УДК 539.3

Я. Я. Рущицький, О. О. Хотенко

Наближені розв'язки нелінійних хвильових рівнянь, що описують пружні поверхневі хвилі Релея

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

Отримано нові наближені розв'язки нелінійних хвильових рівнянь, запропонованих авторами даного повідомлення раніше. Застосовано метод послідовних наближень. Одержані розв'язки відповідають другому наближенню. Спостережено появу у розв'язках других гармонік як класичної хвилі Релея, так і класичної експоненти, що описує затухання.

Викладені у даній роботі результати можна вважати такими, що випливають з [1], де проведено короткий історичний огляд досліджень нелінійних поверхневих хвиль Релея і отримано нові нелінійні хвильові рівняння для двовимірного випадку пружного квадратично нелінійного деформування в рамках моделі Мурнагана, які є базовими для аналізу хвиль Релея. В одержаних рівняннях [1] враховується як геометрична, так і фізична нелінійності процесу деформування. Зазначимо, що теорія хвиль Релея не являє собою закінчений фрагмент класичної теорії, вона розвивається [2, 3].

Про теоретичний підхід у вивченні нелінійного пружного деформування, характерного для хвилі Релея. При лінійному деформуванні конфігурація тіла до деформування (відлікова конфігурація) і конфігурація тіла після деформування (актуальна конфігурація) ототожнюються [4–6]. При переході від малих (інфінітезимальних) деформацій до великих (скінченних) ці конфігурації вже не є тотожними — границя тіла змінюється. Цю особливість нелінійності процесу деформування відносять до геометричної нелінійності. В цілому, у механіці матеріалів врахування нелінійності призводить до значного ускладнення теоретичного опису (формально, ускладнення основної системи рівнянь і граничних умов). При різному виборі тензорів деформацій та обертань отримують варіанти геометричної нелінійності. У випадку гіперпружного деформування при різному виборі пружних потенціалів отримують варіанти фізичної нелінійності — нелінійної залежності тензорів напружень від тензорів деформацій та обертань. Обидва типи нелінійності взаємозалежні внаслідок того, що вибір конкретних пружних потенціалів поєднується з використанням конкретних тензорів деформацій.

У даному дослідженні вибрано потенціал Мурнагана у вигляді

$$\Phi(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda(I_1)^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}AI_3 + BI_1I_2 + \frac{1}{3}C(I_1)^3, \tag{1}$$

де λ, μ — пружні сталі другого порядку (сталі Ламе); A, B, C — пружні сталі третього порядку (сталі Мурнагана); I_1, I_2, I_3 — перші базисні алгебраїчні інваріанти тензора деформації Коші–Гріна $\varepsilon_{nm} = (u_{n,m} + u_{m,n} + u_{i,n}u_{i,m})/2$.

Зауваження щодо геометричної та фізичної нелінійностей. Слід зазначити, що в нелінійній теорії пружності розрізнення геометричної та фізичної нелінійностей є загальноприйнятим. Випадки роздільного аналізу нелінійних задач теорії пружності, коли враховується або лише геометрична, або лише фізична нелінійності пружного деформування прийняті в теоретичному аналізі та при акуратних застереженнях фізично прийнятні. Випадку нехтування фізичною нелінійністю та врахуванню лише геометричної нелінійності відповідає так званий пружний гармонічний потенціал Джона [4, 8] (дехто відносить матеріал Джона до стандартних пружних матеріалів [9], дехто називає його напівлінійним [8]), який звичайно записують у вигляді $\Phi = (1/2)\lambda(s_1)^2 + \mu s_2$, де s_1, s_2 — перший та другий базисні інваріанти тензора деформацій Коші–Гріна; λ, μ — пружні сталі Ламе. За виглядом потенціал Джона ідентичний потенціалу для пружного лінійного ізотропного матеріалу $\Phi = (1/2)\lambda(I_1)^2 + \mu I_2$, де I_1, I_2 — перший та другий базисні алгебраїчні інваріанти тензора деформацій Коші–Гріна.

У випадку малих деформацій базисні та базисні алгебраїчні інваріанти є тотожними; для немалих деформацій в інваріантах враховується нелінійний запис компонентів тензора деформацій Коші–Гріна через компоненти вектора переміщень.

Про класичну постановку задачі про поверхневі хвилі Релея. В цій постановці задачі [5, 10, 11] вивчається поширення хвиль вздовж площини $x_3 = 0$, коли пружне середовище займає верхній півпростір. Далі припускається, що рух не буде залежати від координат x_2, і тоді задача стає двовимірною (плоскою задачею в площині Ox_1x_3; механічний стан середовища стає плоским деформованим). Напрямок руху хвиль вибирається вздовж осі Ox_1.

