УДК 517.19

І. В. Малик, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Дорошенко, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

ЗБІЖНІСТЬ НАПІВМАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

У статті запропоновано підхід щодо доведення слабкої збіжності напівмарковського процесу до розв'язку диференціального рівняння в умовах, що накладаються на локальні характеристики напівмарковського процесу.

Ключові слова: *напівмарковський процес, компенсуючий оператор, слабка збіжність.*

Вступ. Слабкій збіжності випадкових процесів присвячена велика кількість робіт (див., наприклад, [1—5; 7; 8]). У роботі [1] доведено слабку збіжність для напівмарковських процесів у термінах компенсуючи операторів. Зауважимо, що у роботі [1] умови накладаються не на локальні характеристики напівмарковського процесу, а на розподіли процесів, що ускладнює їх перевірку. У роботі [8], де розглядаються диференціально-функціональні рівняння запізнюючого типу з випадковими операторами, наводяться умови слабкої збіжності у схемі усереднення та дифузійної апроксимації. У роботі [8] для доведення слабкої збіжності накладено умови лише на локальні характеристики випадкових операторів.

Розглянемо напівмарковський процес $\eta(t)$ у евклідовому просторі $R^d, d \ge 1$, що породжується процесом марковського відновлення (ПМВ) (див., наприклад, [5])

$$(\eta_n, \tau_n), n \ge 0,$$

тобто

$$\eta(t) := \eta_{\nu(t)},$$

де $\nu(t) := \max\limits_{n \ge 0}\{n : \tau_n < t\}$ — рахуючий процес.

Позначимо час перебування в станах через

$$\theta_n := \tau_n - \tau_{n-1}, n > 0 .$$

ПМВ визначається стохастичним ядром, яке задає умовні імовірності величин стрибків та функції розподілу часів перебування в станах

$$Q(u, dv, t) := P\{\Delta\eta_{n+1} \in dv, \theta_{n+1} \le t \ \big| \eta_n = u\} = \Gamma(u, dv) F_u(t),$$

$$\Gamma(u, dv) := P\{\Delta\eta_{n+1} \in dv \ \big| \eta_n = u\}, \Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n, u \in R^d, dv \in \beta^d,$$

$$F_u(t) := P\{\theta_{n+1} \le t \ |\eta_n = u\} = P(\theta_u \le t), t \ge 0 .$$

Введемо нормований малим параметром серії $\varepsilon \to 0 \ (\varepsilon > 0)$ випадковий процес

$$\zeta^\varepsilon(t) := \varepsilon\eta(t/\varepsilon) . \quad (1)$$

З (1) неважко побачити, що для моментів стрибків τ_n^ε, часу перебування θ_n^ε та величин стрибків η_n^ε при $\varepsilon > 0$ будуть мати місце співвідношення:

$$\tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n \ , \ \theta_n^\varepsilon = \varepsilon\theta_n \ , \ \eta_n^\varepsilon = \varepsilon\eta_n .$$

Введемо позначення:

$$a(u) := \int_{R^d} v\Gamma(u,dv) \ , \ B(u) := \int_{R^d} v^* v\Gamma(u,dv) ,$$

$$b(u) := 1/f(u) \ , \ f(u) := E\theta_u = \int_0^\infty \overline{F}_u(t)dt, \ \ \overline{F}_u(t) := 1 - F_u(t).$$

Зауважимо, що $a(u)$ — середня величина стрибка, $B(u)$ — другий момент стрибка, $f(u)$ — середня величина часу перебування у стані, $b(u)$ — усереднена інтенсивність часу перебування у стані.

