $B_1=A_0u_{\upsilon,\alpha;11}^{01}(b_1R_0)$, де $A_0\ne 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи (16) стає тотожністю. Для визначення величин A_2,B_2 маємо алгебраїчну систему:

$$v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2+v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=A_0\delta_{\upsilon,\alpha;j1}(b_1R_0,b_1R_1),\quad j=1,2. \tag{17}$$

Визначник алгебраїчної системи (17) обчислюється безпосередньо:

$$v_{12}^{11}(b_2R_1)v_{22}^{12}(b_2R_1)-v_{22}^{11}(b_2R_1)v_{12}^{12}(b_2R_1)=c_{21,1}b_2\neq 0.$$

Алгебраїчна система (17) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_2=\frac{A_0}{c_{21,1}b_2}\Big[\delta_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_0,b_1R_1)v_{22}^{12}(b_2R_1)-\delta_{\upsilon,\alpha;21}(b_1R_0,b_1R_1)v_{12}^{12}(b_2R_1)\Big],\quad(18)$$

$$B_2=\frac{A_0}{c_{21,1}b_2}\Big[\delta_{\upsilon,\alpha;21}(b_1R_0,b_1R_1)v_{12}^{11}(b_2R_1)-\delta_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_0,b_1R_1)v_{22}^{11}(b_2R_1)\Big].$$

При відомих A_2, B_2 для визначення величин A_3, B_3 отримуємо алгебраїчну систему:

$$Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);21}(chR_2)A_3+Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);22}(chR_2)B_3=\frac{A_0}{c_{21,1}b_2}a_{\upsilon,\alpha;j}(\beta),\quad j=1,2.\quad(19)$$

Визначник алгебраїчної системи (19) обчислюється безпосередньо:

$$Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);21}(chR_2)Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);22}(chR_2)-Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);21}(chR_2)Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);22}(chR_2)=$$

$$=\frac{c_{21,2}}{S_{(\mu)}(b_3)shR_2}\equiv q_{(\mu)}(\beta)\neq 0.$$

Алгебраїчна система (19) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_0=c_{21,1}b_2q_{(\mu)}(\beta),\quad A_3=-\omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta),\quad B_3=\omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta).\quad(20)$$

У рівностях (17)—(20) беруть участь функції:

$$\delta_{\upsilon,\alpha;j1}(b_1R_0,b_1R_1)=u_{\upsilon,\alpha;11}^{01}(b_1R_0)u_{\upsilon,\alpha;j1}^{12}(b_1R_1)-u_{\upsilon,\alpha;11}^{02}(b_1R_0)u_{\upsilon,\alpha;j1}^{11}(b_1R_1),$$
$$j=1,2;$$

$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2)-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2);\quad j,k=1,2;$$

$$a_{\upsilon,\alpha;j}(\beta)=\delta_{\upsilon,\alpha;21}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2)-$$
$$-\delta_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2);\quad j=1,2;$$

$$\omega_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta)=a_{\upsilon,\alpha;2}(\beta)Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);2j}(chR_2)-a_{\upsilon,\alpha;1}(\beta)Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);2j}(chR_2),\quad j=1,2\,.$$

Всі інші функції загальноприйняті [6].

Підставивши обчислені за формулами (18) та (20) величини A_j та B_j $(j=\overline{1,3})$ у рівності (15), одержуємо функції:

$$V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=c_{21}b_2q_{(\mu)}(\beta)\times$$
$$\times[u_{\upsilon,\alpha;11}^{01}(b_1R_0)N_{\upsilon,\alpha}(b_1r)-u_{\upsilon,\alpha;11}^{02}(b_1R_0)J_{\upsilon,\alpha}(b_1r)]\equiv$$
$$\equiv c_{21}b_2q_{(\mu)}(\beta)\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{0}(b_1R_0,b_1r),$$

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(r,\beta)=q_{(\mu)}(\beta)[\delta_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_0,b_1R_1)\varphi^1_{22}(b_2R_1,b_2r)-$$
$$-\delta_{\upsilon,\alpha;21}(b_1R_0,b_1R_1)\varphi^1_{12}(b_2R_1,b_2r)],$$
$$\varphi^1_{j2}(b_2R_1,b_2r)=v^{12}_{j2}(b_2R_1)\cos b_2r-v^{11}_{j2}(b_2R_1)\sin b_2r\ , \qquad (21)$$
$$V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}(r,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\beta)B^{(\mu)}_{\upsilon_3^*}(chr)-\omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(\beta)A^{(\mu)}_{\upsilon_3^*}(chr)\,.$$

Згідно рівності (13) спектральна вектор-функція стає відомою (визначеною).