У рамках нелінійної постановки та прийнятих припущень про хвильовий рух рівняння руху записуються через несиметричний тензор напружень Кірхгофа t_{nm} в більш простому вигляді

$$t_{11,1} + t_{31,3} = \rho\ddot{u}_1; \qquad t_{13,1} + t_{33,3} = \rho\ddot{u}_3.$$

У даній роботі припускається, що запис потенціалу Мурнагана (1) включає тільки квадратично нелінійні складові градієнта деформації [5, 6, 7, 9, 12]

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \frac{1}{2}\lambda(u_{1,1} + u_{3,3})^2 + \mu\left\{(u_{1,1})^2 + (u_{3,3})^2 + \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1})^2\right\} + \\ & + \frac{1}{2}\lambda(u_{1,1} + u_{3,3})[(u_{1,1})^2 + (u_{3,3})^2 + (u_{1,3})^2 + (u_{3,1})^2] + \\ & + \mu\{(u_{1,1})^3 + (u_{3,3})^3 + 2u_{1,1}(u_{1,3})^2 + 2u_{1,1}(u_{3,1})^2 + u_{1,3}u_{3,1}(u_{1,1} + u_{3,3})\} + \\ & + \frac{1}{3}A\left[(u_{1,1})^3 + (u_{3,3})^3 + \frac{3}{4}(u_{1,3} + u_{3,1})^2(u_{1,1} + u_{3,3})\right] + \\ & + B(u_{1,1} + u_{3,3})\left[(u_{1,1})^2 + (u_{3,3})^2 + \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1})^2\right] + \frac{1}{3}C(u_{1,1} + u_{3,3})^3.\end{aligned}$$

Рівняння руху трансформуються в два нелінійні хвильові рівняння (далі записано лише перше; друге отримується з першого заміною індексів $1 \rightleftharpoons 3$)

$$\rho\ddot{u}_1 - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} - (\lambda + \mu)u_{3,13} - \mu u_{1,33} = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]u_{1,1}u_{1,11} +$$

$$+\left[2(\lambda+2\mu)+\left(\frac{A}{2}+B\right)\right](u_{1,1}u_{1,33}+2u_{1,3}u_{1,13}+u_{1,3}u_{3,33}+u_{3,1}u_{3,11}+$$

$$+u_{3,3}u_{1,33})+\left[(\lambda+\mu)+\left(\frac{A}{2}+3B+2C\right)\right](u_{1,1}u_{3,13}+u_{3,3}u_{3,13})+$$

$$+\left[\mu+\left(\frac{A}{2}+B\right)\right](u_{1,3}u_{3,11}+2u_{3,1}u_{1,13}+u_{3,1}u_{3,33})+[\lambda+2(B+C)]u_{3,3}u_{1,11}. \qquad (2)$$

В цих рівняннях лінійні складові записані в лівих частинах рівнянь, тоді як праві частини включають по 12 квадратично нелінійних складових однакової структури. Складові в першому та другому рівняннях не збігаються, тому їх загальна кількість становить 24 (чотири варіанти перших похідних, помножені на шість варіантів других похідних). Нагадаємо, що у випадку залежності u_k від однієї змінної (випадок, характерний для плоских хвиль) три рівняння руху в переміщеннях включають тільки три відмінні між собою нелінійні складові [5–7]. Слід також відзначити, що значне збільшення кількості нелінійних складових було раніше зафіксовано при дослідженні циліндричних хвиль різних типів [7].

Рівняння (2) записані з урахуванням геометричної (шляхом нелінійного запису залежності деформацій від переміщень, що допускають не тільки обов'язкові для лінійної теорії нескінченно малі деформації) та фізичної (шляхом кубічної нелінійності пружного потенціалу Мурнагана, що відповідає квадратичній нелінійності у визначальних рівняннях) нелінійностей. Однак існують ситуації, коли деформування матеріалу можна вважати тільки геометрично нелінійним процесом (деформації не нескінченно малі та визначальні співвідношення лінійні) або тільки фізично нелінійним процесом (деформації нескінченно малі, але визначальні співвідношення вже нелінійні). Для цих випадків рівняння (2), що реалізують загальний нелінійний підхід (назвемо його *підходом 1*), можуть бути спрощені. *Підхід 2* враховує геометричну нелінійність та не враховує фізичну. *Підхід 3* враховує фізичну нелінійність і не враховує геометричну.