Означення 1. [2; 6] Компенсуючий оператор НМП $\zeta^\varepsilon(t), t \ge 0$, він же генератор супроводжуючого марковського процесу (СМП) $\zeta_0^\varepsilon(t), t \ge 0$, діє на тест-функціях $\varphi(u,t)$ та визначається рівністю

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u,t) := E[\varphi(\zeta_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u,t) \ \left| \zeta_n^\varepsilon = u, \tau_n^\varepsilon = t \right.] / E[\theta_{n+1}^\varepsilon \left| \zeta_n^\varepsilon = u \right.] .$$

Тоді має місце така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) обмеженість першого моменту величини стрибка:

$$\int_{R^d} |v| \Gamma(u,dv) \le c_1 < \infty ;$$

2) обмеженість другого моменту величини стрибка:

$$\|B(u)\| \le c_2 < \infty ;$$

3) рівномірна інтегрованість (обмеженість часу перебування в стані):

$$\sup_{u \in R^d} \int_T^\infty \overline{F}_u(t)dt \to 0 \ \text{ при } \ T \to \infty ;$$

4) для $\forall \ u \in R^d$ та $\forall \ \varepsilon > 0$ існує $C > 0$ таке, що

$$Ee^{-\varepsilon\theta_u} \le 1 - C\varepsilon ;$$

5) має місце збіжність початкових умов

$$\eta^{\varepsilon}(0) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

та

$$\sup_{\varepsilon>0} E\left|\eta^{\varepsilon}(0)\right| \le K < +\infty .$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$\zeta^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \zeta^{0}(t) , \ \varepsilon \to 0 ,$$

де $\zeta^{0}(t)$ розв'язок диференціального рівняння

$$d\zeta^{0}(t)/dt = C(\zeta^{0}(t)) ,$$
$$C(u) = a(u)b(u) .$$

Зауваження 1. Умова 4) означає, що

$$P\{\theta_u^{\varepsilon} > 0\} \ge K > 0 \text{ для } \forall \ \varepsilon > 0 .$$

Доведення. Доведемо, що

$$f(u) \ge K > 0 .$$

Припустимо, що це не так, тобто $\exists \ u_0 \in R^d$ таке, що $f(u_0) = 0$. За означенням $f(u)$ маємо

$$\int_0^{\infty} \overline{F}_{u_0}(t)dt = 0 ,$$

тобто $P\{\theta_{u_0} = 0\} = 1$. Тоді $Ee^{\varepsilon\theta_{u_0}} = 1$, що суперечить умові 4). Прийшли до суперечності. Тобто для $\forall \ u \in R^d$:

$$f(u) \ge K > 0 \ \Leftrightarrow b(u) \le \frac{1}{K} < \infty .$$

КО має вигляд

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u,t) := \varepsilon^{-1} b(u) \int_0^{\infty} F_u(ds) \int_{R^d} [\varphi(u+\varepsilon v, t+\varepsilon s) - \varphi(u,t)]\Gamma(u,dv) . \quad (3)$$

Справді, за означенням (1) маємо

$$\zeta_{n+1}^{\varepsilon} - \zeta_n^{\varepsilon} = \varepsilon(\eta_{n+1} - \eta_n) := \varepsilon\Delta\eta_{n+1} ; \ \tau_n^{\varepsilon} = \varepsilon\tau_n .$$

Отже

$$b^{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} b(u) .$$

Тоді обчислюємо

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u,t) := E[\varphi(\zeta^{\varepsilon}{}_{n+1}, \tau^{\varepsilon}{}_{n+1}) - \varphi(u,t) \ \left| \zeta^{\varepsilon}{}_n = u, \tau^{\varepsilon}{}_n = t \right.] / E[\theta^{\varepsilon}{}_{n+1} \left| \zeta_n^{\varepsilon} = u \right.] =$$

$$= E[\varphi(\zeta^{\varepsilon}{}_n + \Delta\zeta^{\varepsilon}{}_{n+1}, t + \varepsilon\theta_{n+1}) - \varphi(u,t) \ \left| \zeta^{\varepsilon}{}_n = u, \tau^{\varepsilon}{}_n = u \right.] / E[\varepsilon\theta \ {}_{n+1} \left| \zeta_n^{\varepsilon} = u \right.] =$$

$$= \varepsilon^{-1} b(u) \int_0^\infty F_u(ds) \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v, t + \varepsilon s) - \varphi(u, t)] \Gamma(u, dv) .$$

Розглянемо клас нескінченно диференційовних функцій φ, які будемо називати тест-функціями. Доведемо, що на тест-функціях $\varphi(u)$ КО має асимптотичне представлення

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \Gamma^0 \varphi(u) + R^\varepsilon \varphi(u) ,$$