Введемо до розгляду спектральну щільність

$$\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)=\beta\boldsymbol{S}_{(\mu)}(b_3)\left(\left[\omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\beta)\right]^2+\left[\gamma_{(\mu)}(b_3)\right]\left[\omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}. \qquad (22)$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної вектор-функції $V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(r,\beta)$ та спектральної щільності $\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}$ та обернене $H^{-(\mu)}_{\upsilon,\alpha}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}$ [7]:

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}[g(r)]=\int\limits_{R_0}^{\infty}g(r)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta), \qquad (23)$$

$$H^{-(\mu)}_{\upsilon,\alpha}[\tilde{g}(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\tilde{g}(\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta\equiv g(r), \qquad (24)$$

де вектор-функція $g(r)\in G$.

Математичним обґрунтуванням формул (23) та (24) є твердження про інтегральне зображення вектор-функції $g(r)\in G$.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція

$$f(r)=\left[\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)r^{\alpha+1/2}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\cdot 1+\theta(r-R_2)\sqrt{shr}\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна та має обмежену варіацію на множині (R_0,∞), то для будь-якого $r\in I_2^+$ справджується інтегральне зображення

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(r,\beta)\int\limits_{R_0}^{\infty}g(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta. \qquad (25)$$

Доведення. Доведення теореми здійснимо методом дельта-подібної послідовності — ядро Коші: фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для сепаратної системи диференціальних теплопровідності параболічного типу, породженої ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}$.

Побудуємо обмежений в області $D_2^+ = \left\{(t,r): \ t \in (0,\infty); \ r \in I_2^+\right\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу [8]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\upsilon,\alpha}[u_1] = 0, \quad r \in (R_0, R_1),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = 0, \quad r \in (R_1, R_2), \tag{26}$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[u_3] = 0, \quad r \in (R_2, \infty)$$

з початковими умовами

$$u_1(t,r)\big|_{t=0} = g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1),$$
$$u_2(t,r)\big|_{t=0} = g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2), \tag{27}$$
$$u_3(t,r)\big|_{t=0} = g_3(r), \quad r \in (R_2, \infty),$$

однорідними крайовими умовами

$$\left(L_{11}^0[u_1]\right)\Big|_{r = R_0} = 0, \ \lim_{r\to\infty} \frac{\partial u_3}{\partial r} = 0 \tag{28}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k] - L_{j2}^k[u_{k+1}]\right)\Big|_{r = R_k} = 0; \quad j,k = 1,2. \tag{29}$$

Тут беруть участь диференціальні оператори

$$L_{j1}^0 = \left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t},$$

$$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}, \quad j,m,k = 1,2.$$

Припустимо, що шукана вектор-функція $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\}$ є оригіналом Лапласа стосовно t [9]. У зображенні за Лапласом одержуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Лежандра для модифікованих функцій

$$\left(B_{\upsilon,\alpha} - q_1^2\right)u_1^*(p,r) = -\overline{g}_1(r), \ r \in (R_0, R_1),$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right)u_2^*(p,r) = -\overline{g}_2(r), \ r \in (R_1, R_2), \tag{30}$$

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_3^2\right) u_3^*(p,r) = -\overline{g}_3(r),\ r \in (R_2, \infty)$$

з крайовими умовами

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0\right) u_1^*(p,r)\bigg|_{r=R_0} = 0,\ \lim_{r\to\infty} \frac{du_3^*}{dr} = 0 \qquad (31)$$

та однорідними умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k\right) u_k^*(p,r) - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k\right) u_{k+1}^*(p,r)\right]\bigg|_{r=R_k} = 0, \qquad (32)$$

$$j,k = 1,2.$$

У рівностях (30)—(32) беруть участь функції:

$$\overline{g}_j = a_j^{-2} g_j(r),\ u_k^*(p,r) = \int_0^\infty u_k(t,r) e^{-pt} dp,\ q_j^2 = a_j^{-2}(p + \gamma_j^2),$$

$$\overline{\alpha}_{11}^0 = \alpha_{11}^0 + p\delta_{11}^0,\ \overline{\beta}_{11}^0 = \beta_{11}^0 + p\gamma_{11}^0,\ \overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + p\delta_{jm}^k,$$

$$\overline{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k p,\ j,m,k = 1,2;\ p = \sigma + is \text{ з } \operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0,$$