Хвильові рівняння другого наближення в аналізі нелінійних хвиль Релея. Рівняння типу (2) є базовими при аналізі нелінійних пружних хвиль, що поширюються в площині (в даному випадку — площині Ox_1x_3), включаючи хвилі, локалізовані в околі границі. Однією з таких хвиль є класична хвиля Релея. Лінійний аналіз цієї хвилі оснований на введенні двох нових функцій, які можуть бути визначені як розв'язки двох незв'язаних лінійних хвильових рівнянь [5, 10, 11]. У нелінійному випадку, як випливає з отриманих базових рівнянь (2), такі хвильові рівняння вже будуть нелінійними та взаємозв'язаними.

Введемо два потенціали за класичною схемою

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_3,t)&=[\varphi(x_1,x_3,t)]_{,1}+[\psi(x_1,x_3,t)]_{,3},\\ u_3(x_1,x_3,t)&=[\varphi(x_1,x_3,t)]_{,3}-[\psi(x_1,x_3,t)]_{,1}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Підставимо потенціали (3) в рівняння (2) та одержуємо нелінійні хвильові рівняння (далі записане лише перше; друге отримується з першого заміною індексів $1 \rightleftharpoons 3$)

$$[\rho\ddot{\varphi}-(\lambda+2\mu)\Delta\varphi]_{,1}+[\rho\ddot{\psi}-\mu\Delta\psi]_{,3}=$$

$$=3(\lambda+2\mu)\varphi_{,11}\varphi_{,111}+(2\lambda+3\mu)\varphi_{,11}\varphi_{,133}+3(\lambda+3\mu)\varphi_{,13}\varphi_{,113}+$$

$$+(\lambda+3\mu)\varphi_{,13}\varphi_{,333}+\lambda\varphi_{,33}\varphi_{,111}+(2\lambda+3\mu)\varphi_{,33}\varphi_{,133}+(\lambda+2\mu)\psi_{,11}\psi_{,111}-$$

$$-\mu\psi_{,11}\psi_{,133}+2(\lambda+3\mu)\psi_{,13}\psi_{,113}-\mu\psi_{,33}\psi_{,111}+(\lambda+2\mu)\psi_{,33}\psi_{,133}. \qquad (4)$$

Застосуємо до аналізу рівнянь (4) метод послідовних наближень (тобто, використаємо досвід аналізу плоских нелінійних хвиль [5–7, 12, 13]). Розв'язок для першого (лінійного) наближення шукатимемо у вигляді класичного запису хвилі Релея [5, 10, 11]

$$\varphi^{(1)}(x_1,x_3,t)=e^{i(k_{lin}x_1-\omega t)}\widetilde{\varphi}^{(1)}(x_3);\qquad \psi^{(1)}(x_1,x_3,t)=e^{i(k_{lin}x_1-\omega t)}\widetilde{\psi}^{(1)}(x_3). \tag{5}$$

Після підстановки в лінійні частини рівнянь (4) (з нульовими правими частинами) за класичною процедурою отримаємо, що функції $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$ задовольняють рівняння

$$\widetilde{\varphi}''-k_\varphi^2\widetilde{\varphi}=0,\qquad \widetilde{\psi}''-k_\psi^2\widetilde{\psi}=0,\qquad k_\varphi^2=k_{lin}^2-k_L^2,\qquad k_\psi^2=k_{lin}^2-k_T^2,$$

$$v_L=\frac{\omega}{k_L}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\qquad v_T=\frac{\omega}{k_T}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

В результаті, в першому наближенні потенціали мають вигляд, що відповідає гармонічній хвилі з частотою ω та хвильовим числом k_{lin}, яка затухає за експоненціальним законом при віддаленні від площини $x_1=0$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(x_1,x_3,t)&=A_\varphi^{(1)}e^{i(k_{lin}x_1-\omega t)-\sqrt{k_{lin}^2-k_L^2}x_3},\\ \psi^{(1)}(x_1,x_3,t)&=A_\psi^{(1)}e^{i(k_{lin}x_1-\omega t)-\sqrt{k_{lin}^2-k_T^2}x_3}.\end{aligned} \tag{6}$$