де Γ^0 задається співвідношенням

$$\Gamma^0 \varphi(u) = C(u) \varphi'(u) , \tag{4}$$

та

$$\left| R^\varepsilon \varphi(u) \right| \to 0 ,\ \varepsilon \to 0 ,\ \varphi(u) \in C^3(R^d) . \tag{5}$$

Згідно (3) отримаємо

$$\varepsilon^{-1} b(u) \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u) \pm \varepsilon v \varphi'(u)] \Gamma(u, dv) = a(u) b(u) \varphi'(u) +$$

$$+ \frac{b(u)}{\varepsilon} \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u) - \varepsilon v \varphi'(u)] \Gamma(u, dv) = \Gamma^0 \varphi(u) + R^\varepsilon \varphi(u) ,$$

де Γ^0 визначається (4). Доведемо (5). Маємо:

$$\left| R^\varepsilon \varphi(u) \right| \le \frac{b(u)}{\varepsilon} \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u) - \varepsilon v \varphi'(u)] \Gamma(u, dv) \le$$

$$\le K \sup_{u \in R^d} \left| \varphi''(u) \right| \varepsilon \left\| B(u) \right\| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0 .$$

Доведемо компактність процесів $\zeta^\varepsilon(t)$, $\varepsilon > 0$. Для цього спочатку доведемо, що

$$\left| \Gamma^\varepsilon \varphi(u) \right| \le C_\varphi \tag{6}$$

для тест-функцій $\varphi(u) \in C_0^2(R^d)$ простору фінітних обмежених неперервних функцій що мають обмежені похідні до порядку 2 включно.

Скористаємось (4):

$$\left| \Gamma^\varepsilon \varphi(u) \right| = \left| \Gamma^0 \varphi(u) + R^\varepsilon \varphi(u) \right| \le \left| \Gamma^0 \varphi(u) \right| + \left| R^\varepsilon \varphi(u) \right| \le$$

$$\le \left| b(u) \right| \sup_{u \in R^d} \left| \varphi'(u) \right| \int_{R^d} \left| v \right| \Gamma(u, dv) + \left| b(u) \sup_{u \in R^d} \left| \varphi''(u) \right| \varepsilon B(u) \right| .$$

За означенням функції φ

$$\sup_{u \in R^d} \left| \varphi'(u) \right| < K_1 < \infty ,\ \sup_{u \in R^d} \left| \varphi''(u) \right| < K_2 < \infty .$$

Тоді

$$\left|\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)\right| \le c(K_1 c_1 + \varepsilon K_2 c_2)\,,$$

де сталі K_1, K_2 — залежні від φ.

Надалі для доведення необхідно застосувати такий факт:

Лема 1 [4]. Нехай сім'я моментів відновлення θ_u, $u \in R^d$, що мають функції розподілу F_u, задовольняють умови 3), 4).

Тоді має місце співвідношення

$$P\left(\max_{0\le t\le T}\gamma^{\varepsilon}(t) \ge \delta\right) \to 0\,,\ \varepsilon \to 0\,,$$

для будь-яких $\delta > 0$ та $T > 0$, де $\gamma^{\varepsilon}(t) := t - \tau^{\varepsilon}(t)$.

Ведемо до розгляду випадкові процеси:

$$\eta_{+}^{\varepsilon}(t) := \eta^{\varepsilon}(\tau_{+}^{\varepsilon}(t))\,,\ \eta_{\tau}^{\varepsilon}(t) := \eta^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}(t))\,,\ t \ge 0\,,$$

де $\tau_{+}^{\varepsilon}(t) = \tau^{\varepsilon}(t) + 1$.

