12. Ємець О. О. Прямий метод відсікання для задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2011. — №1. — С. 36–43.

The combinatorial problem of finding of the maximal flow in a network is considered in the paper. This problem is a Euclidean combinatorial problem on arrangements. The approximate algorithm for solution of this problem is proposed. The polynomial estimation of complexity of this algorithm found.

Key words: *maximum flow, combinatorial optimization, arrangements, greedy algorithm.*

Отримано: 05.06.2012

УДК 519.8(075)

Л. В. Іващенко, аспірант
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана», м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПІДКРІПЛЕННЯ БАНКОМАТІВ ГОТІВКОВИМИ КОШТАМИ

У статті розроблена математична модель управління залишком готівкових коштів у банкоматі з використанням теорії управління запасами та теорії масового обслуговування.

Ключові слова: *банкомат, стохастична модель, модель керування запасами Уілсона.*

Постановка проблеми. За оцінками фахівців, на сьогодні у світі налічується 2,3 млн. банкоматів, а до 2016 року їх кількість зросте до 3,2 млн. одиниць. Багато фінансових інститутів завантажують у банкомати на 40% більше готівки, ніж необхідно для їх ефективної роботи, а у структурі витрат на експлуатацію банкоматів від 35 до 60% припадають саме на витрати, пов'язані з готівкою, така політика управління готівковими коштами позбавляє банк значних фінансових ресурсів, які можна раціональніше використовувати у інших напрямках [1].

Отже, у сучасних умовах оптимізація потоків готівки, які спрямовуються на виплату клієнтам саме через банкомати є актуальною проблемою теорії і практики.

Аналіз останніх джерел чи публікацій. Проблематика дослідження у контексті визначення оптимального управління готівковими грошовими коштами висвітлювалася у публікаціях В. Соловйова, В. Ткалича, А. Кистанова, Н.Васіна, Д. В. Пастухова, В. Д. Іушиної та інших.

Постановка завдання. На сьогодні існують програмні продукти, які покликані вирішувати питання оптимізації управління готівковими коштами, які завантажуються у банкомати. Проте вони часто досить громіздкі і дорогі, внаслідок чого їх ефективність для впровадження у невеликій фінансово-кредитній установі залишається під питанням, хоча розробниками анонсується ефективність впровадження таких рішень і для «невеликих» мереж — близько 100 банкоматів [2, с. 27]. У той же час, за даними НБУ станом на 01.07.2012 р. мережі 97 із 132 комерційних банків налічують менше 100 банкоматів, при цьому мережі з 50 АТМ них налічують менше 85 з них [3] (рисунок 1).

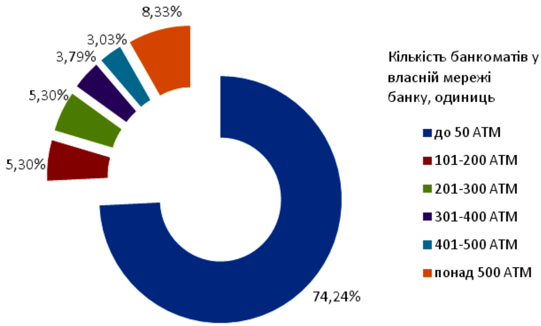

Рис. 1. *Розподіл комерційних банків за кількістю банкоматів у власній банкоматній мережі*

Інакше кажучи, тільки близько 25% українських банків мають мережу, для якої впровадження автоматизованої системи для контролю і прогнозування потреби у готівці у банкоматах є економічно виправданим. Проте у практичній діяльності, навіть у банках з досить розгалуженою банкоматною мережею оптимальні суми забезпечення точок обслуговування готівкою часто визначаються «на око», спираючись на досвід відповідних працівників банку, досвід діяльності за минулі періоди, плани чи прогнози, а часто здійснюється навіть хаотично [4, с. 55].

У результаті ситуація, коли готівкові кошти тривалий час лежать у банкоматі чи касі відділення і не запитуються клієнтами, так само типова для вітчизняних банків, як і ситуація, коли кошти закінчилися у найневдаліший момент і вимоги клієнтів щодо отримання готівки залишаються незадоволеними.

Банківська діяльність є складною для моделювання. Математичні й імітаційні моделі мають найнижчу матеріалоємність, що дозволяє виключити соціальний ризик при проведенні численних експериментів, також, їх підготовка не вимагає багато часу. Саме тому найдоцільніше використовувати саме ці типи моделей для моделювання банківської діяльності.

Основу банківських математичних моделей складають детерміновані, стохастичні моделі та моделі на основі теорії нечітких множин [5, с. 27].