Рівняння другого наближення можна записати у вигляді чотирьох рівнянь (далі записані лише перші два; два інші отримуються з перших заміною індексів $1\rightleftharpoons 3$)

$$\begin{aligned}&[\rho\ddot{\varphi}^{(2)}-(\lambda+2\mu)\Delta\varphi^{(2)}]_{,1}=3(\lambda+2\mu)\varphi_{,11}^{(1)}\varphi_{,111}^{(1)}+(\lambda+3\mu)\varphi_{,13}^{(1)}\varphi_{,333}^{(1)}+\lambda\varphi_{,33}^{(1)}\varphi_{,111}^{(1)}+\\ &\qquad+(2\lambda+3\mu)\varphi_{,33}^{(1)}\varphi_{,133}^{(1)};\\ &[\rho\ddot{\psi}^{(2)}-\mu\Delta\psi^{(2)}]_{,3}=(\lambda+2\mu)\psi_{,11}^{(1)}\psi_{,111}^{(1)}-\mu\psi_{,11}^{(1)}\psi_{,133}^{(1)}+2(\lambda+3\mu)\psi_{,13}^{(1)}\psi_{,113}^{(1)}-\\ &\qquad-\mu\psi_{,33}^{(1)}\psi_{,111}^{(1)}+(\lambda+2\mu)\psi_{,33}^{(1)}\psi_{,133}^{(1)}.\end{aligned} \tag{7}$$

Підстановка записів (6) у рівняння (7) дає рівняння для знаходження другого наближення

$$\left(\frac{k_L^2}{\omega^2}\right)\ddot{\varphi}^{(2)}-\Delta\varphi^{(2)}=M_\varphi^{(1)}(A_\varphi^{(1)})^2e^{2[i(k_{lin}x_1-\omega t)-\sqrt{k_{lin}^2-k_L^2}x_3]}, \tag{8}$$

$$\left(\frac{k_T^2}{\omega^2}\right)\ddot{\psi}^{(2)}-\Delta\psi^{(2)}=-iM_\psi^{(1)}(A_\psi^{(1)})^2e^{2[i(k_{lin}x_1-\omega t)-\sqrt{k_{lin}^2-k_T^2}x_3]}, \tag{9}$$

$$M_\varphi^{(1)}=k_L^4\left\{\left(2+19\frac{k_L^2}{k_T^2}\right)\frac{k_{lin}^4}{k_L^4}-\left(2+19\frac{k_L^2}{k_T^2}\right)\frac{k_{lin}^2}{k_L^2}+\left(1-\frac{k_L^2}{k_T^2}\right)\right\},$$

$$M_\psi^{(1)}=k_T^4\left\{\left(\frac{k_T^2}{k_L^2}+\frac{5}{4}\right)\frac{k_{lin}}{k_T^2}\sqrt{\frac{k_{lin}^2}{k_T^2}-1}+2\left(2\frac{k_{lin}^2}{k_T^2}-1\right)\left(\frac{k_{lin}}{k_T^2}\sqrt{\frac{k_{lin}^2}{k_T^2}-1}\right)^{-1}\right\}.$$

Зауважимо, що для загального підходу 1 структура рівнянь (8), (9) залишається незмінною і відмінності будуть виявлятися лише у записах коефіцієнтів $M_\varphi^{(1)}$, $M_\psi^{(1)}$, $M_{\varphi\psi}^{(1)}$.

Розв'язок нелінійних хвильових рівнянь (друге наближення). Система неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь (8), (9) розв'язувалася з урахуванням того, що праві частини є розв'язками лінійних рівнянь (випадок резонансу). Тому розв'язок має вигляд

$$\varphi^{(2)}(x_1, x_3, t) = -\frac{x_1 x_3(\sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2}x_1 - ik_{lin}x_3)}{4[(k_{lin}^2 - k_L^2)x_1^2 - k_{lin}^2 x_3^2]} M_\varphi (A_\varphi^{(1)})^2 e^{2[i(k_{lin}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2}x_3]},$$
$$\psi^{(2)}(x_1, x_3, t) = \frac{x_1 x_3(\sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2}x_1 - ik_{lin}x_3)}{4[(k_{lin}^2 - k_T^2)x_1^2 - k_{lin}^2 x_3^2]} M_\psi (A_\psi^{(1)})^2 e^{2[i(k_{lin}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2}x_3]}. \quad (10)$$

Таким чином, розв'язок сформульованої вище задачі про поширення хвилі Релея в рамках двох наближень має вигляд

$$\varphi(x_1, x_3, t) = \varphi^{(1)}(x_1, x_3, t) + \varphi^{(2)}(x_1, x_3, t) = A_\varphi^{(1)} e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2}x_3} -$$
$$- \frac{x_1 x_3(\sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2}x_1 - ik_{lin}x_3)}{4[(k_{lin}^2 - k_L^2)x_1^2 - k_{lin}^2 x_3^2]} M_\varphi^{(1)} (A_\varphi^{(1)})^2 e^{2[i(k_{lin}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2}x_3]},$$
$$\psi(x_1, x_3, t) = \psi^{(1)}(x_1, x_3, t) + \psi^{(2)}(x_1, x_3, t) = A_\psi^{(1)} e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2}x_3} +$$
$$+ \frac{x_1 x_3(\sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2}x_1 - ik_{lin}x_3)}{4[(k_{lin}^2 - k_T^2)x_1^2 - k_{lin}^2 x_3^2]} M_\psi^{(1)} (A_\psi^{(1)})^2 e^{2[i(k_{lin}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2}x_3]}.$$

З одержаних нових результатів можна, зокрема, зробити такі висновки.