Розглянемо випадковий процес

$$\mu_t^{\varepsilon} := \varphi(\eta^{\varepsilon}(t)) - \int_0^t \Gamma^0\varphi(\eta^{\varepsilon}(s))ds\,.$$

Тоді

$$E[\mu_t^{\varepsilon}] = E\left[\varphi(\eta^{\varepsilon}(t)) - \int_0^t \Gamma^0\varphi(\eta^{\varepsilon}(s))ds\right] = E[\varphi(\eta^{\varepsilon}(t)) - \varphi(\eta_{+}^{\varepsilon}(t))] +$$

$$+E\left[\varphi(\eta_{+}^{\varepsilon}(t)) - \int_0^{\tau_{+}^{\varepsilon}(t)} \Gamma^{\varepsilon}\varphi(\eta_{+}^{\varepsilon}(s))ds\right] +$$

$$+E\left[\int_0^{\tau_{+}^{\varepsilon}(t)} \Gamma^{\varepsilon}\varphi(\eta_{+}^{\varepsilon}(s))ds - \int_0^t \Gamma^{\varepsilon}\varphi(\eta_{+}^{\varepsilon}(s))ds\right] +$$

$$+E\int_0^t \Gamma^{\varepsilon}[\varphi(\eta_{+}^{\varepsilon}(s)) - \varphi(\eta^{\varepsilon}(s))]ds + E\int_0^t [\Gamma^{\varepsilon}\varphi(\eta^{\varepsilon}(s)) - \Gamma^0\varphi(\eta^{\varepsilon}(s))]ds\,.$$

Третій доданок згідно (6) та леми 1 задовольняє співвідношення

$$E\int_t^{\tau_{+}^{\varepsilon}} \Gamma^{\varepsilon}\varphi(\eta_{\tau}^{\varepsilon}(s))ds \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0\,.$$

Аналогічно доводиться збіжність до 0 першого та четвертого доданків завдяки неперервності $\varphi(u)$.

Останній доданок прямує до 0 згідно (5), бо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \Gamma^0\varphi(u)$$

на тест-функціях $\varphi(u)$, що мають рівномірно обмежені похідні всіх порядків.

Другий доданок дорівнює

$$\zeta_t^\varepsilon := \varphi(\eta_+^\varepsilon(t)) - \int\limits_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} \Gamma^\varepsilon \varphi(\eta_+^\varepsilon(s))ds$$

і має мартингальну властивість згідно леми 6.1 в [5].

Скористаємось його мартингальною властивістю:

$$E\zeta_t^\varepsilon = E\zeta^\varepsilon(0) = E\varphi(\eta^\varepsilon(0)) .$$

Остаточно маємо:

$$E\mu_t^\varepsilon = E\varphi(\eta^\varepsilon(0)) + r^\varepsilon ,$$

де $r^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Тепер з умови 5) теореми отримуємо:

$$E\mu_t = E\varphi(\eta(0)) ,$$

тобто μ_t-мартингал.

Доведемо, що $\zeta_t^\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, $\varepsilon > 0$ — відносно компактна сім'я.

Умови відносної компактності сім'ї ζ^ε згідно теореми 1.2 [1] наступні: умова субмартингальності $\xi^\varepsilon(t) := \varphi(\zeta^\varepsilon(t)) + C_\varphi t$ для невід'ємної фінітної нескінченно диференційованої φ та деякої константи $C_\varphi \ge 0$ та нерівність (6).

Доведемо, що випадковий процес $\xi^\varepsilon(t)$ є невід'ємним субмартингалом відносно потоку σ-алгебр:

$$E[\xi^\varepsilon(t) - \xi^\varepsilon(s) \big| \mathcal{F}_t^\varepsilon] = E[\varphi(\zeta^\varepsilon(t)) - \varphi(\zeta^\varepsilon(s)) \big| \mathcal{F}_t^\varepsilon] + C_\varphi(t-s) =$$

$$= E\left[\int\limits_s^t \Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon(u))du \Big| \mathcal{F}_s^\varepsilon\right] + C_\varphi(t-s) =$$

$$= E\left[\int\limits_{\tau_+^\varepsilon(s)}^{\tau_+^\varepsilon(t)} (\Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon(u)) + C_\varphi)du \Big| \mathcal{F}_s^\varepsilon\right] +$$

$$+E\left[\left(\int\limits_s^{\tau_+^\varepsilon(s)} + \int\limits_{\tau_+^\varepsilon(t)}^t\right)\Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon(u))du \Big| \mathcal{F}_s^\varepsilon\right] + C(t - \tau_+^\varepsilon(t) - s + \tau_+^\varepsilon(s)) .$$

Оскільки на тест-функціях $\Gamma^\varepsilon \varphi$ — обмежений, то два останні доданки прямують до 0 при $\varepsilon \to 0$. Використовуючи (6), отримаємо співвідношення

$$E\left[\int_{\tau_+^\varepsilon(s)}^{\tau_+^\varepsilon(t)} (\Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon(u)) + C_\varphi) du \middle| \mathcal{F}_s^\varepsilon \right] \geq 0 .$$

Вимірність процесу $\xi^\varepsilon(t)$ відносно потоку $\mathcal{F}_t^\varepsilon$ очевидна.