Кожен окремий банкомат є елементом мережевої структури, у якій стохастична поведінка кожного окремого елемента трансформується в детерміновану поведінку системи як цілого. Тому для опису роботи банкомата пропонується стохастична модель теорії масового обслуговування для поетапного обслуговування вимог.

Викладення основного матеріалу дослідження. Зазвичай, коли мова йде про теорію масового обслуговування, у якості «вимог», які очікують обслуговування розглядають клієнтів, а під задоволенням вимог розуміють забезпечення клієнта товаром (грошима) з наявних запасів.

Проте, ми можемо розглянути кошти, не клієнтів, які мають намір отримати готівку як вимоги, які очікують на обслуговування, а запаси — у нашому випадку готівку — як вимоги, які стоять у черзі в очікуванні бути виданими клієнтам. Вперше таку задачу для запасів товарів у магазині розглянув Міттен [6].

Отже, спробуємо розглянути з цієї точки зору роботу банкомата. Банкомат являє собою одно канальну систему. Підкріплення каси банкомата готівкою здійснюється у випадкові моменти часу з параметром μ, який визначає щільність (інтенсивність) потоку вимог [7, с. 109] і має пуасонівський розподіл. Клієнти також підходять до банкомату у випадкові моменти часу з інтенсивністю λ і цей потік також має пуассонівський розподіл. Якщо ми припустимо, що $P_m(t)$ — ймовірність того, що залишок коштів у момент часу t у банкоматі дорівнює n, то $P_0(t)$ — відповідно, ймовірність того, що у момент часу t кошти у банкоматі закінчилися. Таким чином, кошти які є у касі банкомата «очікують» у черзі на обслуговування — видачу клієнтам.

Кошти, які підлягають видачі клієнтам з каси банкомата, видаються по черзі, у порядку, у якому банкноти були закладені до касет, залежно від того, яку суму замовив клієнт, та з урахуванням певного алгоритму, встановленого банком, або обраного клієнтом та наявного залишку купюр у касетах.

Таким чином, готівка, яка перебуває у касі банкомата поділена на 4 «черги», які обслуговуються через один канал. Відбір вимог з цих 4 черг здійснюється за певними правилами, тобто присутня певна дисципліна черги. Проте, враховуючи можливість надання права вибору алгоритму формування суми готівки до видачі клієнту, ймовірність «обслуговування» вимог із однієї з 4 черг можна вважати випадковою величиною. Це припущення дозволяє нам вважати, що купюри усіх номіналів перебувають у одній спільній черзі.

Оскільки кількість готівки «у черзі» не є нескінченною величиною, а поповнення запасів не здійснюється безперервно, розглянемо цю модель за умови, що поповнення запасів готівки здійснюється партіями. Тобто, коли рівень запасів готівки зменшується до точки B (точка пере замовлення = розмір буферного запасу), замовляється підкріплення каси банкомата готівкою у розмірі q (аналогічно до моделі Уілсона [8, с. 155—156]). При цьому $B+q=M$, де M — ліміт каси банкомата (максимальний залишок готівки, який відповідно до нормативно-правових актів НБУ та внутрішніх розпоряджень банку може знаходитися у банкоматі) і — є максимально допустимою кількістю вимог у черзі.

Тоді у будь-який момент часу у касі банкомата перебуває m одиниць готівки з ймовірністю P_m , а сама система може перебувати у одному з $M+1$ можливих станах. Число вимог у черзі (m) може змінюватися від M до 0 .

Система переходить зі стану $E(m)$ у стан $E\left(m-1\right),$ після видачі одиниці готівки клієнту (з інтенсивністю λ). Система переходить зі стану $E(m)$ у стан $E\left(m+q\right),$ коли здійснюється інкасація і підкріплення каси банкомата готівкою у обсязі q (з інтенсивністю μ).

У загальному випадку для будь-якого моменту часу стохастична модель теорії масового обслуговування для поетапного обслуговування вимог має такий вигляд [10, с. 148]:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_m(t)}{dt} = -- \lambda P_m + \mu P_{m-q}, \quad m = M, \\ \dfrac{dP_m(t)}{dt} = -\lambda P_m + \lambda P_{m+1} + \mu P_{m-q}, \quad M > m \ge q, \\ \dfrac{dP_m(t)}{dt} = -\lambda P_m + \lambda P_{m+1}, \quad q > m > B, \\ \dfrac{dP_m(t)}{dt} = -\left(\lambda + \mu\right) P_m + \lambda P_{m+1} + \mu P_0, \quad m = B, \\ \dfrac{dP_m(t)}{dt} = -\left(\lambda + \mu\right) P_m + \lambda P_{m+1}, \quad B > m > 0, \\ \dfrac{dP_m(t)}{dt} = -2\mu P_0 + \lambda P_1, \quad m = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Дану систему (1) можна записати у векторно-матричній формі