де σ_0 — абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\operatorname{Im} p = s \in (-\infty, +\infty)$. При цьому ми вважаємо, що $\psi_{11}^0 \equiv \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 = 0$ та числа

$$\psi_{jk} = \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)] = 0,\ \ j,k = 1,2.$$

У протилежному випадку переходимо до нових початкових даних $\varphi_1(r) = g_1(r) - (a_1 r + b_1)$, $\varphi_2(r) = g_2(r) - (a_2 r + b_2)$, $\varphi_3(r) = g_3(r) - b_3$ й знаходимо числа a_1, a_2 та b_1, b_2, b_3 із системи алгебраїчних рівнянь

$$\left(\gamma_{11}^0 R_0 + \delta_{11}^0\right) a_1 + \gamma_{11}^0 b_1 = \psi_{11}^0, \qquad (33)$$

$$\left(\gamma_{j1}^k R_k + \delta_{j1}^k\right) a_k + \gamma_{j1}^k b_k - \left[\left(\gamma_{j2}^k R_k + \delta_{j2}^k\right) a_{k+1} + \gamma_{j2}^k b_{k+1}\right] = \psi_{jk},\ j,k = 1,2.$$

Тут $a_3 = 0$. Алгебраїчна система (33) при виконанні умов на коефіцієнти має єдиний розв'язок, який можна одержати, наприклад, за правилами Крамера [5].

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha} - q_1^2\right) v = 0$ складають модифіковані функції Бесселя $v_1 = I_{\upsilon,\alpha}(q_1 r)$ та $v_2 = K_{\upsilon,\alpha}(q_1 r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right) v = 0$ складають функції $v_1 = ch q_2 r$ та $v_2 = sh q_2 r$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} - q_3^2\right)v = 0$ складають узагальнені приєднані модифіковані функції Лежандра $P_{\upsilon_3}^{(\mu)}(chr)$ та $L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(chr)$, $\upsilon_3 = -1/2 + q_3$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (30)—(32) методом функцій Коші [3; 4]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 I_{\upsilon,\alpha}(q_1 r) + B_1 K_{\upsilon,\alpha}(q_1 r) + \int\limits_{R_0}^{R_1} E_1^*(p,r,\rho)\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho,$$

$$u_2^*(p,r) = A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r + \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)d\rho, \qquad (34)$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(chr) + \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho)\overline{g}_3(\rho)sh\rho d\rho.$$

У рівностях (34) $E_j^*(p,r,\rho)$ — функції Коші [3,4]:

$$E_1^*(p,r,\rho) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0, q_1R_1)} \times$$

$$\times \begin{cases} \Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{0*}(q_1R_0, q_1r)\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{1*}(q_1R_1, q_1\rho), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{0*}(q_1R_0, q_1\rho)\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{1*}(q_1R_1, q_1r), & R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \qquad (35)$$

$$E_2^*(p,r,\rho) = -\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)} \times$$

$$\times \begin{cases} \Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2r)\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2\rho), \; R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2r), \; R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \qquad (36)$$

$$E_3^*(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_3)}{Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu);22}(chR_2)} \times$$

$$\times \begin{cases} L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(ch\rho)F_{\upsilon_3;12}^{(\mu),2}(chR_2, chr), R_2 < r < \rho < \infty, \\ L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(chr)F_{\upsilon_3;12}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho), R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases} \qquad (37)$$

Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (32) для визначення п'яти величин A_1, A_2 та B_1, B_2, B_3 дають неоднорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$U_{\upsilon,\alpha;11}^{01}(q_1R_0)A_1 + U_{\upsilon,\alpha;11}^{02}(q_1R_0)B_1 = 0,$$

$$U_{\upsilon,\alpha;j1}^{11}(q_1R_1)A_1+U_{\upsilon,\alpha;j1}^{12}(q_1R_1)B_1-V_{j2}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{j2}^{12}(q_2R_1)B_2=\delta_{j2}G_{12}^*, \quad (38)$$
$$V_{j1}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{j1}^{22}(q_2R_2)B_2-Z_{\upsilon_3;j2}^{(\mu);22}(chR_2)B_3=\delta_{j2}G_{23}^*, \quad j=1,2.$$