Таким чином, ($\xi^\varepsilon(t)$, $\mathcal{F}_t^\varepsilon$) — невід'ємний субмартингал.

Користуючись тим, що сім'я η^ε — відносно компактна та граничний оператор задає мартингал, на основі умови 4), робимо висновок про те [7], що

$$\zeta^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta^0(t) .$$

Теорема 1 доведена.

Приклад. Розглянемо відрізок $[a,b]$, $a<b$. Будь-якому $u \in R^1$ поставимо у відповідність розподіл стрибків $\Gamma(u,x)$:

$$\Gamma(u,x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ x \in (0, b-a]; \\ 1, \ x > b-a. \end{cases}$$

Час перебування в станах тотожно дорівнює 1, тобто $\forall u \in R^1$:

$$F_u(t) = \begin{cases} 0, \ t \leq 1; \\ 1, \ t > 1. \end{cases}$$

Покладемо $\eta^\varepsilon(0) \equiv 0$.

Тоді сім'я напівмарковських процесів η^ε , $\varepsilon > 0$, що породжується стохастичним ядром (див. стор. 1) задовольняє умови теореми 1 та слабко збігається до розв'язку диференціального рівняння

$$d\zeta^0(t) / dt = \frac{a+b}{2} ,$$

що задовольняє початкову умову

$$\zeta^0(0) = 0 .$$

тобто граничний процес має вигляд

$$\zeta^0(t) = \left(\frac{a+b}{2} \right) t .$$

Висновки. Розглянуто достатні умови слабкої збіжності напівмарковських процесів у схемі усереднення за умов, що накладаються лише на локальні характеристики напівмарковського процесу. Оскільки умови накладаються лише на моменти елементів процесу марковського відновлення, то це забезпечує їх відносно просту перевірку за допомогою прикладних програм. Зауважимо, що перевірка умов теореми за допомогою прикладних програм і є основним критерієм практичності даної теореми, тому результати даної роботи носять не лише теоретичний, а і практичний характер, що дає ще один спосіб моделювання розв'язку звичайного диференціального рівняння.

Список використаних джерел:

1. Свириденко М. Н. Об условиях сходимости семейства полумарковских процессов к марковскому процессу / М. Н. Свириденко. — ВИНИТИ, 1986. — № 37.
2. Wentzell A. D. Limit Theorems on Large Deviations for Markov Stochastic Processes / A. D. Wentzell. — Kluwer : Dordrecht, 1990
3. Stroock D. W. Multidimensional Diffusion Processes / D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan. — Berlin : Springer-Verlag, 1979.
4. Самойленко І. В. Збіжність напівмарковського і супроводжуючого марковського процесу до марковського процесу / І. В.Самойленко, І. В. Малик // Укр. матем. журн. — 2010. — Т. 62, №5. — С. 674–681.
5. Koroliuk V. S. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. S. Koroliuk, N. Limnios. — Singapore : World Scientific Publishers, 2005.
6. Sviridenko M. N. Martingale characterization of limit distributions in the space of functions without discontinuities of second kind / M. N. Sviridenko // Math. Notes, — 1998. — Vol. 43, № 5. — P. 398–402.
7. Ethier S. N. Markov processes: characterization and convergence / S. N. Ethier, T. G. Kurtz. — New York : J. Wiley Sons, 1986.
8. Skorokhod A. V. Random perturbation methods with application in science and engineering / A. V. Skorokhod, F. C. Hoppenstead, H. Salrhi. — New York : Springer, 2002.

The paper presents an approach to proving weak convergence of semi-Markov process to solving a differential equation in conditions imposed on the local characteristics of semi-Markov process.

Key words: *semi-Markov process, compensating operator, weak convergence.*

Отримано: 28.03.2012