1. Хвильова картина, що відповідає другому наближенню, описується хвильовими параметрами першого наближення. Це спостереження стосується будь-якого наближення і випливає з природи методу послідовних наближень.

2. Друге наближення є другою гармонікою щодо першого (лінійного) наближення, тобто це є друга гармоніка щодо хвилі, яка поширюється у напрямку горизонтальної координати, і друга гармоніка щодо експоненціального затухання хвилі вздовж вертикальної координати. Ці гармоніки мають амплітуди, які нелінійно залежать від координат і тому збільшуються зі збільшенням часу поширення хвилі Релея. Як наслідок, перша гармоніка буде спотворюватися.

3. Залежність амплітуд других гармонік від квадратів відповідних амплітуд перших гармонік є стандартним для методу послідовних наближень і має певні наслідки щодо спотворення першої гармоніки. Зокрема, оскільки в конструкційних матеріалах амплітуди звичайно мають порядок $10^{-3} - 10^{-5}$ м, то для виявлення ефекту спотворення малість квадрату амплітуд повинна компенсуватися більшими значеннями хвильових чисел (більшими значеннями частоти).

4. Для чисто поверхневої хвилі ($x_3 = 0$) друге наближення є нульовим, проте для приповерхневої хвилі ($x_3 > 0$) це наближення може суттєво змінити хвильову картину. Слід зауважити, що в одержаному розв'язку хвильове число k_{lin} визначається з граничних умов, аналіз яких не наводиться у даному повідомленні.

1. *Rushchitsky J. J., Khotenko E. A.* On Rayleigh wave in quadratically nonlinear elastic half-space (Murnaghan model) // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47 (3)**. – P. 100–108.

2. *Zabolotskaya E. A., Il'inskii Yu. A., Hamilton M. F.* Nonlinear Rayleigh waves in soft tissue // J. Acoust. Soc. Am. – 2006. – **119 (5)**. – P. 3319.
3. *Liu M., Kim J.-M., Jacobs L., Qu J.* Experimental study of nonlinear Rayleigh wave propagation in shot-peened aluminium plates. Feasibility of measuring residual stress // Nondestr. Testing and Experim. International. – 2011. – **44 (1)**. – P. 67–74.
4. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.
5. *Рущицький Я. Я., Цурпал С. І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ: Інст-ту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, 1998. – 377 с.
6. *Cattani C., Rushchitsky J. J.* Wavelet and wave analysis as applied to materials with micro or nanostructure. – Singapore; London: World Scientific, 2007. – 466 p.
7. *Rushchitsky J. J.* Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves: primary analysis of evolution // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41 (7)**. – P. 770–777.
8. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
9. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Ленинград: Машиностроение, 1986. – 336 с.
10. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
11. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam: North Holland, 1973. – 436 p.
12. *Rushchitsky J. J.* Analysis of a quadratically nonlinear hyperelastic plane longitudinal wave // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45 (2)**. – P. 148–158.
13. *Rushchitsky J. J., Sinchilo S. V., Khotenko I. N.* On generation of the second, fourth, eighth and next harmonics by the quadratically nonlinear hyperelastic plane longitudinal wave // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45 (6)**. – P. 621–628.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 05.04.2011

Я. Я. Рущицкий, О. О. Хотенко

Приближенные решения нелинейных уравнений, описывающих поверхностные волны Релея

Получены новые приближенные решения нелинейных волновых уравнений, предложенных авторами данной работы ранее. Применен метод последовательных приближений. Полученные решения соответствуют второму приближению. Замечено появление в решениях вторых гармоник как классической волны Релея, так и классической компоненты, которая описывает затухание.

Ya. Ya. Rushchitskii, O. O. Khotenko

Approximate solutions of nonlinear wave equations describing the Rayleigh elastic surface waves

The new approximate solutions are obtained for the nonlinear wave equations offered recently by the authors of this communication. The method of successive approximations is utilized. The equations and their solutions correspond to the second approximation. The appearance of a classical Rayleigh wave and the classical exponent describing the attenuation in the second harmonics is observed.