У системі (38) беруть участь функції

$$G_{12}^*=\frac{c_{11}^*(p)}{R_1^{2\alpha+1}}\int\limits_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{0*}(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)}\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho+$$
$$+c_{21}^*\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\overline{g}_2(\rho)d\rho,$$
$$G_{23}^*=-c_{12}^*\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\overline{g}_2(\rho)d\rho+$$
$$+\frac{c_{22}^*}{shR_2}\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(ch\rho)}{Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu);22}(chR_2)}\overline{g}_3(\rho)sh\rho d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} [5].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\upsilon,\alpha;j}(p)=\Delta_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2)-$$
$$-\Delta_{\upsilon,\alpha;21}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$
$$B_{(\mu);j}(p)=Z_{\upsilon_3;22}^{(\mu);22}(chR_2)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)-$$
$$-Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu);22}(chR_2)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2), \quad j=1,2,$$
$$\Theta_{\upsilon,\alpha;1}(r,p)=\Delta_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2r)-$$
$$-\Delta_{\upsilon,\alpha;21}(q_1R_0,q_1R_1)\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r),$$
$$\Theta_{(\mu);2}(r,p)=Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu);22}(chR_2)\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2r)-$$
$$-Z_{\upsilon_3;22}^{(\mu);22}(chR_2)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (30)—(32): для $p=\sigma+is$ з $\operatorname{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\operatorname{Im}p=s\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (38) відмінний від нуля

$$\Delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(p)\equiv A_{\upsilon,\alpha;1}(p)Z_{\upsilon_3;22}^{(\mu);22}(chR_2)-A_{\upsilon,\alpha;2}(p)Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu);22}(chR_2)=$$
$$=\Delta_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)B_{(\mu);2}(p)-\Delta_{\upsilon,\alpha;21}(q_1R_0,q_1R_1)B_{(\mu);1}(p)\neq 0. \quad (39)$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (30) функції впливу:

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;11}(p,r,\rho)=\frac{q_1^{2\alpha}}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1r)\Big[B_{(\mu);2}(p)\Psi^{1*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_1,q_1\rho)-\\ \Psi^{0*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_1,q_1\rho)\Big[B_{(\mu);2}(p)\Psi^{1*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_1,q_1r)-\end{cases}$$

$$-B_{(\mu);1}(p)\Psi^{1*}_{\upsilon,\alpha;21}(q_1R_1,q_1\rho)\Big],\quad R_0<r<\rho<R_1,$$

$$-B_{(\mu);1}(p)\Psi^{1*}_{\upsilon,\alpha;21}(q_1R_1,q_1r)\Big],\quad R_0<\rho<r<R_1,$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;12}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{21}}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\Psi^{0*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1r)\Theta_{(\mu);2}(\rho,p)\ ,$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;13}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{21}\overset{*}{c}_{22}q_2}{shR_2\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\Psi^{0*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1r)L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(ch\rho)\,,$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;21}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\Psi^{0*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1\rho)\Theta_{(\mu);2}(r,p)\ ,\quad (40)$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;22}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Theta_{\upsilon,\alpha;1}(r,p)\Theta_{(\mu);2}(\rho,p),\quad R_1<r<\rho<R_2,\\ \Theta_{\upsilon,\alpha;1}(\rho,p)\Theta_{(\mu);2}(r,p),\quad R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;23}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{22}}{shR_2}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\cdot\Theta_{\upsilon,\alpha;1}(r,p)L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(ch\rho)\,,$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;31}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{11}\overset{*}{c}_{12}q_2}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\Psi^{0*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_1R_0,q_1\rho)L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(chr)\ ,$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;32}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{12}(p)}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\cdot\Theta_{\upsilon,\alpha;1}(\rho,p)L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(chr)\ ,$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;33}(p,r,\rho)=\frac{B_{(\mu)}(q_3)}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(ch\rho)\Big[A_{\upsilon,\alpha;2}(p)F^{(\mu);2}_{\upsilon_3;12}(chR_2,chr)-\\ L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(chr)\Big[A_{\upsilon,\alpha;2}(p)F^{(\mu);2}_{\upsilon_3;12}(chR_2,ch\rho)-\end{cases}$$