$$\frac{dP^{'}(t)}{dt} = H\vec{P}\left(t\right), \tag{2}$$

де

$$\vec{P}'(t) = \begin{pmatrix} P'_M(t) \\ P'_m(t) \\ P'_{m-1}(t) \\ P'_{m-2}(t) \\ \dots \\ P'_P(t) \\ \dots \\ P'_{m-n}(t) \\ P'_0(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{P}(t) = \begin{pmatrix} P_M(t) \\ P_m(t) \\ P_{m-1}(t) \\ P_{m-2}(t) \\ \dots \\ P_P(t) \\ \dots \\ P_{m-n}(t) \\ P_0(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$H = \begin{pmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mu & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \dots & \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & -(\lambda+\mu) & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -(\lambda+\mu) & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -2\mu
\end{pmatrix},$$

де $P_M(t)$ — ймовірність того, що залишок коштів у момент часу t у банкоматі дорівнює M , тобто, щойно відбулася інкасація і наразі у банкоматі є максимально можливий залишок коштів; $P_m(t)$ — ймовірність того, що залишок коштів у момент часу t у банкоматі дорівнює m; $P_B(t)$ — ймовірність того, що залишок коштів у момент часу t у банкоматі дорівнює P, тобто досяг точки перезамовлення; $P_0(t)$ — відповідно, ймовірність того, що у момент часу t кошти у банкоматі закінчилися.

Слід наголосити, що

$$\det H = 0. \tag{4}$$

Це випливає із умови нормування, яка повинна виконуватися для будь-якого моменту часу t, а саме:

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(t) = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{m=0}^{M} P'_m(t) = 0. \tag{6}$$

Виконання умов (4) та (6) є основною ознакою того, що стохастична модель побудована вірно [9, с. 74].

На практиці нас, як правило, цікавить робота банкомата (системи) у стаціонарному режимі, тобто, коли

$$\vec{P}'(t) = 0. \tag{7}$$

У цьому випадку система диференційних рівнянь переходить у однорідну систему лінійних рівнянь

$$H\vec{P} = 0. \tag{8}$$

Система (8) є сумісною, але невизначеною, тобто має безліч розв'язків. Тому, якщо у системі рівнянь (8) будь-яке рівняння, наприклад, останнє, замінити умовою нормування (5), то отримаємо неоднорідну сумісну систему алгебраїчних рівнянь, яка у векторно-матричній формі набуде такого вигляду

$$H^*\vec{P} = \vec{b}, \tag{9}$$

де

$$H^* = \begin{pmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mu & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \dots & \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & -(\lambda+\mu) & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -(\lambda+\mu) & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix},$$

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} P_M(t) \\ P_m(t) \\ P_{m-1}(t) \\ P_{m-2}(t) \\ \dots \\ P_B(t) \\ \dots \\ P_{m-n}(t) \\ P_0(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Стаціонарні ймовірності визначаються із рівняння (9)

$$\vec{P} = (H^*)^{-1}\vec{b}. \qquad (10)$$

Оскільки для стаціонарного режиму роботи системи $\dfrac{dP_k(t)}{dt} = 0,$ $k = 0,1,2,\ldots\ldots 20,$ то ймовірності $P_k(t) = P_k$ не будуть залежати від часу.

Отже система різницево-диференційних рівнянь трансформується в однорідну систему алгебраїчних рівнянь, яка є сумісною, але не визначеною, оскільки

$$\det H = 0.$$

Визначимо ймовірності для кожного значення m:

Для $0 < m \le B$ загальна формула для обчислення ймовірності буде мати вигляд:

$$P_m = \frac{2}{\lambda T}\left(\frac{\lambda T + 1}{\lambda T}\right)^{m-1} P_0.$$

Для інтервалу $B < m \le q$ загальна формула для обчислення ймовірностей буде мати вигляд:

$$P_m = \left[\frac{2\mu}{\lambda}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^B - \frac{\mu}{\lambda}\right] P_0 = \frac{2\mu}{\lambda}\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^B - \frac{1}{2}\right] P_0.$$

Для інтервалу $q < m \le M$:

$$P_m = \left[\frac{2\mu}{\lambda}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^B - \frac{2\mu}{\lambda}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{m-q-1}\right] P_0.$$