$$-A_{\upsilon,\alpha;1}(p)F^{(\mu);2}_{\upsilon_3;22}(chR_2,chr)\Big],\quad R_2<r<\rho<\infty,$$

$$-A_{\upsilon,\alpha;1}(p)F^{(\mu);2}_{\upsilon_3;22}(chR_2,ch\rho)\Big],\quad R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (38) й підстановки одержаних значень A_1, A_2 та B_1, B_2, B_3 у формули (34) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (30)—(32):

$$u_j^*(p,r)=\int\limits_{R_0}^{R_1} H_{\upsilon,\alpha;j1}^{(\mu)*}(p,r,\rho)\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho+$$
$$+\int\limits_{R_1}^{R_2} H_{\upsilon,\alpha;j2}^{(\mu)*}(p,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)d\rho+\int\limits_{R_2}^{\infty} H_{\upsilon,\alpha;j3}^{(\mu)*}(t,r,\rho)\overline{g}_3(\rho)sh\rho d\rho,\ j=\overline{1,3}. \quad (41)$$

Повертаючись до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (26)—(29):

$$u_j(t,r)=\int\limits_{R_0}^{R_1} H_{\upsilon,\alpha;j1}^{(\mu)}(t,r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho a_1^{-2}+$$
$$+\int\limits_{R_1}^{R_2} H_{\upsilon,\alpha;j2}^{(\mu)}(t,r,\rho)g_2(\rho)d\rho a_2^{-2}+ \quad (42)$$
$$+\int\limits_{R_2}^{\infty} H_{\upsilon,\alpha;j3}^{(\mu)}(t,r,\rho)g_3(\rho)sh\rho d\rho a_3^{-2},\ j=\overline{1,3}.$$

Тут за означенням

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}(p,r,\rho)e^{pt}d\rho,\ j,k=\overline{1,3}. \quad (43)$$

Особливими точками функцій впливу $H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2$, $p=-\gamma_2^2$, $p=-\gamma_3^2$ та $p=\infty$. Якщо покласти $q_j=ia_j^{-1}b_j\equiv ia_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, де $k_j^2\ge 0$, то одержимо, що $p=-(\beta^2+\gamma^2)$, $dp=-2\beta d\beta$. При $\gamma^2=\gamma_1^2>0$, $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\ge 0$; при $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\ge 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\gamma_2^2-$ $-\gamma_3^2\ge 0$; при $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\ge 0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\ge 0$, $k_3^2=0$.

Якщо скористатися методом контурного інтегралу, лемою Жордана й теоремою Коші [9], то формули (43) можна перетворити до розрахункових:

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{Im}\left\{H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}\left(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho\right)\right\}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta. \quad (44)$$

Тут $\gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}$; $j,k=\overline{1,3}$; $\mathrm{Im}(\cdots)$ означає уявну частину виразу $(\cdots)$, $P_*=(\beta^2+\gamma^2)e^{\pi i}\equiv-(\beta^2+\gamma^2)$.

Наведемо необхідні в подальшому співвідношення:

$V_{jk}^{m1}(ib_2R_m)\equiv v_{jk}^{m1}(b_2R_m)=-\tilde{\alpha}_{jk}^{m}b_2\sin b_2R_m+\tilde{\beta}_{jk}^{m}\cos b_2R_m$, $\overline{\alpha}_{jk}^{m}(p_*)\equiv\tilde{\alpha}_{jk}^{m}(\beta)$,

$$V_{jk}^{m2}(ib_2R_m) \equiv v_{jk}^{m2}(b_2R_m) =$$
$$= i[\tilde{\alpha}_{jk}^{m} b_2 \cos b_2R_m + \tilde{\beta}_{jk}^{m} \sin b_2R_m], \quad \overline{\beta}_{jk}^{m}(p_*) \equiv \tilde{\beta}_{jk}^{m}(\beta),$$
$$\Delta_{jk}(ib_2R_1, ib_2R_2) = i[v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2) -$$
$$-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2)] \equiv i\delta_{jk}(b_2R_1, b_2R_2),$$
$$\Delta_{\upsilon,\alpha;j1}(ib_1R_0, ib_1R_1) = -\frac{\pi}{2}e^{-\pi i\alpha}\delta_{\upsilon,\alpha;j1}(b_1R_0, b_1R_1); \quad \delta_{\upsilon,\alpha;j1}(b_1R_0, b_1R_1) =$$
$$= u_{\upsilon,\alpha;11}^{01}(b_1R_0)u_{\upsilon,\alpha;j1}^{12}(b_1R_1) - u_{\upsilon,\alpha;11}^{02}(b_1R_0)u_{\upsilon,\alpha;j1}^{11}(b_1R_1);$$
$$A_{\upsilon,\alpha;j}(p_*) = \tfrac{\pi i}{2}e^{-\pi i\alpha}[-\delta_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_0, b_1R_1)\delta_{2j}(b_2R_1, b_2R_2) + \delta_{\upsilon,\alpha;21}(b_1R_0, b_1R_1)\times$$
$$\times\delta_{1j}(b_2R_1, b_2R_2)] \equiv \frac{\pi i}{2}\exp(-\pi i\alpha)a_{\upsilon,\alpha;j}(\beta), \quad j = 1, 2;$$
$$Z_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);22}(chR_2) = Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);21}(chR_2) - i\gamma_{(\mu)}(b_3)Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);22}(chR_2), \quad \upsilon_3^* = -1/2 + ib_3;$$
$$\Delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(-(\beta^2 + \gamma^2)) = -\frac{\pi i}{2}e^{-\pi i\alpha}\{-a_{\upsilon,\alpha;1}(\beta)Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);21}(chR_2) +$$
$$+a_{\upsilon,\alpha;2}(\beta)Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);21}(chR_2) - i\gamma_{(\mu)}(b_3)\times$$
$$\times(-a_{\upsilon,\alpha;1}(\beta)Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);22}(chR_2) + a_{\upsilon,\alpha;2}(\beta)Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);22}(chR_2)\} \equiv$$
$$\equiv -\frac{\pi i}{2}e^{-\pi i\alpha}[\omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta) - i\gamma_{(\mu)}\omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)];$$
$$L_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr) = A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr) - i\gamma_{(\mu)}(b_3)B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr);$$
$$F_{\upsilon_{3;j2}^*}^{(\mu),2}(chR_2, chr) = -z_{(\mu)}(b_3)f_{\upsilon_{3;j2}^*}^{(\mu),2}(chR_2, chr) \equiv$$
$$\equiv -z_{(\mu)}(b_3)\left[Y_{\upsilon_{3;j2}^*}^{(\mu),21}(chR_2)B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr) - Y_{\upsilon_{3;j2}^*}^{(\mu),22}(chR_2)A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr)\right];$$
$$z_{(\mu)}(b_3) = \cos\mu_1\pi + i\gamma_{(\mu)}(b_3)\sin\mu_1\pi;$$
$$\gamma_{(\mu)}(b_3) = \cos\mu_1\pi sh(2\pi b_3)\left[\cos\mu_2\pi + \cos\mu_1\pi ch(2\pi b_3)\right]^{-1};$$
$$z_{(\mu)}(b_3)B_{(\mu)}(ib_3) \equiv S_{(\mu)}(b_3) = \frac{2^{\mu_1}\pi^3\gamma_{(\mu)}(b_3)\left|\Gamma(-\frac{1}{2} + ib_3 + \nu_{12}^-)\right|^{-2}}{2^{\mu_2}sh(2\pi b_3)\left|\Gamma(\frac{1}{2} + ib_3 + \nu_{12}^+)\right|^{2}};$$
$$\nu_{12}^{\pm} = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2);$$
$$\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{0*}(ib_1R_0, ib_1r) = -\frac{\pi}{2}\ell^{-\pi i\alpha}\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{0}(b_1R_0, b_1r) \equiv$$

$$\equiv -\frac{\pi}{2}e^{-\pi i\alpha}\left[u^{01}_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_0)N_{\upsilon,\alpha}(b_1r)-u^{02}_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_0)I_{\upsilon,\alpha}(b_1r)\right];$$

$$\Theta_{\upsilon,\alpha;1}(r,-(\beta^2+\gamma^2))=-\frac{\pi}{2}ie^{-\pi i\alpha}\left[\delta_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_0,b_1R_1)\varphi^1_{22}(b_2R_1,b_2r)-\right.$$
$$\left.-\delta_{\upsilon,\alpha;21}(b_1R_0,b_1R_1)\varphi^1_{12}(b_2R_1,b_2r)\right].$$

Виконавши зазначені у формулах (44) операції, одержуємо:

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;jk}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta a_k^2\sigma_k;\quad j,k=\overline{1,3}. \tag{45}$$

Розв'язок (42) параболічної задачі (26)—(29) набуває вигляду:

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)\left(\int_0^{R_1}g_1(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\rho,\beta)\rho^{2\alpha+1}\sigma_1d\rho\right)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)\left(\int_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(\rho,\beta)\sigma_2d\rho\right)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta+ \tag{46}$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)\left(\int_{R_2}^\infty g_3(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}(\rho,\beta)\sigma_3 sh\rho d\rho\right)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta;\quad j=\overline{1,3}.$$

Внаслідок початкових умов (27) та властивостей функцій впливу як дельта-подібних по t послідовностей при $t\to 0+$ маємо інтегральні зображення:

$$g_1(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_{R_0}^{R_1}g_1(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha+1}d\rho\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta, \tag{47}$$

$$g_2(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(\rho,\beta)\sigma_2d\rho\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta, \tag{48}$$

$$g_3(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_{R_2}^\infty g_3(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}(\rho,\beta)\sigma_3 sh\rho d\rho\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta. \tag{49}$$

Якщо рівність (47) помножити на $\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)$, рівність (48) помножити на $\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)$, а рівність (49) помножити на $\theta(r-R_2)$ і скласти, то одержимо інтегральне зображення (25).

В основі застосувань запровадженого ГІП знаходиться основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$.

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\left\{B_{\upsilon,\alpha}[g_1(r)];g_2''(r);\Lambda_{(\mu)}[g_3(r)];\right\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0\right)g_1(r)\Bigg|_{r=R_0}=g_0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\left[shr\left(\frac{dg_3}{dr}V^{(\mu)}_{\upsilon,\varepsilon;3}(r,\beta)-g_3(r)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\upsilon,\varepsilon;3}\right)\right]=0 \qquad (50)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\tilde{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{jk}, \qquad (51)$$

$$j,k=1,2,$$

то має місце ГІП ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left[M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-$$

$$-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde{g}_j(\beta)+(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}\sigma_1a_1^2R_0^{2\alpha-1}V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(R_0,\beta)g_0+ \qquad (52)$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\upsilon,\alpha;12}^k(\beta)\omega_{2k}-Z_{\upsilon,\alpha;22}^k(\beta)\omega_{1k}\right].$$

У рівності прийняті позначення:

$$d_1=a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha+1}:c_{11,1},\quad d_2=a_2^2\sigma_2:c_{11,2},$$

$$\tilde{g}_1(\beta)=\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha+1}dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta)=\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2dr,\quad \tilde{g}_3(\beta)=\int_{R_2}^{\infty}g_3(r)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3shrdr,$$

$$Z_{\upsilon,\alpha;j2}^k(\beta)=\left(\tilde{\alpha}_{j2}^k\,{}^{d}\!\big/_{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^k\right)V_{\upsilon,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_k},\quad j,k=1,2.$$

Доведення справедливості основної тотожності (52) здійснюється за логічною схемою доведення ідентичної теореми в [10].

Висновок: Встановлені правила (23), (24) та (52) складають математичний апарат для розв’язання відповідних стаціонарних та нестаціонарних задач математичної фізики в кусково-однорідних середовищах з м’якими межами.

Список використаних джерел:

1. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с.
2. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера—Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз,1959. — 468 с.
4. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
6. Ленюк М. П. Обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами гібридних диференціальних операторів другого порядку / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2010. — Т. VI. — 404 с.
7. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Ейлера, Бесселя, Лежандра). Частина 2 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економічна думка, 2011. — 384 с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
9. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.
10. Пилипюк Т. М. Гібридне інтегральне перетворення Бесселя—Фур'є—Лежандра на полярній осі із спектральним параметром в умовах спряження / Т. М. Пилипюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2010. — Ч. 1. — С. 150–169.
11. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93–106.
12. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економічна думка, 2004. — 368 с.

The method of delta-like sequence (Cauchy kernel) inculcates hybrid integral transformation of Bessel—Fourier—Legendre type on polar axis with with the pricked pole out and two points of interface in supposition, that a spectral parameter takes part in the in regional terms and terms of interface.

Key words: *hybrid differential operator, hybrid integral transformation, Cauchy kernel functions of influencing, spectral function, gravimetric function, spectral density, basic identity.*

Отримано: 03.09.2012