Імовірності P_m визначені з точністю до P_0. При цьому, якщо ми вважатимемо, що тривалість одного циклу відновлення запасу (час від інкасації до інкасації) має показовий розподіл з середнім значенням $\mu = 1/T,$ то одержимо наступні формули ймовірностей P_m:

$$P_m = \frac{2}{\lambda T}\left(\frac{\lambda T + 1}{\lambda T}\right)^{m-1} P_0, \quad 0 < m \le B,$$

$$P_m = \frac{2}{\lambda T}\left(\left(\frac{\lambda T + 1}{\lambda T}\right)^B - \frac{1}{2}\right) P_0;\ B < m \le q, \qquad (11)$$

$$P_m = \frac{2}{\lambda T}\left(\left(\frac{\lambda T + 1}{\lambda T}\right)^B - \left(\frac{\lambda T + 1}{\lambda T}\right)^{m-q-1}\right) P_0;$$

$$q < m \le M = q + B.$$

Для визначення P_0 використаємо умову нормування:

$$\sum_{m=0}^{M} P_m = 1,$$

тобто, $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_{20} = 1$.

Звідси

$$P_0 = \frac{\lambda T^{B+1}}{2q(1+\lambda T)^B + \left(\lambda T + B - q\right)(\lambda T)^B}. \tag{12}$$

Тепер ми можемо визначити такі показники ефективності цієї системи як середню кількість інкасацій протягом періоду, який розглядається, оптимальну суму підкріплення банкомата готівкою, величину буферного запасу, середній рівень залишку коштів у касі банкомату, а також оцінити середній попит на готівку у банкоматі і ймовірність простою банкомата внаслідок відсутності коштів.

Отже, середня кількість інкасацій протягом буде визначатися як

$$R = 2P_0 + \sum_{m=1}^{B} P_m = \frac{2\lambda T(1+\lambda T)^B}{2q(1+\lambda T)^B + \left(\lambda T + B - q\right)(\lambda T)^B}. \tag{13}$$

Середній попит на готівку

$$A = \lambda T\left(1 - P_0\right) = \left(\lambda T\right)\frac{2q\left(1+\lambda T\right)^B + \left(B-q\right)\left(\lambda T\right)^B}{2q\left(1+\lambda T\right)^B + \left(\lambda T + B - q\right)\left(\lambda T\right)^B}, \tag{14}$$

а середній залишок коштів у банкоматі (математичне очікування)

$$I = \sum_{m=1}^{M} mP_m =$$

$$= \frac{q\left(q + 2B + 1 - 2\lambda T\right)\left(1+\lambda T\right)^B + \frac{1}{2}(B^2 + 4\lambda Tq - q^2 + B - q)\left(\lambda T\right)^B}{2q\left(1+\lambda T\right)^B + \left(\lambda T + B - q\right)\left(\lambda T\right)^B}. \tag{14}$$

Оскільки метою політики управління запасами є не уникнення ризику виникнення дефіциту за будь-яку ціну, а забезпечення певного рівня обслуговування за рахунок утримання певного залишку коштів у якості буферного запасу (за умови мінімізації витрат на його утримання), можна зробити висновок, що реалізуючи власну політику забезпечення банкоматів готівкою банк припускає ймовірність виникнення дефіциту коштів P_{min}.

Тоді рівень буферного (страхового) запасу коштів можна визначити як:

$$B \cong \frac{\ln(\lambda T / 2qP_{\min})}{\ln(1 + 1/\lambda T)}. \tag{16}$$

Другим найбільш значущим параметром для управління процесом підкріплення банкомата готівкою є обсяг «поставки» — сума підкріплення — обсяг коштів, які завантажуються до каси банкомата:

$$q_{опт.} \cong q + \frac{1}{2} q x^{B} \left(\frac{\lambda T}{2C_p} + \frac{1}{2} \frac{\lambda T + B}{\lambda T} \right); \; q = \sqrt{\frac{2\lambda T C_p}{C_i}}, \qquad (17)$$

$$x = \frac{\lambda T}{\lambda T + 1},$$

де C_i — витрати на утримання запасів готівки у банкоматі (включаючи втрачений прибуток), C_p — витрати на поповнення запасів (інкасацію), при цьому $C_i \ll C_p$.

Як бачимо, розмір оптимальної суми підкріплення банкомата готівкою найсильніше залежить від q, яке визначається аналогічно моделі Уілсона.

Другий доданок у формулі (17) незначно коригує величину $q_{опт.}$ і сила його впливу найбільше залежить від розміру буферного запасу. Логічним буде встановити величину буферного запасу таким чином, щоб мінімізувати втрати внаслідок дефіциту готівки найкращим чином, пам'ятаючи про витрати на утримання додаткових запасів. Тоді:

$$D_{op} + 1 \cong \frac{\ln(G\lambda^2 T^2 - \frac{qC_p}{2\lambda T q C_i})}{\ln(1 + 1/\lambda T)},$$

де G — валовий прибуток з танзакції

$$x^{D_{op}} \cong \left(1 + \frac{1}{\lambda T}\right) \frac{2qC_i}{\lambda T G - \left(\frac{q}{\lambda T}\right) C_p}; \; P_0 = \frac{(\lambda T + 1)C_i}{\lambda T G - \frac{q}{\lambda T} C_p}; \qquad (18)$$

$$q'_{op} \cong q + (\lambda T + 1) \frac{G\lambda T + C_p}{G\lambda T + \frac{q}{\lambda T} C_p}; \; q = \sqrt{\frac{2\lambda T C_p}{C_i}}.$$

Висновки з проведеного дослідження. Якщо P_0 буде більшим бажаного значення — ми втратимо занадто багато клієнтів внаслідок дефіциту готівки, якщо ж P_0 буде меншим — ми будемо нести невиправдані витрати на підтримку надмірних запасів, тобто, у будь-якому випадку не досягнемо бажаного результату.

Якщо ми отримаємо D_{op} близьким до нуля або ж від'ємним — витрати на підтримку запасів є настільки значними, що нівелюють виграш від зменшення ймовірності дефіциту шляхом створення буферного запасу, тобто банку варто підкріплювати банкомат готівкою після закінчення її запасу.

Як бачимо, формула для визначення оптимальної партії підкріплення банкомата готівкою дуже схожа на аналогічну формулу у моделі Уілсона, та включає додатково деякий «коригуючий» доданок, а величина буферного запасу пропорційна натуральному логарифму цього «коригуючого» доданка. У обох випадках необхідність такої «корекції» викликана необхідністю встановлення компромісу між скороченням витрат на утримання запасів і ризиком втрат у наслідок виникнення дефіциту. Враховуючи той факт, що і знаменник, і чисельник «коригуючого» доданка перебувають під впливом добутку λT , скоротивши час поповнення запасів, ми можемо зменшити і обсяг поставки, і величину буферного запасу. Отже, якщо період часу між виявленням необхідності у проведенні інкасації і власне підкріпленням банкомата готівковими коштами незначний (а так, яка правило, і є на практиці), для визначення оптимальної суми підкріплення банкомата і буферного запасу готівки у касі банкомата можна використовувати відповідні формули моделі Уілсона.

Список використаних джерел:

1. 5 причин оптимизировать управление выдачей наличных денежных средств в банкоматах. — Режим доступу: http://www.bpcbt.ru/blog-/5-prichin-optimizirovat-upravlenie-vydachejj-nalichnykh-sredstv-v-bankomatakh/
2. Абдукадиров Т. SmartVista Cash Management: управление наличными денежными средствами в банкоматной сети / Т. Абдукадиров // ПЛАС. — 2011. — №5. — С. 25–27.
3. Національний банк України (офіційний ресурс). — Режим доступу: http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/category?cat_id=79219
4. Пастухов Д.В. Как заработать на управлении наличными денежными средствами / Д. В. Пастухов // Расчеты и операцтонная работа в коммерческом банке. — 2011. — № 6. — С. 54–57.
5. Янковский И. Генезис математических моделей банка / И. Янковский // Банкауски веснік. — 2008. — №2. — С. 27–30
6. Mitten L. G. Conference, Armour Research Institute and lllinas / L. G. Mitten, O. R. Second // Institute of Technology. — 1957.
7. Четыркин Е. М. Вероятность и статистика / Е. М. Четыркин, И. Л. Калихман. — М. : Финансы и статистика, 1985. — 319 с.
8. Букан Дж. Научное упраление запасами / Дж. Букан, Э. Кенигсберг. — М. : Наука. — 1967. — С. 155–162.
9. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М. : Машиностроение, 1979. — 432 с.
10. Morse P. M. Queues, Inventories and Maintenance / P. M. Morse // Pablications in Operations Research, №1, Operations Research Society of America. — New York : John Wiley and Sons, 1958. — 200 c.

The ATM cash management mathematic model, that used statements of the inventory theory and queueing theory is developed in this article.

Key words: *ATM, stochastic model, Wilson's inventory management model.*

Отримано: 27.09.2012